1ª prova de Introdução à Análise – PUC-Rio – 08/04/13

SOLUÇÕES

1. [2½ pt] A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique.

   Afirmação: Existe uma sequência de conjuntos $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com as seguintes propriedades:

   - cada C_n é infinito;
   - $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \mathbb{N}$;
   - os conjuntos são disjuntos, isto é, $m \neq n \ \Rightarrow C_n \cap C_m = \varnothing$.

   Solução: A afirmação é *verdadeira.*

   Vimos em aula que existe uma bijeção $\varphi\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $D_n = \{n\} \times \mathbb{N}$. Note que:

   - cada D_n é infinito;
   - $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{N}$;
   - os conjuntos são disjuntos, isto é, $m \neq n \ \Rightarrow D_n \cap D_m = \varnothing$.

   Defina $C_n = \varphi(D_n)$ para cada n. Como φ é bijeção, as propriedades desejadas para os conjuntos C_n's seguem das propriedades correspondentes para os D_n's.

2. [2½ pt] Sejam $A,\ B \subset \mathbb{R}$ não-vazios e limitados superiormente. Prove que $A + B := \{x + y;\ x \in A,\ y \in B\}$ é limitado superiormente e que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

   Solução: Seja $a = \sup A$ e $b = \sup B$, os quais existem pelo axioma da completude.

   Dado $z \in A + B$, existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $z = x + y$. Como a é cota superior de A e b é cota superior de B, temos $x \leq a$ e $y \leq b$. Logo $z = x + y \leq a + b$. Isto mostra que $a + b$ é cota superior de $A + B$ e, em particular, $A + B$ é limitado superiormente.

   Seja agora $c < a + b$ qualquer; vamos mostrar que c não é cota superior de $A + B$. Seja $\varepsilon := (a + b - c)/2 > 0$. Como $a - \varepsilon < a = \sup A$, o número $a - \varepsilon$ não é cota superior de A, ou seja, existe $x \in X$ tal que $x > a - \varepsilon$. Analogamente, existe $y \in B$ tal que $y > b - \varepsilon$. Portanto $x + y > a + b - 2\varepsilon = c$. Como $x + y \in A + B$, mostramos que c não é cota superior de $A + B$.

   Ou seja, provamos que $a+b$ é a menor cota superior de $A+B$, isto é, $a+b = \sup(A+B)$.

3. [2½ pt] Suponha que (t_n) é uma sequência limitada, e que (x_n) e (y_n) são sequências convergentes com o mesmo limite L. Prove que

$$\lim_{n\to\infty} \big((1 - t_n)x_n + t_n y_n\big) = L.$$

Solução: Seja $M \geq 0$ tal que $|t_n| \leq M$ para todo n. Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; |x_n - L|,\; |y_n - L| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}\,.$$

Então

$$\begin{aligned} n \geq N \;\Rightarrow\; \big|(1-t_n)x_n + t_n y_n - L\big| &= \big|(1-t_n)(x_n - L) + t_n(y_n - L)\big| \\ &\leq |1-t_n|\,|x_n - L| + |t_n||y_n - L| \\ &\leq (|t_n| + 1)(|x_n - L| + |y_n - L|) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

4. [2½ pt] Seja (x_n) uma sequência não-convergente e limitada. Mostre que existem duas subsequências convergentes com limites diferentes.

Solução: Como (x_n) é limitada, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass existe uma subsequência convergente; seja L o seu limite. Resta encontrar uma outra subsequência com um limite diferente.

Como (x_n) não é convergente, em particular é falso que $\lim x_n = L$. Ou seja, a seguinte sentença é falsa:

$$\forall \varepsilon > 0\; \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N,\; |x_n - L| < \varepsilon.$$

Isto quer dizer que:

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t.q. } \forall N \in \mathbb{N}\; \exists n \geq N \text{ t.q. } |x_n - L| \geq \varepsilon. \tag{$\star$}$$

Seja $\varepsilon > 0$ como em $(\star)$. Vamos definir por indução uma subsequência $(x_{n_i})_i$ tal que

$$|x_{n_i} - L| \geq L \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \tag{$\dagger$}$$

Aplicando $(\star)$ com $N = 1$ encontramos n_1 tal que $|x_{n_1} - L| \geq L$. Supondo indutivamente que n_i já foi definido, aplicamos $(\star)$ com $N = n_i + 1$ e encontramos $n_{i+1} > n_i$ tal que $|x_{n_{i+1}} - L| \geq L$. Isto completa a definição da subsequência $(x_{n_i})_i$.

Por ser subsequência de uma sequência limitada, $(x_{n_i})_i$ também é limitada. Logo, pelo Teorema de Bolzano–Weierstrass, existe uma subsequência $\big(x_{n_{i_j}}\big)_j$ convergente. Segue de $(\dagger)$ que o limite desta subsequência não pode ser L. Além disso, $\big(x_{n_{i_j}}\big)$ é subsequência também da sequência original (x_n).