2ª lista de Introdução à Análise – PUC-Rio

Entrega: Início da aula do dia 13 de setembro, sem exceções!

1. Sejam X, Y, Z conjuntos, e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ funções. Seja $h = g \circ f : X \to Z$ a função composta, isto é, $h(x) = g(f(x))$. Responda cada uma das perguntas abaixo, provando as que forem verdadeiras e dando contra-exemplo para as que forem falsas:
   (a) Se h é injetiva então f é necessariamente injetiva?
   (b) Se h é injetiva então g é necessariamente injetiva?
   (c) Se h é sobrejetiva então f é necessariamente sobrejetiva?
   (d) Se h é sobrejetiva então g é necessariamente sobrejetiva?
   (e) Se h é bijetiva então f é necessariamente bijetiva?
   (f) Se h é bijetiva então g é necessariamente bijetiva?

2. Considere o conjunto de todas as sequências crescentes de números inteiros, isto é:

$$S = \left\{ (k_n)_{n \in \mathbb{N}};\ k_1 < k_2 < k_3 < \cdots \right\}$$

   Prove que este conjunto não é enumerável.

   Dica: Tente usar a idéia da "*diagonal de Cantor*", vista em aula, e na pág. 30 do livro.

3. O limite abaixo existe? Quanto vale?

$$\lim_{n \to +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$$

   Obviamente, você deve provar que sua resposta está certa!

   Obs: Você pode admitir o seguinte resultado: *Para todo $x \geq 0$ existe um único $y \geq 0$ (indicado $y = \sqrt{x}$) tal que $y^2 = x$.* Já provamos isto no caso $x = 2$; a prova no caso geral é muito parecida.

4. Suponha que (t_n) é uma sequência limitada, e que (x_n) e (y_n) são duas sequencias convergentes com o mesmo limite a. Prove que

$$\lim_{n \to \infty} \big((1 - t_n) x_n + t_n y_n \big) = a.$$

Obs: O livro contém muitos outros exercícios interessantes sobre limites. Comece fazendo os mais básicos (ex: 2.2.1, 2.2.2, 2.2.5, 2.3.6), depois faça alguns mais difíceis (um bem legal é o 2.3.11).