MAT1604 - Introdução à Análise
Prof: Flávio Abdenur
11/10/2007
Horário: 13:00 – 15:00

Prova 1

(O valor de cada questão está entre colchetes, no início de cada enunciado.)

1. [1,5] Mostre que dados $x \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + [\frac{n(n-1)}{2}]x^2$$

2. [2,5] Enuncie e demonstre (com cuidado) o Teorema de Weierstrass para sequências.

3. [3,0] Determine se existem e quais são os limites das seguintes sequências:

a) [1,5]

$$x_n = \frac{a^n}{n},$$

onde $a \in \mathbb{R}$.

b) [1,5]

$$x_n = \frac{17(n^2+4)(n+5sen(n^{17}))}{n^3+(-1)^n}$$

4. [3,0]

Um número real x^* é dito *algébrico* se existe algum polinômio

$$p(x) = a_k \cdot x^k + a_{k-1} \cdot x^{k-1} + \ldots a_1 \cdot x + a_0,$$

onde $k \geq 1$, $a_k \neq 0$, e cada a_j é um inteiro, tal que x^* é raiz de p, ou seja, tal que vale $p(x^*) = 0$.

Um número real é dito *transcendendal* se ele não é algébrico.

a) [0,5] Mostre que todo número racional é algébrico.

b) [1,0] Mostre que toda potência racional de um número racional (i.e., todo número da forma r^s, onde $r, s \in \mathbb{Q}$) é algébrica. (Obs: note que isso implica que $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, etc são algébricos.)

c) [1,5] Mostre que existem ("muitos") números transcendentais. (*Dica*: A palavra "muitos".)