

## 2ª prova de Introdução à Análise – PUC-Rio – 11/10/11

Nome: \_\_\_\_\_

Questão	1	2	3	4	Total
Valor:	2	4	2	2	10
Nota:					

- [2 pt] Seja  $(x_n)$  uma sequência tal que  $|x_n - x_{n+1}| < 2^{-n}$  para todo  $n$ . Mostre que a sequência é convergente.  
*Dica:* Cauchy.
- (a) [2 pt] Mostre que se  $\sum a_n$  é uma série absolutamente convergente então  $\sum a_n^2$  é convergente.  
(b) [2 pt] Dê um exemplo de série condicionalmente convergente  $\sum a_n$  tal que  $\sum a_n^2$  é divergente.
- Sejam  $X, Y \subset \mathbb{R}$ .  
(a) [1 pt] Prove:  $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ .  
(b) [1 pt] Dê um exemplo onde  $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$ .
- [2 pt] Prove que um conjunto compacto cujos pontos são todos isolados é finito.

- 
- *Lápis é permitido.*
  - *Você pode fazer as questões em qualquer ordem (indicando claramente qual questão está fazendo). É boa ideia começar pelas questões mais fáceis.*
  - *Escreva as demonstrações em detalhe. Em cada passo lógico, indique o que está sendo usado (Ex: “como ... e ..., temos ...; em particular ...”)*
  - *Você pode usar resultados provados em aula (exceto quando se trata do enunciado do problema).*
  - *Tempo: 2 h.*