3ª prova de Introdução à Análise – PUC-Rio – 19/06/13

Nome: ______________________________

Questão	1	2	3	4	Total
Valor:	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	3	12
Nota:					

- Lápis é permitido.
- Escreva as demonstrações em detalhe. Em cada passo lógico, indique o que está sendo usado (Ex: "como ... e ..., temos ...; em particular ...")
- Você pode usar resultados provados em aula (exceto quando se trata do enunciado do problema).
- Tempo: 2 h. Valor total: 12 pts.; mas as notas maiores que 10 serão truncadas.

---

1. [$2\frac{1}{2}$ pt] Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função monótona. Prove que se o conjunto imagem $f(\mathbb{R})$ é um intervalo então f é contínua.

2. [3 pt] Sejam K, $L \subset \mathbb{R}$ dois conjuntos compactos enumeráveis. Suponha que cada conjunto possui um único ponto de acumulação. Prove que os dois conjuntos são homeomorfos, isto é, prove que existe uma bijeção $f\colon K \to L$ contínua com inversa $f^{-1}\colon L \to K$ contínua.

3. Suponha que $A \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio com a seguinte propriedade: toda função $f\colon A \to \mathbb{R}$ contínua é uniformemente contínua.

   (a) [2 pt] Pode-se concluir que A é fechado?

   (b) [1½ pt] Pode-se concluir que A é limitado?

4. [3 pt] Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto.

   Uma função $h\colon I \to \mathbb{R}$ é chamada *afim* se é da forma $h(x) = ax + b$.

   Uma função $g\colon I \to \mathbb{R}$ é chamada *poligonal* se é contínua e existem intervalos compactos I_1, …, I_n cuja união é I tais que cada restrição $g|I_k$ é afim.

   Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que para todo $\varepsilon > 0$ existe uma função poligonal $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in [0,1]$.