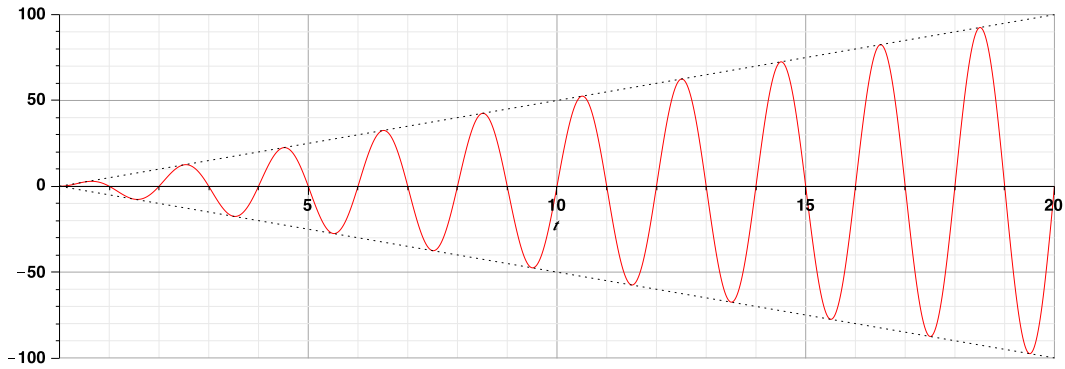
MAT1154 (Eqs. Diferenciais e de Diferenças) – Prova 2 – 19/10/2010

1. [2 pt] Considere a função $y_1(t)$ que tem o seguinte gráfico:



Escreva uma EDO de 2ª ordem linear com coeficientes constantes

$$my'' + \gamma y' + ky = f(t), \qquad \text{onde } f(t) \text{ é alguma função } \textit{periódica}$$

que tenha como uma de suas soluções a função $y = y_1(t)$. Justifique sua resposta!

Use o Maple *se julgar necessário.*

Obs: Sua resposta deve dar valores para as constantes m, γ, k, e uma fórmula para $f(t)$.

Resolução: Este tipo de gráfico foi visto em aula (na planilha resson.mw, por exemplo): é um possível movimento de um sistema massa-mola em ressonância. A função y_1 é do tipo linear vezes periódica, mais precisamente, $at\,\mathrm{sen}(bt + c)$. Como o gráfico às vezes toca as retas $y = \pm 5t$, temos $a = 5$. Além disso, como y_1 se anula apenas para os valores inteiros de t, temos $b = \pi$ e $c = 0$. Ou seja, $y_1 = 5t\,\mathrm{sen}(\pi t)$. (Essa função também poderia ser encontrada por tentativa-e-erro usando o plot do Maple.)

Lembramos que para haver ressonância desse tipo, é necessário que:

- Não haja atrito: $\boxed{\gamma = 0}$.
- A força externa $f(t)$ deve ter frequência angular igual à frequência angular natural do sistema, que é $\omega = \sqrt{k/m}$.

Além disso, quando ocorre ressonância, o b acima também será igual a ω. Portanto $\omega = \pi$. Podemos escolher $\boxed{m = 1}$ (dividindo tudo por uma constante), logo temos $\boxed{k = \pi^2}$.

A função y_1 é solução da equação diferencial, portanto podemos encontrar $f(t)$ por substituição:

$$\begin{aligned} f(t) &= y_1'' + \pi^2 y_1 \\ &= [10\pi \cos \pi t - 5\pi^2 \,\mathrm{sen}\, \pi t] + \pi^2 [5t \,\mathrm{sen}\, \pi t] \\ &= \boxed{10\pi \cos \pi t}. \end{aligned}$$

Esta é uma função periódica, como exigido. Assim, a resposta é $\boxed{y'' + \pi^2 y = 10\pi \cos(\pi t)}$. (As únicas outras respostas válidas são a acima vezes constante.)

Outra resolução: É possível resolver o problema sem conhecer nada de ressonância, massa-mola etc; basta que se consiga identificar a função $y_1 = 5t\,\mathrm{sen}(\pi t)$. Aí calculamos (com o Maple, por exemplo):

$$\begin{aligned} f(t) &= my_1'' + \gamma y_1' + ky_1 \\ &= \Big[\underbrace{(-5\pi^2 m + 5k)}_{0}\,\mathrm{sen}(\pi t) + \underbrace{5\pi\gamma}_{0}\cos(\pi t)\Big]t + 10\pi m\cos(\pi t) + 5\gamma\,\mathrm{sen}(\pi t). \end{aligned}$$

Para que a função $f(t)$ seja periódica, como exigido, é necessário que a parte entre [ ] se anule, isto é, $-5\pi^2 m + 5k = 0$ e $5\pi\gamma = 0$. Logo $k = \pi^2 m$, $\gamma = 0$ e $f(t) = 10\pi m\cos(\pi t)$. Escolhendo por exemplo $m = 1$, chegamos na mesma resposta de antes. (*Obs:* não vale escolher $m = 0$, pois o enunciado pede que a EDO seja de 2ª ordem.)

2. (a) [2 pt] Resolva o problema de valor inicial (PVI):

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Resolução: A EDO é de 2ª ordem, linear com coeficientes constantes, homogênea. A equação característica é $r^2 + 4r + 3 = 0$. Resolvendo por Báscara, encontramos as raízes $r = -1$ e $r = -3$. Logo a solução geral é $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t}$.
Agora vamos usar as condições iniciais para encontrar c_1 e c_2. Temos

$$y' = -c_1e^{-t} - 3c_2e^{-3t}.$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_1 + c_2 \\ 2 &= y'(0) = -c_1 - 3c_2 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema linear, encontramos $c_1 = 5/2$ e $c_2 = -3/2$. Portanto a resposta é $\boxed{y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t}}$.

(b) [1 ½ pt] Encontre a solução geral de $y'' + 4y' + 3y = \mathrm{sen}\,t$.

Resolução: Agora temos uma equação não-homogênea de uma espécie que pode ser resolvida pelo método do coeficientes a determinar. Chutamos uma solução particular do tipo $y = a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t$. Temos

$$\begin{aligned} y &= a\cos t + b\,\mathrm{sen}\,t \\ y' &= b\cos t - a\,\mathrm{sen}\,t \\ y'' &= -a\cos t - b\,\mathrm{sen}\,t \\ y'' + 4y' + 3y &= \underbrace{(-a + 4b + 3a)}_{0}\cos t + \underbrace{(-b - 4a + 3b)}_{1}\,\mathrm{sen}\,t \end{aligned}$$

Chegamos no sistema linear

$$\begin{aligned} 2a + 4b &= 0 \\ -4a + 2b &= 1 \end{aligned}$$

que resolvido dá $a = -1/5$, $b = 1/10$. Está encontrada uma solução particular, a saber, $y = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} t$. Para encontrar a solução geral da EDO em questão, temos que somar à esta solução particular a solução geral da equação homogênea associada ($y'' + 4y' + 3y = 0$), a qual foi encontrada no item anterior. Portanto a resposta é $\boxed{y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} t}$.

(c) [1 pt] Responda: A equação diferencial do item anterior possui uma solução da forma $y(t) = A\operatorname{sen}(\omega t - \delta)$? Em caso positivo, determine os valores de A e ω. (Não precisa encontrar δ.)

Resolução: $\boxed{\text{Sim}}$. Tomando $c_1 = c_2 = 0$ para sumir com as exponenciais, temos $y = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} t$. Foi visto em aula que tal função pode ser escrita na forma $A\operatorname{sen}(t - \delta)$, e A é dado pela "fórmula da hipotenusa de Pitágoras":

$$A = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Assim, a resposta é $\boxed{A = \frac{\sqrt{5}}{10}}$, $\boxed{\omega = 1}$.

3. [2 pt] Determine a solução geral de

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t} \qquad \text{(assumindo } t > 0\text{)}.$$

Resolução: Esta EDO é de 2ª ordem, linear com coeficientes constantes, não-homogênea. A função $\frac{e^t}{t}$ não se encaixa no método dos coeficientes a determinar, assim teremos que usar o método da variação dos parâmetros.

Para começar, precisamos resolver a equação homogênea $y'' - 2y' + y = 0$. A equação característica é $r^2 - 2r + 1 = 0$, que tem raiz dupla $r = 1$. Portanto uma conjunto fundamental de soluções é $y_1 = e^t$, $y_2 = te^t$. O wronskiano desse par de soluções é

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & e^t \\ te^t & (1+t)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

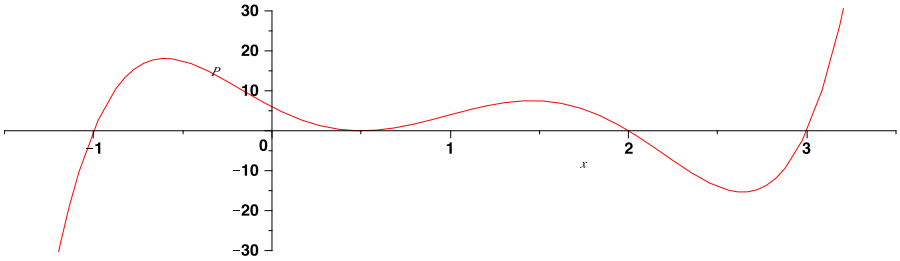
Agora, é só aplicar as fórmulas de variação dos parâmetros: Temos $g(t) = \frac{e^t}{t}$ (note que o coeficiente de y'' na EDO já é 1). A solução geral é $y = u_1 y_1 + u_2 y_2$ onde

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{y_2 g}{W}\,dt = -\int te^t \cdot \frac{e^t}{t} \cdot \frac{1}{e^{2t}}\,dt = -\int dt = -t + c_1 \\ u_2 &= \int \frac{y_1 g}{W}\,dt = \int e^t \cdot \frac{e^t}{t} \cdot \frac{1}{e^{2t}}\,dt = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c_2 \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

Logo a resposta é $\boxed{y = (-t + c_1)e^t + (\ln t + c_2)te^t}$.

Obs: Isto pode ser escrito de maneira ligeiramente mais limpa assim: $y = te^t \ln t + c_1 e^t + c_2 te^t$ (alterando o c_2).

4. Observe o gráfico da função polinomial $P(x) = 4x^5 - 20x^4 + 21x^3 + 16x^2 - 23x + 6$:



(a) [1 pt] Responda: Qual a solução geral da equação diferencial $4y^{(5)} - 20y^{(4)} + 21y''' + 16y'' - 23y' + 6y = 0$?

Resolução: Esta EDO é de 5ª ordem, linear com coeficientes constantes, homogênea. A equação característica é $P(r) = 0$. Olhando o gráfico do polinômio P, vemos que ele tem raízes simples -1, 2 e 3, além de uma raiz dupla $1/2$. Como a raiz dupla "vale por duas", já encontramos 5 raízes, todas reais. Como o grau do polinômio é 5, não há raízes complexas (não-reais). Pela teoria, a solução geral é

$$\boxed{y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} + c_4 e^{t/2} + c_5 t e^{t/2}}$$

(b) [½ pt] Encontre, se possível, alguma solução $y(t)$ da equação do item anterior tal que $y(0) = 6$ e $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Resolução: Olhando a solução geral, vemos que o limite de $y(t)$ quando $t \to +\infty$ só será 0 se $c_2 = c_3 = c_4 = c_5 = 0$, isto é, $y = c_1 e^{-t}$. Agora, para ter $y(0) = 6$ é só colocar $c_1 = 6$. Portanto a resposta é $\boxed{y = 6e^{-t}}$.