Lista 2 de MAT1604 - Introdução à Análise

Entrega: No início da última aula antes da P2, sem exceções.

1. Determine quais das séries abaixo convergem:

a) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

b) $\sum \frac{1}{n \cdot log(n)}$

c) $\sum \frac{(log(n))^2}{n^{\frac{3}{2}}}$

2. Verdadeiro ou falso (justifique!)

a) Se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

b) Se $\sum (a_n)^2$ converge então $\sum a_n$ converge.

c) Se $\sum (a_n)^3$ converge então $\sum a_n$ converge.

d) Se $\{a_n\}$ é decrescente e $\sum a_n$ converge então $lim\ n \cdot a_n = 0$.

3.

a) Mostre que um conjunto $C \subset \mathbb{R}$ é aberto se e somente se vale a seguinte condição: dado $x \in C$ e uma sequência $x_k \to x$, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq N$ vale $x_k \in C$.

b) Seja $\{C_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma família enumerável de conjuntos fechados C_j tais que $int(C_j) = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Mostre que $int(\bigcup_{j \in N}\ C_j) = \emptyset$.

4. Mostre que se $A \subset \mathbb{R}$ é um aberto então A é a reunião de uma família enumerável (possivelmente finita) de intervalos abertos disjuntos.

(Obs: a enumerabilidade já foi provada em aula, então só falta mostrar a decomposição em intervalos abertos disjuntos. Antes de sair colando do Elon, pensem em ínfimos e supremos...)

5.

a) Mostre que o fecho de qualquer conjunto é um conjunto fechado.

b) Mostre que dado $C \subset \mathbb{R}$ e F um fechado que contém C, então vale $F \supset \overline{C}$. (Em palavras: "o fecho de um conjunto é o menor fechado que o contém.")

6. Seja K o conjunto de Cantor.

a) Mostre que $\frac{1}{4} \in K$.

b) Mostre que vale

$$\{|x-y| : x, y \in K\} = [0,1]$$

c) Mostre que dado qualquer $\epsilon > 0$ então existe uma família finita de intervalos abertos $(a_1, b_1), \ldots, (a_s, b_s)$ tais que vale $K \subset ((a_1, b_1) \cup \ldots \cup (a_s, b_s))$ e $(b_1 - a_1) + \ldots + (b_s - a_s) < \epsilon$. (Em palavras: "o conjunto de Cantor tem medida nula".)

7. Calcule os seguintes limites:

a) [1]

$$\lim_{t \to 0} \frac{sen(x)}{x}$$

b)

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, \ \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

c)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right], \ \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right], \ \lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right], \ \lim_{x \to 0^-} \frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]$$

onde a e b são reais positivos e $[y]$ denota o maior inteiro $\leq y$.

8. Verdadeiro ou falso:

a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua então $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ é fechado.

b) Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas então $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = g(x)\}$ é fechado.

c) Se $C \subset \mathbb{R}$ é um conjunto fechado então existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = 0$ se e somente se $x \in C$.

d) Se $C \subset \mathbb{R}$ é um conjunto aberto então existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $f(x) = 0$ se e somente se $x \in C$.

[1] Item dedicado ao Lucas.