MAT1154 (Eqs. Diferenciais e de Diferenças) – Prova 3 – 30/11/2010

1. [2 ½ pt] Considere o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1-cy} + c\sin(0.5x - y)$$
$$\frac{dy}{dt} = 6\sqrt{1-cy} + \frac{1.4cx + 3y}{\cos x} - 6$$

(Observe que a origem é um ponto de equilíbrio para qualquer valor do parâmetro c.)

Determine todos os valores do parâmetro c para os quais podemos garantir que a origem é um ponto de equilíbrio *atrator*.

Dê respostas numéricas com pelo menos 4 dígitos significativos.

Resolução:

```
> with(LinearAlgebra):
> F:=x/(1-c*y) + c*sin(.5*x-y):
> G:=6*sqrt(1-c*y)+(1.4*c*x+3*y)/cos(x)-6:
```

A matriz jacobiana geral é:

```
> J:=Matrix([[diff(F,x),diff(F,y)],[diff(G,x),diff(G,y)]]);
```

$$J := \begin{bmatrix} (1-cy)^{-1} + 0.5\,c\cos(0.5\,x - y) & \frac{cx}{(1-cy)^2} - c\cos(0.5\,x - y) \\ 1.4\,\frac{c}{\cos(x)} + \frac{(1.4\,cx + 3\,y)\sin(x)}{(\cos(x))^2} & -3\,\frac{c}{\sqrt{1-cy}} + 3\,(\cos(x))^{-1} \end{bmatrix}$$

A matriz jacobiana no ponto de equilíbrio (0,0) é:

```
> J0:=subs(x=0,y=0,J);
```

$$J0 := \begin{bmatrix} 1 + 0.5\,c & -c \\ 1.4\,c & -3\,c + 3 \end{bmatrix}$$

O ponto de equilíbrio será ATRATOR se *AMBOS os autovalores de J0 tiverem PARTE REAL NEGATIVA.*

Normalmente os autovalores são um pouco chatos de serem analisados (podem ser reais ou complexos...) Fica mais simples usar a seguinte condição, que é equivalente à condição acima: que *J0 tenha DETERMINANTE POSITIVO e TRAÇO NEGATIVO.*

```
> d:=Determinant(J0); t:=Trace(J0);
```

$$d := -1.5\,c + 3 - 0.1\,c^2$$
$$t := 4 - 2.5\,c$$

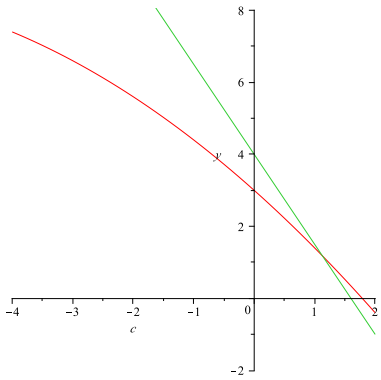
```
> solve(d=0);
```

$$-16.78708781,\ 1.787087811$$

```
> solve(t=0);
```

$$1.600000000$$

```
> plot([d,t],c=-4..2, y=-2..8);
```



Vemos que $d > 0$ no intervalo $-16.787 < c < 1.787$ e que $t < 0$ no intervalo $c > 1.6$. Conclusão: A origem é um ponto de equilíbrio atrator se $\boxed{1.600 < c < 1.787}$ [Além disso, certamente a origem *não* é um atrator se $c < 1.6$ ou $c > 1.787$; para os pontos de fronteira a análise é mais complicada e não sabemos fazê-la.]

2. [3 pt] Encontre a solução do problema de valor inicial abaixo. Você pode usar o método da sua preferência (desde que correto).

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -3y_1(t) + 2y_2(t), \qquad & y_1(0) &= 1, \\ y_2'(t) &= 6y_1(t) + y_2(t), \qquad & y_2(0) &= 1. \end{aligned}$$

Resolução: (com matriz exponencial e cálculo funcional) Seja $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$.

O PVI pode ser escrito como:

$$Y' = AY, \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{onde} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos os autovalores de A: O polinômio característico é $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -5$.

A solução do PVI será $Y(t) = e^{tA} \cdot Y(0)$. Vamos encontrar e^{tA} pelo Cálculo Funcional. Seja $f(x) = e^{tx}$ (considerando t fixo). Temos que encontrar um polinômio de 1º grau $p(x) = ax + b$ tal que $p(\lambda_1) = f(\lambda_1)$ e $p(\lambda_2) = f(\lambda_2)$, isto é,

$$\begin{aligned} 3a + b &= e^{3t} \\ -5a + b &= e^{-5t} \end{aligned}$$

Resolvendo, temos

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{8}e^{3t} - \tfrac{1}{8}e^{-5t}, \\ b &= \tfrac{5}{8}e^{3t} + \tfrac{3}{8}e^{-5t} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} e^{tA} = f(A) = p(A) = aA + b\mathrm{Id} &= \left(\tfrac{1}{8}e^{3t} - \tfrac{1}{8}e^{-5t}\right)\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} + \left(\tfrac{5}{8}e^{3t} + \tfrac{3}{8}e^{-5t}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{3t} + \frac{3}{4}e^{-5t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-5t} \\ \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{3}{4}e^{-5t} & \frac{3}{4}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-5t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim a solução do PVI é

$$Y(t) = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \end{pmatrix}}$$

Resolução: (com autovetores, sem matriz exponencial) Depois de encontrados os autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -5$, efetuamos o cálculo dos autovetores (omitido aqui), encontrando:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{respectivamente.}$$

A solução geral é $Y(t) = c_1 e^{3t} v_1 + c_2 e^{-5t} v_2$. Para que a condição inicial seja satisfeita, devemos ter

$$Y(0) = c_1 v_1 + c_2 v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{isto é,}$$

$$c_1 - c_2 = 1$$
$$3c_1 + c_2 = 1$$

Resolvendo, encontramos $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$. Portanto

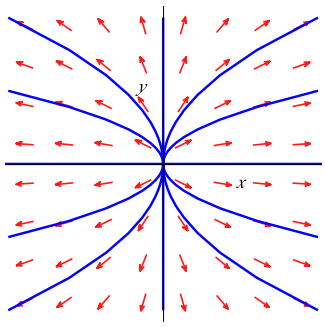
$$Y(t) = \tfrac{1}{2}e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{2}e^{5t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-5t} \\ \frac{3}{2}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{-5t} \end{pmatrix}}$$

3. [1 pt]

O desenho ao lado mostra o campo de direções e algumas soluções do sistema linear

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

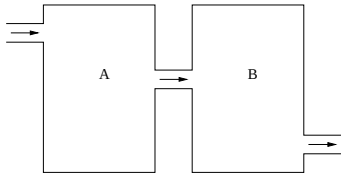
Escreva uma possível matriz A. Justifique.



Resolução: Há um par de retas contendo soluções: os eixos x e y. Essas retas indicam as direções dos autovetores de A. Logo a matriz deve ser diagonal, isto é, $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. As soluções são da forma $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$. Como a origem é um ponto de equilíbrio REPULSOR, ambos os autovalores λ_1 e λ_2 devem ser $\boxed{\text{positivos}}$. Vemos do desenho que, para cada solução fora das retas, $|x(t)|$ fica muito menor que $|y(t)|$ quando $t \to -\infty$. Logo $\boxed{\lambda_1 > \lambda_2}$. Assim, uma possível resposta é $\boxed{A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. (De fato, esta é a matriz que foi usada para gerar o gráfico.)

4. Inicialmente o tanque A da figura contém 90 litros de uma solução contendo $180g$ de sal, e o tanque B contém 90 litros de água pura (sem sal).

Há três torneiras, todas com vazão de $9\ell/h$: a 1ª injeta água pura no tanque A, a 2ª bombeia a mistura do tanque A para o tanque B, e a 3ª joga fora a mistura do tanque B.



Indique por $x(t)$ e $y(t)$ as quantidades de sal (em gramas) após t horas nos tanques A e B, respectivamente.

(a) [1 pt] Modele este problema através de um sistema de EDO's e condições iniciais.

Resolução: Como todas as torneiras têm a mesma vazão, a quantidade de líquido nos tanques permanece constante em 90ℓ cada. Pela 2ª torneira passam $9\ell/h$ da solução do tanque A. Cada litro dessa solução contém $x/90$ gramas de sal. Logo a taxa instantânea de passagem da sal pela 1ª torneira é $y/10$ gramas por hora. Analogamente, para a 3ª torneira a taxa é de $x/10$ gramas por hora. Colocando sinais negativos para saídas e positivos para entradas, temos a resposta:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{x}{10} & x(0) &= 180, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x}{10} - \frac{y}{10} & y(0) &= 0. \end{aligned}$$

(b) [1 pt] Determine as funções $x(t)$ e $y(t)$.

Resolução: A matriz do sistema é $A = \begin{pmatrix} -1/10 & 0 \\ 1/10 & -1/10 \end{pmatrix}$, que (por ser triangular) tem autovalor duplo $\lambda = -1/10$.
Vamos encontrar e^{tA} pelo cálculo funcional. Seja $f(x) = e^{tx}$ (t fixo). Temos que encontrar um polinômio de 1º grau $p(x) = ax + b$ tal que $p(-1/10) = f(-1/10)$ e $p'(-1/10) = f'(-1/10)$, isto é,

$$\begin{aligned} -a/10 + b &= e^{-t/10}, \\ a &= te^{-t/10}. \end{aligned}$$

Logo $b = e^{-t/10} + (1/10)te^{t/10}$ e

$$\begin{aligned} e^{tA} = f(A) = p(A) = aA + b\mathrm{Id} &= te^{-t/10} \begin{pmatrix} -1/10 & 0 \\ 1/10 & -1/10 \end{pmatrix} \\ &+ (e^{-t/10} + (1/10)te^{-t/10}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{-t/10} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t/10 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A solução do PVI é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 180e^{-t/10} \\ 18te^{-t/10} \end{pmatrix}}$$

Obs: O PVI também poderia ser resolvido com os métodos da P1: A 1ª equação não envolve y assim podemos resolvê-la e encontrar $x(t)$. Depois substituímos $x(t)$ na segunda equação e obtemos uma EDO linear não-homogênea para $y(t)$, que também pode ser facilmente resolvida.

5. Diga se cada uma das afirmações abaixo é Verdadeira ou Falsa, e *justifique* (provando ou dando contraexemplo). *Marque* ***a caneta*** *se sua resposta é* ***V*** *ou* ***F****, sob pena de tê-la desconsiderada.* Em cada item, *se assume que A é uma matriz real* 2×2.

(a) [½ pt] Se e^A é a matriz identidade então necessariamente A é a matriz nula.

Resolução: $\boxed{\text{Falso}}$. Para encontrar um exemplo, lembramos que as soluções do sistema $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ são todas periódicas com período $t = 2\pi$. Portanto a exponencial da matriz não-nula $\boxed{A = 2\pi \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ é a matriz identidade.

Outra maneira de chegar numa resposta: Façamos uma espécie de Cálculo Funcional "reverso": Queremos encontrar (se existir) uma matriz $A \neq 0$ tal que $e^A = \mathrm{Id}$, isto é, $f(A) = p(A)$ onde $f(x) = e^x$ e $p(x) = 1$. Isso daria certo se A tivesse autovalores $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tais que $f(\lambda_1) = p(\lambda_1)$ e $f(\lambda_2) = p(\lambda_2)$, isto é $e^{\lambda_1} = e^{\lambda_2} = 1$. Por exemplo, daria certo se os autovalores fossem $\pm 2\pi i$. Certamente existe uma matriz com esses autovalores: por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi \\ -2\pi & 0 \end{pmatrix}$. Portanto, a afirmação é $\boxed{\text{falsa}}$.

(b) [½ pt] Se A tem pelo menos um autovalor positivo então o sistema $Y' = AY$ tem uma solução $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ tal que os limites $\lim_{t \to +\infty} |y_1(t)|$ e $\lim_{t \to +\infty} |y_2(t)|$ são ambos infinitos.

Resolução: $\boxed{\text{Falso}}$. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ então A tem um autovalor positivo, mas as soluções do sistema são da forma $y_1(t) = c_1 e^t$, $y_2(t) = c_2 e^{-t}$, e para qualquer solução o limite $\lim_{t \to +\infty} |y_2(t)|$ será zero, e não infinito como afirmado.

Obs: A afirmação seria verdadeira se contivesse a hipótese adicional de que o autovetor correspondente ao autovalor positivo não está contido em algum dos eixos de coordenadas.

(c) [½ pt] Se $\det A \neq 0$ e $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ é constante, então podemos concluir que o sistema (autônomo linear não-homogêneo) $Y' = AY + B$ tem alguma solução constante (isto é, um ponto de equilíbrio).

Resolução: Uma solução constante deve satisfazer $Y' = 0$, isto é, $AY + B = 0$. Escrevendo $AY = -B$ e multiplicando os dois lados à esquerda por A^{-1} obtemos $\boxed{Y = -A^{-1}B}$. Esta é uma solução constante. Concluímos que a afirmação é $\boxed{\text{verdadeira}}$.