

Das variáveis complexas rumo às superfícies mínimas

Ricardo Sá Earp

Departamento de Matemática

A linguagem proveniente da Análise Complexa:

Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva ângulos orientados. Um fato que pode ser provado via as equações de Cauchy-Riemann, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

A linguagem proveniente da Análise Complexa: Funções holomorfas e aplicações conformes

Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C} := \{z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$. Dizemos que $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto f(z)$ uma função complexa definida em U é **holomorfa** se f possui derivada complexa $f'(z)$ em todos os pontos de U , ou seja o limite

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe e é finito para todo $z \in U$. Dizemos que f é **conforme**, se f preserva *ângulos orientados*. Um fato que pode ser provado via as *equações de Cauchy-Riemann*, é que f é conforme se e somente se f é holomorfa e $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in U$.

Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski** $J(z)$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Note que $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$.

Assim, $J(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é conforme para $z \neq \pm 1$. A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado $B^* = \{0 < |z| < 1\}$; logo $J(z)$ é um **mapeamento conforme** que leva B^* conformemente sobre sua imagem $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérboles cofocais.

Observamos também que $J(z)$ é um mapeamento conforme do semi-plano superior $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski** $J(z)$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Note que $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$.

Assim, $J(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é conforme para $z \neq \pm 1$. A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado $B^* = \{0 < |z| < 1\}$; logo $J(z)$ é um **mapeamento conforme** que leva B^* conformemente sobre sua imagem $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérboles cofocais.

Observamos também que $J(z)$ é um mapeamento conforme do semi-plano superior $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski** $J(z)$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Note que $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$.

Assim, $J(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é conforme para $z \neq \pm 1$. A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado $B^* = \{0 < |z| < 1\}$; logo $J(z)$ é um **mapeamento conforme** que leva B^* conformemente sobre sua imagem $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérboles cofocais.

Observamos também que $J(z)$ é um mapeamento conforme do semi-plano superior $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski** $J(z)$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Note que $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$.

Assim, $J(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é conforme para $z \neq \pm 1$. A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado $B^* = \{0 < |z| < 1\}$; logo $J(z)$ é um **mapeamento conforme** que leva B^* conformemente sobre sua imagem $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérboles cofocais.

Observamos também que $J(z)$ é um mapeamento conforme do semi-plano superior $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Aplicação de Joukowski

Por exemplo, considere a **aplicação de Joukowski** $J(z)$ dada por $z \mapsto \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Note que $J'(z) = 1/2(1 - 1/z^2)$.

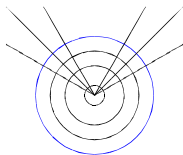
Assim, $J(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e é conforme para $z \neq \pm 1$. A aplicação de Joukowski é **univalente** (injetiva) e aberta no disco unitário perfurado $B^* = \{0 < |z| < 1\}$; logo $J(z)$ é um **mapeamento conforme** que leva B^* conformemente sobre sua imagem $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Os círculos concêntricos centrados na origem e os raios partindo da origem são levados em elipses e hipérboles cofocais.

Observamos também que $J(z)$ é um mapeamento conforme do semi-plano superior $H = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

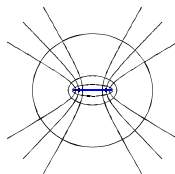
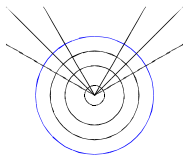
Aplicação de Joukowski: $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- ▶ A família de círculos centrados na origem de raio $r > 1$ ou $r < 1$, e raios ortogonais a estes círculos
- ▶ enviada respectivamente em elipses e hipérboles cofocais



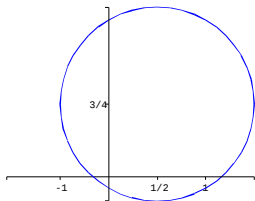
Aplicação de Joukowski: $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

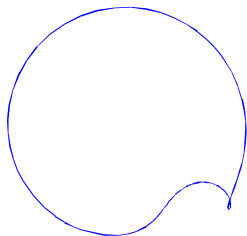
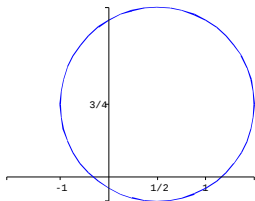
- ▶ A família de círculos centrados na origem de raio $r > 1$ ou $r < 1$, e raios ortogonais a estes círculos
- ▶ enviada respectivamente em elipses e hipérboles cofocais



Aplicação de Joukowski: $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- Vamos ver agora a imagem do círculo deslocado, de centro $(1/2, 3/4)$ e de raio 1 que envolve o ponto singular $z = 1$



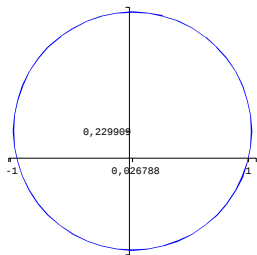


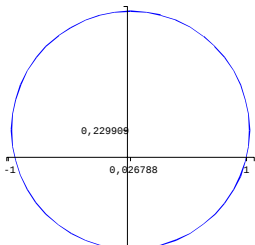
Aplicação de Joukowski: $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- ▶ Vamos ver agora a imagem de um círculo deslocado, de raio 1 que passa pelo ponto singular $z = 1$
- ▶ A transformação de Joukowski tem importância em certas aplicações em aerodinâmica: **Perfil de Joukowski**, construção de asas de avião.

Aplicação de Joukowski: $z \mapsto \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

- ▶ Vamos ver agora a imagem de um círculo deslocado, de raio 1 que passa pelo ponto singular $z = 1$
- ▶ A transformação de Joukowski tem importância em certas aplicações em aerodinâmica: **Perfil de Joukowski**, construção de asas de avião.





À toda função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ ($z = x + iy$), é costume associar as derivadas com respeito a z e a $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Pode ser facilmente verificado que se f é holomorfa em U , então $f_{\bar{z}} \equiv 0$, em U (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que $f'(z) = f_z$.

Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados $\mathcal{S}$ de U , tal que $\lim |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamado de função **meromorfa**. Cada ponto de $\mathcal{S}$ é chamado de **pólo** de f . Por exemplo: a **função de Joukowski**: $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, possui um pólo na origem, daí é meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

À toda função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ ($z = x + iy$), é costume associar as derivadas com respeito a z e a $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Pode ser facilmente verificado que se f é holomorfa em U , então $f_{\bar{z}} \equiv 0$, em U (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que $f'(z) = f_z$.

Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados $\mathcal{S}$ de U , tal que $\lim |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamado de função **meromorfa**. Cada ponto de $\mathcal{S}$ é chamado de **pólo** de f . Por exemplo: a **função de Joukowski**: $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, possui um pólo na origem, daí é meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

À toda função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ ($z = x + iy$), é costume associar as derivadas com respeito a z e a $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Pode ser facilmente verificado que se f é holomorfa em U , então $f_{\bar{z}} \equiv 0$, em U (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que $f'(z) = f_z$.

Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados $\mathcal{S}$ de U , tal que $\lim |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamado de função **meromorfa**. Cada ponto de $\mathcal{S}$ é chamado de **pólo** de f . Por exemplo: a **função de Joukowski**: $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, possui um pólo na origem, daí é meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

À toda função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, (não necessariamente holomorfa) que possui derivadas parciais $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$ e $f_y := \frac{\partial f}{\partial y}$ ($z = x + iy$), é costume associar as derivadas com respeito a z e a $\bar{z}$

$$f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Pode ser facilmente verificado que se f é holomorfa em U , então $f_{\bar{z}} \equiv 0$, em U (equações de Cauchy-Riemann). Neste caso, tem-se que $f'(z) = f_z$.

Uma função holomorfa f em U , exceto num conjunto de pontos isolados S de U , tal que $\lim |f(z)| = \infty$, quando z tende à algum destes pontos isolados é chamado de função **meromorfa**. Cada ponto de S é chamado de **pólo** de f . Por exemplo: a **função de Joukowski**: $J(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, possui um pólo na origem, daí é meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, $h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ não é uma função holomorfa já que $h_{\bar{z}} = \bar{z}^{n-1} \neq 0$. Diferenciando-se $h(z)$ com respeito a z obtém-se que $h_{z\bar{z}} = 0$.

Note que a se $f(z) := u(z) + iv(z)$, $u(z), v(z) \in \mathcal{R}$ é holomorfa, então, sua **parte real** dada por $u(z) = \Re f(z) = (f(z) + \bar{f}(z))/2$, é **harmônica**, ou seja $(\Re f(z))_{z\bar{z}} = 0$, já que

$$(f(z))_{\bar{z}} = 0 = (\bar{f}(z))_z.$$

Isto leva ao conceito de funções e aplicações harmônicas que é fundamental na **Análise Complexa** e na **Teoria das Superfícies**.

Por outro lado, $h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ não é uma função holomorfa já que $h_{\bar{z}} = \bar{z}^{n-1} \neq 0$. Diferenciando-se $h(z)$ com respeito a z obtém-se que $h_{z\bar{z}} = 0$.

Note que a se $f(z) := u(z) + iv(z)$, $u(z), v(z) \in \mathfrak{R}$ é holomorfa, então, sua **parte real** dada por $u(z) = \Re f(z) = (f(z) + \bar{f}(z))/2$, é **harmônica**, ou seja $(\Re f(z))_{z\bar{z}} = 0$, já que

$$(f(z))_{\bar{z}} = 0 = (\bar{f}(z))_z.$$

Isto leva ao conceito de funções e aplicações harmônicas que é fundamental na **Análise Complexa** e na **Teoria das Superfícies**.

Por outro lado, $h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ não é uma função holomorfa já que $h_{\bar{z}} = \bar{z}^{n-1} \neq 0$. Diferenciando-se $h(z)$ com respeito a z obtém-se que $h_{z\bar{z}} = 0$.

Note que a se $f(z) := u(z) + iv(z)$, $u(z), v(z) \in \mathfrak{R}$ é holomorfa, então, sua **parte real** dada por $u(z) = \Re f(z) = (f(z) + \bar{f}(z))/2$, é **harmônica**, ou seja $(\Re f(z))_{z\bar{z}} = 0$, já que

$$(f(z))_{\bar{z}} = 0 = (\bar{f}(z))_z.$$

Isto leva ao conceito de funções e aplicações harmônicas que é fundamental na **Análise Complexa** e na **Teoria das Superfícies**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o Laplaciano de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um mapeamento harmônico de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um hipociclóide com $n+1$ cúspides inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o deltóide, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o astróide.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica.

Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Aplicações harmônicas de $U \subset \mathbb{C}$ no plano complexo $\mathbb{C}$

Dizemos que $h : U \rightarrow \mathbb{C}$, $w := u + iv \mapsto h(w)$, é uma aplicação harmônica.

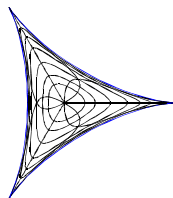
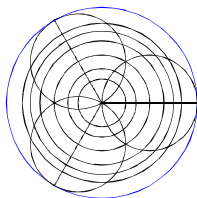
$$h_{w\bar{w}} = \frac{\partial^2 h}{\partial w \partial \bar{w}} = 0$$

Ou seja, $\Delta h := h_{uu} + h_{vv} = 0$, o **Laplaciano** de h é nulo; assim temos a noção usual de harmonicidade das variáveis complexas. Vimos que a aplicação

$h : B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto h(z) = z + \bar{z}^n/n$, $n \in \mathbb{N}^*$ é harmônica. Como também é univalente (injetiva) e aberta dizemos que

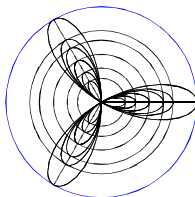
$w = h(z)$ é um **mapeamento harmônico** de $B_1(0)$ sobre sua imagem, que vem a ser um **hipociclóide** com $n+1$ **cúspides** inscrito no círculo $|w| = (n+1)/n$. Quando $n = 2$ (três cúspides) obtemos o **deltóide**, quando $n = 3$ (quatro cúspides) obtemos o **astróide**.

Sua imagem, por $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$, é o interior do deltóide



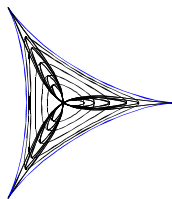
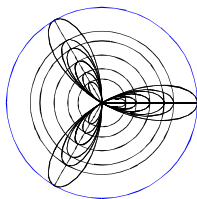
Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide: $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

- Disco unitário, **desenhados**, os semi-eixos em $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$,



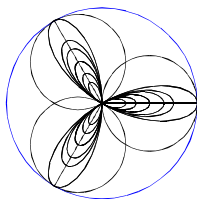
círculos concêntricos e rosáceas.

Sua imagem, por $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$, é o interior do deltóide



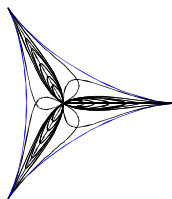
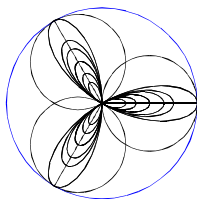
Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide: $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

- Disco unitário e sua imagem, **desenhados**, os semi-eixos em $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$, rosáceas e outros círculos centrados nos eixos.

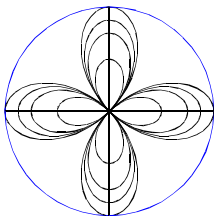


Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do deltóide: $z \mapsto z + \bar{z}^2/2$

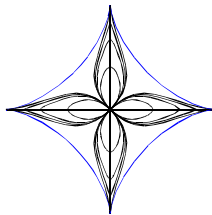
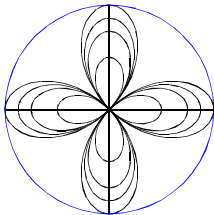
- Disco unitário e sua imagem, **desenhados**, os semi-eixos em $\theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3$, rosáceas e outros círculos centrados nos eixos.



Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do astróide: $z \mapsto z + \bar{z}^3/3$



Mapeamento harmônico do **disco unitário** no interior do astróide: $z \mapsto z + \bar{z}^3/3$



Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $\cdot$:

Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma **imersão conforme**, se $X_x \cdot X_y = 0$,
 $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$.

Seja **N** a **aplicação de Gauss Euclideana** (normal unitário) definida por
 $N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. O símbolo $\times$ refere-se ao produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Superfícies $S = X(U)$ que **minimizam** área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são **mínimas**: a **curvatura média** = semi-soma das **curvaturas principais** é **nula** (vamos ver explicação adiante).

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte da esfera unitária S^2 é uma função meromorfa; isto é **$\Pi \circ N := g$** é meromorfa.

Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $\cdot$:

Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma **imersão conforme**, se $X_x \cdot X_y = 0$,
 $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$.

Seja **N** a **aplicação de Gauss Euclideana** (normal unitário) definida por

$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. O símbolo $\times$ refere-se ao produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Superfícies $S = X(U)$ que **minimizam** área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são **mínimas**: a **curvatura média** = semi-soma das **curvaturas principais** é **nula** (vamos ver explicação adiante).

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte da esfera unitária S^2 é uma função meromorfa; isto é **$\Pi \circ N := g$** é meromorfa.

Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $\cdot$:

Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma **imersão conforme**, se $X_x \cdot X_y = 0$,
 $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$.

Seja **N** a **aplicação de Gauss Euclideana** (normal unitário) definida por

$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. O símbolo $\times$ refere-se ao produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Superfícies $\mathbb{S} = X(U)$ que **minimizam** área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são **mínimas**: a **curvatura média** = semi-soma das **curvaturas principais** é **nula** (vamos ver explicação adiante).

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte da esfera unitária $\mathbb{S}^2$ é uma função meromorfa; isto é $\Pi \circ N := g$ é meromorfa.

Superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora considere o espaço $\mathbb{R}^3$ munido do produto escalar usual $\cdot$:

Dizemos que uma aplicação

$X : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $z \mapsto X(z)$ é uma **imersão conforme**, se $X_x \cdot X_y = 0$,
 $X_x \cdot X_x = X_y \cdot X_y \neq 0$, $\forall z \in U$.

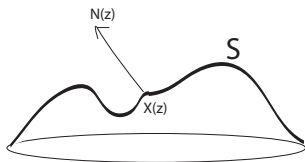
Seja **N** a **aplicação de Gauss Euclideana** (normal unitário) definida por

$N = \frac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|}$. O símbolo $\times$ refere-se ao produto vetorial de $\mathbb{R}^3$.

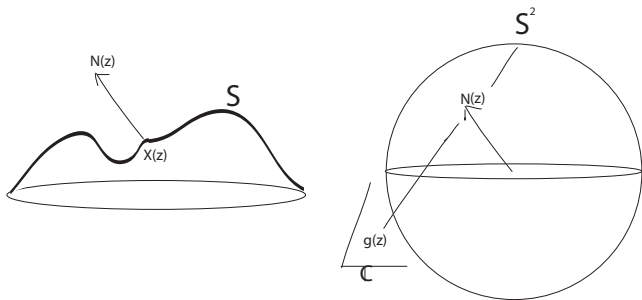
Superfícies $\mathbb{S} = X(U)$ que **minimizam** área têm sido estudadas em vários contextos. Tais superfícies são **mínimas**: a **curvatura média** = semi-soma das **curvaturas principais** é **nula** (vamos ver explicação adiante).

Uma definição equivalente mais bem ajustada ao nosso enfoque é que a composta da aplicação normal de Gauss com a aplicação estereográfica Π do pólo norte da esfera unitária $\mathbb{S}^2$ é uma função meromorfa; isto é $\Pi \circ N := g$ é meromorfa.

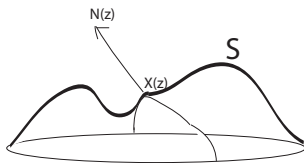
A aplicação normal de Gauss



A aplicação normal de Gauss



A curvatura média: $H = \frac{k_1 + k_2}{2}$, k_1, k_2 são as curvaturas principais. Mínima: $H = 0$



Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em $\mathbb{R}^3$

É possível mostrar que

$$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$$

é uma **imersão mínima conforme** $\iff X_{w\bar{w}} = 0$, ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são **funções harmônicas** da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme

$X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em $\mathbb{R}^3$ usando a famosa **representação de Weierstrass** $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo **integração complexa** e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em $\mathbb{R}^3$

É possível mostrar que

$$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$$

é uma **imersão mínima conforme** $\iff X_{w\bar{w}} = 0$, ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são **funções harmônicas** da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme $X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em $\mathbb{R}^3$ usando a famosa **representação de Weierstrass** $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo **integração complexa** e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em $\mathbb{R}^3$

É possível mostrar que

$$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$$

é uma **imersão mínima conforme** $\iff X_{w\bar{w}} = 0$, ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são **funções harmônicas** da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme

$X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em $\mathbb{R}^3$ usando a famosa **representação de Weierstrass** $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo *integração complexa* e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em $\mathbb{R}^3$

É possível mostrar que

$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$

é uma **imersão mínima conforme** $\iff X_{w\bar{w}} = 0$, ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são **funções harmônicas** da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme

$X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em $\mathbb{R}^3$ usando a famosa **representação de Weierstrass** $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo *integração complexa* e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Propriedade básicas de imersões mínimas conformes em $\mathbb{R}^3$

É possível mostrar que

$$X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad w \in U \mapsto X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$$

é uma **imersão mínima conforme** $\iff X_{w\overline{w}} = 0$, ou seja as coordenadas $x_1(w), x_2(w), x_3(w)$ são **funções harmônicas** da variável w .

Assim, é possível determinar uma imersão mínima conforme

$X(w) = (x_1(w), x_2(w), x_3(w))$, em $\mathbb{R}^3$ usando a famosa **representação de Weierstrass** $(g(w), f(w) dw)$.

É preciso levar em conta que $g(w)$ a aplicação normal de Gauss é **meromorfa** e que as coordenadas da imersão são funções harmônicas, fazendo *integração complexa* e lembrando que **a parte real de uma função holomorfa é harmônica**:

$$X(w) = \left(\Re \int_{w_0}^w \frac{(1-g^2)f}{2} dw, \Re i \int_{w_0}^w \frac{(1+g^2)f}{2} dw, \Re \int_{w_0}^w fg dw \right)$$

Exemplos de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

A família catenóide-helicóide : Neste caso

$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(w) = w$, $f(w)dw = e^{i\theta}/w^2 dw$, quando $\theta = 0$, obtemos o catenóide $X_0(w)$, quando $\theta = \pi/2$, obtemos o helicóide $X_{\pi/2}(w)$:

Em geral $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$ devido a representação de Weierstrass dada por

$$X_\theta = \left(\Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies **isométricas** e é chamada de **associada**. O catenóide é **conjugado** ao helicóide.

A métrica é dada por $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4|w|^4$ e não depende de θ .

Exemplos de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

A família catenóide-helicóide : Neste caso

$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(w) = w$, $f(w)dw = e^{i\theta}/w^2 dw$, quando $\theta = 0$, obtemos o catenóide $X_0(w)$, quando $\theta = \pi/2$, obtemos o helicóide $X_{\pi/2}(w)$:

Em geral $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$ devido a representação de Weierstrass dada por

$$X_\theta = \left(\Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies **isométricas** e é chamada de **associada**. O catenóide é **conjugado** ao helicóide.

A métrica é dada por $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4|w|^4$ e não depende de θ .

Exemplos de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

A família catenóide-helicóide : Neste caso

$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(w) = w$, $f(w)dw = e^{i\theta}/w^2 dw$, quando $\theta = 0$, obtemos o catenóide $X_0(w)$, quando $\theta = \pi/2$, obtemos o helicóide $X_{\pi/2}(w)$:

Em geral $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$ devido a representação de Weierstrass dada por

$$X_\theta = \left(\Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies **isométricas** e é chamada de **associada**. O catenóide é **conjugado** ao helicóide.

A métrica é dada por $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4|w|^4$ e não depende de θ .

Exemplos de superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

A família catenóide-helicóide : Neste caso

$U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $g(w) = w$, $f(w)dw = e^{i\theta}/w^2 dw$, quando $\theta = 0$, obtemos o catenóide $X_0(w)$, quando $\theta = \pi/2$, obtemos o helicóide $X_{\pi/2}(w)$:

Em geral $X_\theta(w) = \cos \theta X_0(w) + \sin \theta X_{\pi/2}(w)$ devido a representação de Weierstrass dada por

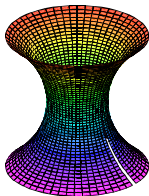
$$X_\theta = \left(\Re \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} - 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re i \int_1^w \frac{(\frac{1}{\zeta^2} + 1)e^{i\theta}}{2} d\zeta, \Re \int_1^w e^{i\theta}/\zeta d\zeta \right)$$

Tal família é constituída de superfícies **isométricas** e é chamada de **associada**. O catenóide é **conjugado** ao helicóide.

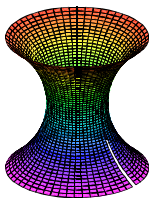
A métrica é dada por $ds^2 = (1 + 1/|w|^2)^2 |dw|^2/4|w|^4$ e não depende de θ .

A família mínima associada (isométrica) catenóide-helicóide

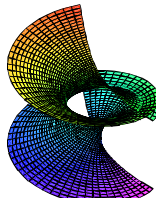
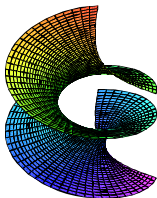
O catenóide



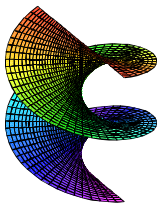
A família catenóide-helicóide



A família catenóide-helicóide



O helicóide



A equação da superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

A equação da superfície mínima satisfeita por uma função $z = u(x, y)$ definida num aberto U é uma E.D.P. quasilinear elíptica de segunda ordem dada por

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

O famoso teorema de Bernstein do início do século 20, diz que uma solução $z = u(x, y)$ da equação da superfície mínima, definida para todos os valores das variáveis x, y é linear, ou seja o gráfico de u é um plano de $\mathbb{R}^3$.

Um outro *approach* para a dedução do mesmo resultado usa o fato que a aplicação normal de Gauss $g(z)$ é meromorfa.

O teorema de Rado diz que dada uma curva retificável C de $\mathbb{R}^3$ que se projeta um a um no plano xy , sobre uma curva convexa, existe uma solução $z = u(x, y)$ da eq. da sup. mínima, tal que o bordo do gráfico de u é a curva C .

A equação da superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

A equação da superfície mínima satisfeita por uma função $z = u(x, y)$ definida num aberto U é uma E.D.P. quasilinear elíptica de segunda ordem dada por

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

O famoso teorema de Bernstein do início do século 20, diz que uma solução $z = u(x, y)$ da equação da superfície mínima, definida para todos os valores das variáveis x, y é linear, ou seja o gráfico de u é um plano de $\mathbb{R}^3$.

Um outro *approach* para a dedução do mesmo resultado usa o fato que a aplicação normal de Gauss $g(z)$ é meromorfa.

O teorema de Rado diz que dada uma curva retificável C de $\mathbb{R}^3$ que se projeta um a um no plano xy , sobre uma curva convexa, existe uma solução $z = u(x, y)$ da eq. da sup. mínima, tal que o bordo do gráfico de u é a curva C .

A equação da superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

A equação da superfície mínima satisfeita por uma função $z = u(x, y)$ definida num aberto U é uma E.D.P. quasilinear elíptica de segunda ordem dada por

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

O famoso teorema de Bernstein do início do século 20, diz que uma solução $z = u(x, y)$ da equação da superfície mínima, definida para todos os valores das variáveis x, y é linear, ou seja o gráfico de u é um plano de $\mathbb{R}^3$.

Um outro *approach* para a dedução do mesmo resultado usa o fato que a aplicação normal de Gauss $g(z)$ é meromorfa.

O teorema de Rado diz que dada uma curva retificável C de $\mathbb{R}^3$ que se projeta um a um no plano xy , sobre uma curva convexa, existe uma solução $z = u(x, y)$ da eq. da sup. mínima, tal que o bordo do gráfico de u é a curva C .

A equação da superfície mínima em $\mathbb{R}^3$

A equação da superfície mínima satisfeita por uma função $z = u(x, y)$ definida num aberto U é uma E.D.P. quasilinear elíptica de segunda ordem dada por

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0$$

O famoso teorema de Bernstein do início do século 20, diz que uma solução $z = u(x, y)$ da equação da superfície mínima, definida para todos os valores das variáveis x, y é linear, ou seja o gráfico de u é um plano de $\mathbb{R}^3$.

Um outro *approach* para a dedução do mesmo resultado usa o fato que a aplicação normal de Gauss $g(z)$ é meromorfa.

O teorema de Rado diz que dada uma curva retificável C de $\mathbb{R}^3$ que se projeta um a um no plano xy , sobre uma curva convexa, existe uma solução $z = u(x, y)$ da eq. da sup. mínima, tal que o bordo do gráfico de u é a curva C .

A superfície de Scherk

- ▶ Estudando a equação da superfície mínima, Scherk nos meados do século 18, usando o **método das separação das variáveis**, encontrou sua famosa superfície dada por

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}, \quad |x| < \pi/2, |y| < \pi/2$$

Exercício: Intua uma solução da **equação da superfície mínima** da forma $z = f(x) + g(y)$, substitua na equação da superfície mínima, e **obtenha Scherk!!**, usando as técnicas de cálculo IV-equações diferenciais elementares.

A superfície de Scherk

- ▶ Estudando a equação da superfície mínima, Scherk nos meados do século 18, usando o **método das separação das variáveis**, encontrou sua famosa superfície dada por

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}, \quad |x| < \pi/2, |y| < \pi/2$$

Exercício: Intua uma solução da **equação da superfície mínima** da forma $z = f(x) + g(y)$, substitua na equação da superfície mínima, e **obtenha Scherk!!**, usando as técnicas de cálculo IV-equações diferenciais elementares.

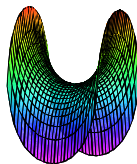
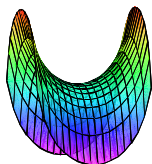
A superfície de Scherk

- ▶ Estudando a equação da superfície mínima, Scherk nos meados do século 18, usando o **método das separação das variáveis**, encontrou sua famosa superfície dada por

$$z = \log \frac{\cos y}{\cos x}, \quad |x| < \pi/2, |y| < \pi/2$$

Exercício: Intua uma solução da **equação da superfície mínima** da forma $z = f(x) + g(y)$, substitua na equação da superfície mínima, e **obtenha Scherk!!**, usando as técnicas de cálculo IV-equações diferenciais elementares.

Scherk



Parte de Scherk **minimiza área** dentre as superfícies que têm o mesmo **contorno**.



Parte de Scherk **minimiza área** dentre as superfícies que têm o mesmo **contorno**.



O que acontece em outros espaços tridimensionais ?

Visando tal entendimento, vamos estudar um pouco melhor a **geometria hiperbólica**, ou seja; estudar a geometria de $\mathbb{H}^2$.

Existe um outro modelo da geometria hiperbólica que é o modelo do **disco de Poincaré** $u^2 + v^2 < 1$ munido da métrica

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

A **isometria positiva** ou **mapeamento conforme** que leva o modelo do semi-plano $z := x + iy$ no modelo de disco $w := u + iv$ é dada pela **aplicação de Möbius**

$$w = T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

O que acontece em outros espaços tridimensionais ?

Visando tal entendimento, vamos estudar um pouco melhor a **geometria hiperbólica**, ou seja; estudar a geometria de $\mathbb{H}^2$.

Existe um outro modelo da geometria hiperbólica que é o modelo do **disco de Poincaré** $u^2 + v^2 < 1$ munido da métrica

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

A **isometria positiva** ou **mapeamento conforme** que leva o modelo do semi-plano $z := x + iy$ no modelo de disco $w := u + iv$ é dada pela **aplicação de Möbius**

$$w = T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

O que acontece em outros espaços tridimensionais ?

Visando tal entendimento, vamos estudar um pouco melhor a **geometria hiperbólica**, ou seja; estudar a geometria de $\mathbb{H}^2$.

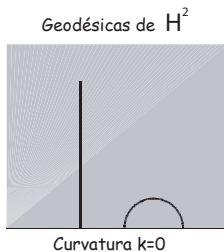
Existe um outro modelo da geometria hiperbólica que é o modelo do **disco de Poincaré** $u^2 + v^2 < 1$ munido da métrica

$$ds^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}$$

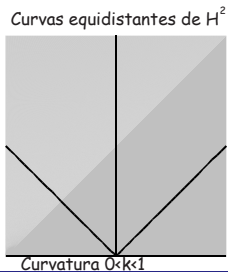
A **isometria positiva** ou **mapeamento conforme** que leva o modelo do semi-plano $z := x + iy$ no modelo de disco $w := u + iv$ é dada pela **aplicação de Möbius**

$$w = T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

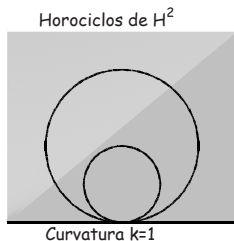
Geodésicas do plano hiperbólico



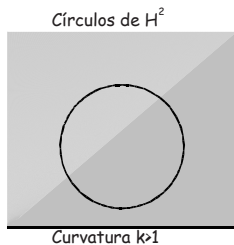
Curvas equidistantes de uma geodésica do plano hiperbólico



Horociclos do plano hiperbólico



Círculos do plano hiperbólico



Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Vamos olhar agora o **espaço hiperbólico tridimensional** $\mathbb{H}^3$

Seja $\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; \quad w > 0\}$ munido da métrica
$$\frac{1}{w^2} (du^2 + dv^2 + dw^2)$$

As superfícies totalmente umbílicas de $\mathbb{H}^3$ são as seguintes:

- ▶ **Os planos totalmente geodésicos.** Estes são os semi-planos verticais e as semi-esferas ortogonais à $\{w = 0\}$.
- ▶ **As esferas hiperbólicas.** São também esferas Euclidianas inteiramente contidas em $\mathbb{H}^3$.
- ▶ **As horosferas.** As horosferas são as esferas Euclidianas tangente à $\{w = 0\}$ e os planos Euclidianos horizontais.
- ▶ **As superfícies equidistantes.** Estas são o lugar dos pontos que estão a uma mesma distância de um plano totalmente geodésico fixado. Tais superfícies são semi-planos inclinados e calotas esféricas que fazem um ângulo $0 < \phi < \pi/2$ com $\{w = 0\}$.

Primas em $\mathbb{H}^3$ das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora gostaríamos de realçar a ligação entre as superfícies **mínimas** de $\mathbb{R}^3$ e suas **primas** em $\mathbb{H}^3$: Dada uma imersão conforme mínima $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de um domínio simplesmente conexo U em $\mathbb{R}^3$, segue de certo resultado fundamental da geometria, que podemos associar uma imersão conforme de **curvatura média 1** em $\mathbb{H}^3$ (isométrica à mínima em $\mathbb{R}^3$) ; e vice-versa

Um fato surpreendente é que a superfície **associada** no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ a certo catenóide de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície invariante por translações Euclidianas horizontais, cuja curva geradora já tinha sido estudada por **Poleni** em **1729**. Tal curva é conhecida como **courbe des forçats**.

Primas em $\mathbb{H}^3$ das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora gostaríamos de realçar a ligação entre as superfícies **mínimas** de $\mathbb{R}^3$ e suas **primas** em $\mathbb{H}^3$: Dada uma imersão conforme mínima $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de um domínio simplesmente conexo U em $\mathbb{R}^3$, segue de certo resultado fundamental da geometria, que podemos associar uma imersão conforme de **curvatura média 1** em $\mathbb{H}^3$ (isométrica à mínima em $\mathbb{R}^3$) ; e vice-versa

Um fato surpreendente é que a superfície **associada** no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ a certo catenóide de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície invariante por translações Euclidianas horizontais, cuja curva geradora já tinha sido estudada por **Poleni** em **1729**. Tal curva é conhecida como **courbe des forçats**.

Primas em $\mathbb{H}^3$ das superfícies mínimas de $\mathbb{R}^3$

Agora gostaríamos de realçar a ligação entre as superfícies **mínimas** de $\mathbb{R}^3$ e suas **primas** em $\mathbb{H}^3$: Dada uma imersão conforme mínima $X : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$, de um domínio simplesmente conexo U em $\mathbb{R}^3$, segue de certo resultado fundamental da geometria, que podemos associar uma imersão conforme de **curvatura média 1** em $\mathbb{H}^3$ (isométrica à mínima em $\mathbb{R}^3$) ; e vice-versa

Um fato surpreendente é que a superfície **associada** no espaço hiperbólico tridimensional $\mathbb{H}^3$ a certo catenóide de $\mathbb{R}^3$ é uma superfície invariante por translações Euclidianas horizontais, cuja curva geradora já tinha sido estudada por **Poleni** em **1729**. Tal curva é conhecida como **courbe des forçats**.

A curva de Poleni $u = s - 2 \tanh s$, $w = 2 / \cosh s$, e a prima do catenóide em $\mathbb{H}^3$



A curva de Poleni $u = s - 2 \tanh s$, $w = 2/\cosh s$, e a prima do catenóide em $\mathbb{H}^3$

