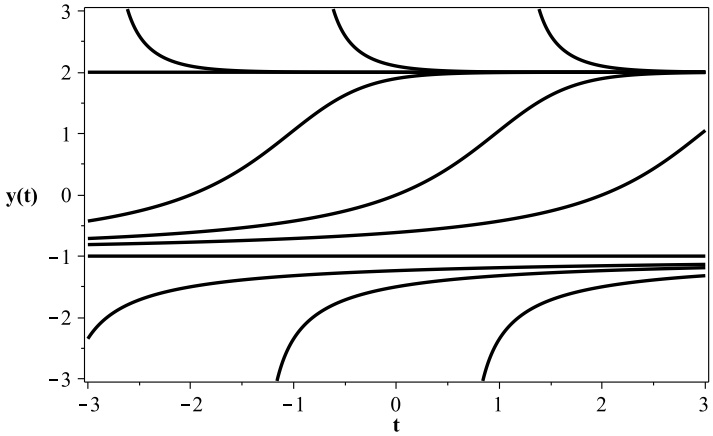
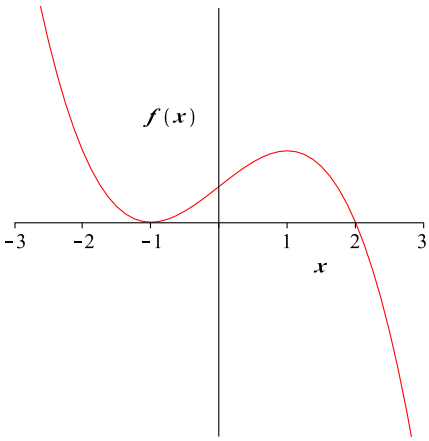
1. [1½ pt] A equação diferencial $\frac{dy}{dt} = f(y)$ tem algumas de suas soluções desenhadas abaixo:



Esboce um possível gráfico da função f.

Resolução: A EDO é autônoma. As soluções de equilíbrio são -1 e 2, logo devemos ter $f(-1) = 0$, $f(2) = 0$. Para $x < -1$ ou $-1 < x < 2$, devemos ter $f(x) > 0$; para $x > 2$, devemos ter $f(x) < 0$. Assim, um possível gráfico é:



2. [2 pt] Considere o problema valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{t}{y} \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

Encontre a solução em forma explícita (y = função de t). Qual é o intervalo máximo de t's onde a solução está definida?

Resolução: A equação é separável: podemos escrevê-la como $y\,dy = -t\,dt$. Integrando, obtemos $\frac{y^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + c$, ou seja, $y^2 = -t^2 + 2c$. Substituindo a condição inicial $t = 0$, $y = -4$, temos $2c = 16$. Como é pedido y em função de t, devemos isolar $y = \pm\sqrt{-t^2 + 2c}$. Como $y(0) = -4$, o sinal deve ser menos, logo $\boxed{y = -\sqrt{16 - t^2}}$.

Esta fórmula faz sentido se $16 - t^2 \geq 0$, isto é, $-4 \leq t \leq 4$. Porém para $t = \pm 4$ a EDO fica sem sentido pois contém divisão por $y = 0$. Portanto o intervalo máximo onde a solução está definida é $\boxed{-4 < t < 4}$.

3. [2½ pt] Um sistema massa-mola (com atrito) é governado pela equação diferencial:

$$my'' + \gamma y' + ky = 0$$

Suponha que $m = 1/4$, $\gamma = 1$, $k = 2$. Suponha que no instante $t = 0$ a massa tem deslocamento $y(0) = 1$ e velocidade igual a zero.

Encontre a função $y(t)$. Se possível, escreva $y(t)$ em uma forma "compacta", usando apenas uma função seno *ou* apenas uma função cosseno.

Resolução: Podemos reescrever a EDO como $y''+4y'+8y = 0$. A equação característica é $\lambda^2 + 4\lambda + 8\lambda = 0$, cujas soluções (por Báscara) são $\lambda = -2 \pm 2i$. Logo a solução geral da EDO é $y(t) = c_1 e^{-2t} \operatorname{sen} 2t + c_2 e^{-2t} \cos 2t$. Pelas condições iniciais,

$$y(0) = c_2 = 1, \qquad y'(0) = 2c_1 - 2c_2 = 0$$

Resolvendo, $c_1 = c_2 = 1$. Logo a solução procurada é $y(t) = e^{-2t}(\operatorname{sen} 2t + \cos 2t)$.

Vamos escrever isto na forma $y(t) = Ae^{-2t}\cos(2t + \delta)$. Pela "fórmula de Pitágoras", $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{2}$. Além disso, uma identidade trigonométrica diz que $\cos(2t + \delta) = \cos 2t \cos\delta - \operatorname{sen} 2t \operatorname{sen}\delta$. Logo devemos ter $\cos\delta = 1/\sqrt{2}$, $\operatorname{sen}\delta = -1/\sqrt{2}$. Assim, $\delta = -\pi/4$ (ou $7\pi/4$ etc) e uma resposta é $\boxed{y(t) = \sqrt{2}e^{-2t}\cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)}$.

Obs: De maneira similar, podemos reescrever a função usando apenas um seno como $\boxed{y(t) = \sqrt{2}e^{-2t}\operatorname{sen}\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)}$.

4. [1½ pt] Escreva uma equação diferencial linear de 3ª ordem cuja solução geral seja:

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}.$$

Resolução: Vamos procurar uma EDO da forma $y''' + ay'' + by' + cy = 0$. O polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c$. Para que a solução geral tenha o formato desejado, é necessário e suficiente que as raízes do polinômio sejam 1, -1 e -3. Quer dizer que $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda + 3)$, que fazendo as contas dá $\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda - 3$. Logo a resposta é $\boxed{y''' + 3y'' - y' - 3y = 0}$.

Obs: Outra maneira de descobrir que $a = 3$, $b = -1$, $c = -3$ é montar um sistema linear $p(1) = 0$, $p(-1) = 0$, $p(-3) = 0$ e resolvê-lo.

5. [2½ pt] Encontre todos os pontos de equilíbrio do sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = (x + 2)y$$

Classifique cada um dos pontos de equilíbrio como *atrator*, *repulsor*, ou *sela*.

Resolução: Os pontos (x, y) de equilíbrio devem satisfazer $F = x+y = 0$ e $G = (x+2)y = 0$. A segunda equação vale quando $x + 2 = 0$ ou $y = 0$. Portanto os pontos de equilíbrio são $\boxed{(0,0)}$ e $\boxed{(-2,2)}$

A matriz jacobiana num ponto arbitrário é

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x+2 \end{pmatrix}.$$

Em $(0,0)$, temos $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. A matriz é triangular com autovalores 1 e 2. Ambos são positivos, portanto este ponto de equilíbrio é $\boxed{\text{repulsor}}$.

Em $(-2,2)$, temos $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. A matriz tem determinante negativo (-2), logo os autovalores são não-nulos, reais, com sinais opostos, portanto este ponto de equilíbrio é $\boxed{\text{sela}}$.