MAT1154 (Eqs. Diferenciais e de Diferenças) – Prova 1 – 10/09/2010

Nome: _____

1. [2½ pt] QUESTÃO COM MAPLE.

   Considere o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0.4x^3 + 1.2x^2 + 5.2x + 0.1 - 0.3y^2 - 0.6y + 2xy \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

   Encontre um valor de y_0 entre -5 e 5 para o qual o PVI tem uma solução tal que

$$y(-3) < -10 \quad \text{e} \quad y(3) > 10.$$

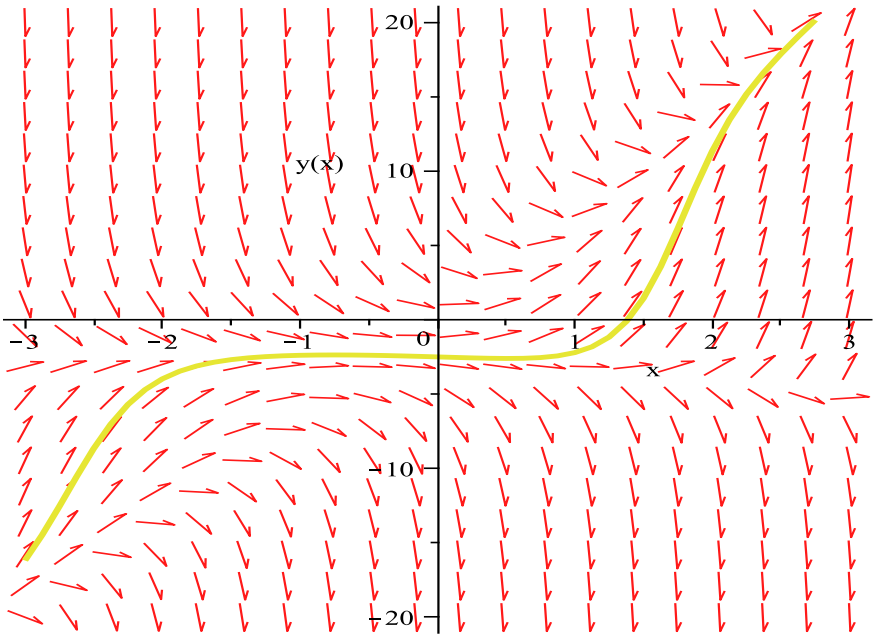
   Escreva uma sequência de comandos do Maple que permita confirmar que o seu valor de y_0 satisfaz os requerimentos.

Resolução: Após algumas tentativas e erros, descobre-se que qualquer valor de y_0 entre -2.4 e -2.6 funciona. A sequência de comandos abaixo confirma que $\boxed{y_0 = -2.5}$ funciona:

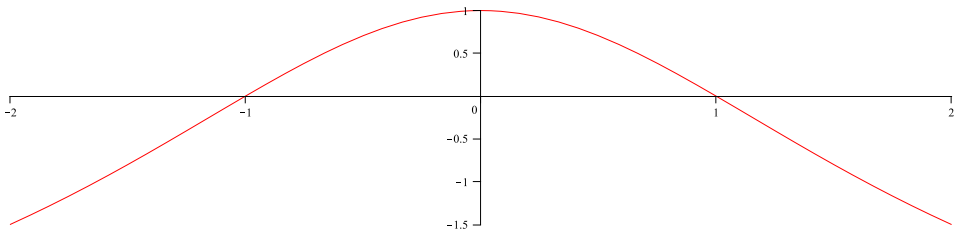
```
> with(plots):
> with(DEtools):
> edo:=diff(y(x),x)=0.1+.4*x^3+1.2*x^2+5.2*x-.3*y(x)^2-.6*y(x)+2*x*y(x);
```

$$edo := \frac{d}{dx}y(x) = 0.1 + 0.4\,x^3 + 1.2\,x^2 + 5.2\,x - 0.3\,(y(x))^2 - 0.6\,y(x) + 2\,xy(x)$$

```
> DEplot(edo,y(x),x=-3..3,y=-20..20, [y(0)=-2.5]);
```



2. Uma função f tem o gráfico abaixo:



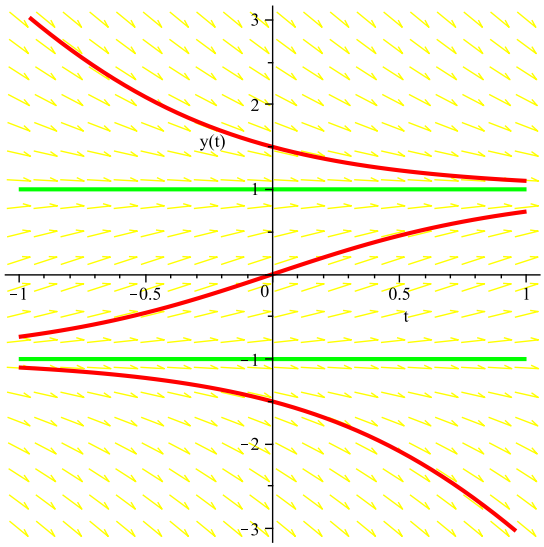
Considere a equação diferencial $\dfrac{dy}{dt} = f(y)$.

(a) [½ pt] Esta equação tem soluções da forma $y(t) = y_0$ (constantes)? Quais?

> **Resolução:** Sim; são as soluções $\boxed{y(t) = -1}$ e $\boxed{y(t) = 1}$. De fato, para que $y(t) = y_0$ seja solução, é necessário e suficiente que $f(y_0) = 0$.
> Obs.: Essas soluções são equilíbrios instável e estável, respectivamente.

(b) [1 pt] Esboce no plano ty as soluções para os seguintes valores iniciais:

$$y(0) = -1.5, \quad y(0) = 0, \quad y(0) = 1.5.$$

> **Resolução:**
>
> 
>
>
> Obs.: Não é necessário desenhar as flechas (amarelas), ou as soluções de equilíbrio (verdes).

3. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = t - y.$$

(a) [1 ½ pt] Encontre a solução geral.

Resolução: Esta é uma EDO de 1ª ordem linear não-homogênea. O fator integrante é (pela fórmula)

$$\mu = e^{\int 1dt} = e^t.$$

Multiplicando por μ a equação fica:

$$\underbrace{e^t \frac{dy}{dt} + e^t y}_{\frac{d}{dt}(e^t y)} = te^t.$$

Integrando dos dois lados:

$$e^t y = \int te^t \, dt.$$

Integrando por partes:

$$\int \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^t \, dt}_{dv} = \underbrace{t}_{u} \underbrace{e^t}_{v} - \int \underbrace{e^t}_{v} \underbrace{dt}_{du} = te^t - e^t + c.$$

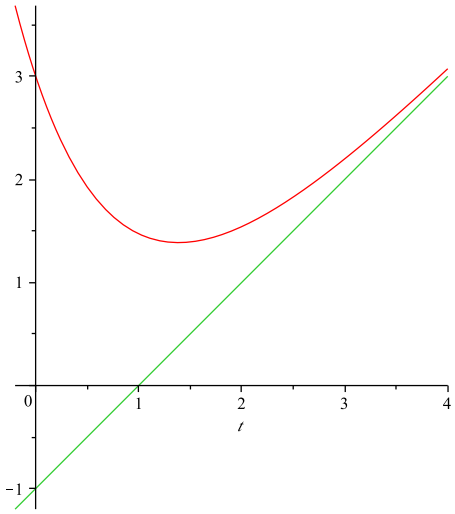
Dividindo por μ, encontramos a solução geral:

$$\boxed{y = t - 1 + ce^{-t}}$$

Obs.: A solução poderia ter sido encontrada de outras maneiras; por exemplo, pelo método dos coeficientes a determinar.

(b) [½ pt] Determine a solução que satisfaz a condição inicial $y(0) = 3$, e esboce seu gráfico.

Resolução: Substituindo $t = 0$, $y = 3$ na solução geral, temos $3 = 0 - 1 + ce^{-0}$, isto é, $c = 4$. Logo a solução é $\boxed{y = t - 1 + 4e^{-t}}$. O gráfico da solução está acima da reta $y = t - 1$, se aproxima da reta a medida que t cresce, e se afasta quando t decresce.



4. [2 pt] Encontre a solução geral da equação

$$2tyy'(t) = \cos t - y^2$$

Resolução: A EDO não é linear nem separável; vamos torcer para que seja exata, isto é, da forma $\frac{d}{dt}\psi(t,y) = 0$, ou seja (pela regra da cadeia do Cálculo II) $0 = \frac{d}{dt}\psi(t,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial t}$. A EDO dada é $M\frac{dy}{dt} + N = 0$ com $M = 2ty$ e $N = -\cos t + y^2$. Fazemos o teste para ver se a EDO é exata: $(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial t})$:

$$\frac{\partial M}{\partial t} \stackrel{?}{=} \frac{\partial N}{\partial y}$$
$$2y \stackrel{?}{=} 2y$$

Que sorte! A equação dada é exata. Agora vamos encontrar a função ψ. Devemos ter

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = M = 2ty \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial t} = N = -\cos t + y^2 \end{cases}$$

Integrando a primeira equação, temos $\psi(t,y) = ty^2 + \phi(t)$. Substituindo na segunda, temos $y^2 + \phi'(t) = -\cos t + y^2$, logo $\phi(t) = -\int \cos t\, dt = -\sin t$ (a constante de integração não é necessária aqui) e $\psi(t,y) = ty^2 - \sin t$. Portanto a solução geral da EDO é $\boxed{ty^2 - \sin t = c}$ (na forma implícita). Neste caso, se quisermos, podemos isolar y em função de t; a solução é $\boxed{y = \pm\sqrt{\dfrac{c + \sin t}{t}}}$.

5. [2 pt] Um corpo tem temperatura $u = u(t)$ no instante t, e está imerso em um ambiente cuja temperatura é mantida constante igual a u_a. A lei do resfriamento de Newton diz que a taxa de variação de u é proporcional à diferença $u - u_a$, isto é,

$$\frac{du}{dt} = -k(u - u_a), \quad \text{onde } k > 0 \text{ é uma constante.}$$

À meia-noite (00:00:00), colocamos um corpo aquecido a 120°C em um ambiente cuja temperatura é mantida constante em 30°C. Às 00:05:00 medimos a temperatura do corpo, encontrando 90°C. Quando a temperatura do corpo vai atingir 45°C?

Resolução: A EDO é linear e também separável; podemos resolvê-la de diversas formas. Por exemplo:

$$\int \frac{du}{u - u_a} = \int -k dt$$
$$\ln|u - u_a| = -kt + c_0$$
$$u(t) = u_a + ce^{-kt} \qquad (c = \pm e^{c_0})$$

Sejam u, u_a medidos em °C, t medido em segundos. Substituindo $u_a = 30$, $u(0) = 120$ e $u(5) = 90$, temos

$$120 = 30 + ce^0$$
$$90 = 30 + ce^{-5k}$$

Portanto $c = 90$ e $k = -(1/5)\ln(60/90) = (1/5)\ln(3/2)$. Queremos encontrar t tal que $u(t) = u_a + ce^{-kt} = 45$. Portanto a resposta é que o corpo atingirá 45°C t minutos após a meia noite, onde

$$t = -\frac{1}{k}\ln\frac{15}{90} = \frac{5\ln 6}{\ln(3/2)} = 22.095,$$

isto é, às $\boxed{\text{00:22:06}}$.