# 2ª prova de Introdução à Análise – PUC-Rio – 27/05/13

Nome: ____________________________________________

- Lápis é permitido.
- Escreva as demonstrações em detalhe. Em cada passo lógico, indique o que está sendo usado (Ex: "como ... e ..., temos ...; em particular ...")
- Você pode usar resultados provados em aula (exceto quando se trata do enunciado do problema).
- Tempo: 2 h. Total: 11 pt (as notas $> 10$ serão truncadas).

---

1. (a) [2 pt] Prove que se $\sum a_n$ é absolutamente convergente e $(b_n)$ é uma sequência limitada então $\sum a_n b_n$ converge.

   (b) [1 pt] Exiba um contra-exemplo que mostre que item (a) pode falhar se $\sum a_n$ for condicionalmente convergente.

2. Defina a *distância* de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ como

$$d(a, X) = \inf\{|a - x|;\ x \in X\}.$$

Prove:

(a) [1 ½ pt] $d(a, X) = 0$ se e somente se $a \in \overline{X}$.

(b) [2 ½ pt] Se o conjunto $X$ é fechado então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $x^* \in X$ tal que $d(a, X) = |a - x^*|$.

3. Seja $X \subset \mathbb{R}$ conjunto não-vazio e $f\colon X \to \mathbb{R}$ uma função.

   Dizemos que $f$ é *limitada* se o conjunto imagem $f(X) = \{f(x);\ x \in X\}$ é limitado.

   Dizemos que $f$ é *localmente limitada* se para todo $x \in X$ existe $\varepsilon > 0$ tal que a restrição $f \mid X \cap V_\varepsilon(x)$ é uma função limitada.

   (a) [2 pt] Mostre que se $X$ não é compacto, então existe uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ localmente limitada mas não limitada.

   (b) [2 pt] Mostre a recíproca: Se $X$ é compacto então toda função $f\colon X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é limitada.

FOLHA DE RASCUNHO (Não precisa ser entregue)