MAT1154 (Eqs. Diferenciais e de Diferenças) – Prova 3 – 30/11/2010

Nome: _____

Matrícula: _____ Turma: 33 _____

Cabeçalho mal-preenchido implica perda de meio ponto! Calculadora e celular são proibidos. Justifique as questões de forma clara. Escreva as respostas finais ***a caneta****.*

Questão	1	2	3	4	5	Total
Valor:	2½	3	1	2	1½	10
Nota:						

1ª parte: o MAPLE estará disponível por 30 min.

1. [2 ½ pt] Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-cy} + c\sin(0.5x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = 6\sqrt{1-cy} + \frac{1.4cx + 3y}{\cos x} - 6$$

(Observe que a origem é um ponto de equilíbrio para qualquer valor do parâmetro c.)

Determine todos os valores do parâmetro c para os quais podemos garantir que a origem é um ponto de equilíbrio *atrator*.

Dê respostas numéricas com pelo menos 4 *dígitos significativos.*

Aviso!

Na prova que foi aplicada estava faltando o $\boxed{-6}$ na segunda equação e assim não era verdade que a origem era ponto de equilíbrio.

Em vista disto, esta questão será **anulada**, e a pontuação das demais questões será multiplicada por 4/3.

Peço desculpas pelo erro. Jairo.

MAT1154 (Eqs. Diferenciais e de Diferenças) – Prova 3 – 30/11/2010

Nome: _____

Matrícula: _____ Turma: 33 _____

Cabeçalho mal-preenchido implica perda de meio ponto! Calculadora e celular são proibidos. Justifique as questões de forma clara. Escreva as respostas finais ***a caneta****.*

$\boxed{2^{\text{a}} \text{ parte: sem MAPLE.}}$

2. [3 pt] Encontre a solução do problema de valor inicial abaixo. Você pode usar o método da sua preferência (desde que correto).

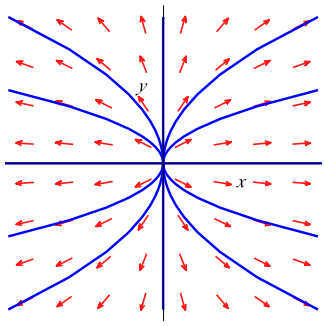
$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -3y_1(t) + 2y_2(t), \qquad & y_1(0) &= 1, \\ y_2'(t) &= 6y_1(t) + y_2(t), \qquad & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

3. [1 pt]

O desenho ao lado mostra o campo de direções e algumas soluções do sistema linear

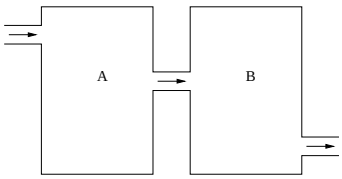
$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Escreva uma possível matriz A. Justifique.



4. Inicialmente o tanque A da figura contém 90 litros de uma solução contendo $180g$ de sal, e o tanque B contém 90 litros de água pura (sem sal).

Há três torneiras, todas com vazão de $9\ell/h$: a 1ª injeta água pura no tanque A, a 2ª bombeia a mistura do tanque A para o tanque B, e a 3ª joga fora a mistura do tanque B.



Indique por $x(t)$ e $y(t)$ as quantidades de sal (em gramas) após t horas nos tanques A e B, respectivamente.

(a) [1 pt] Modele este problema através de um sistema de EDO's e condições iniciais.

(b) [1 pt] Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$.

5. Diga se cada uma das afirmações abaixo é Verdadeira ou Falsa, e *justifique* (provando ou dando contraexemplo). *Marque* ***a caneta*** *se sua resposta é* ***V*** *ou* ***F****, sob pena de tê-la desconsiderada.* Em cada item, *se assume que A é uma matriz real* 2×2.

(a) [½ pt] Se e^A é a matriz identidade então necessariamente A é a matriz nula.

(b) [½ pt] Se A tem pelo menos um autovalor positivo então o sistema $Y' = AY$ tem uma solução $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ tal que os limites $\lim_{t\to+\infty} |y_1(t)|$ e $\lim_{t\to+\infty} |y_2(t)|$ são ambos infinitos.

(c) [½ pt] Se $\det A \neq 0$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ é constante, então podemos concluir que o sistema (autônomo linear não-homogêneo) $Y' = AY + B$ tem alguma solução constante (isto é, um ponto de equilíbrio).