Exemplo de dois espaços contráteis com um ponto em comum cuja união não é contrátil (seguindo Elon L. Lima)

O exemplo está pág. 48 do livro Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, do Elon Lages Lima. Parece óbvio que o exemplo em questão não é contrátil, mas a demonstração que eu consegui encontrar não é tão simples, nem elementar. Agradeço ao Eduardo Casagrande por ter me chamado a atenção para esse exemplo, e ao meu irmão João Paulo, que me ajudou a provar o lema 4.

Dado $j \in \mathbb{N}$, sejam S_j^+ e $S_j^- \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ os círculos de raio $1/j$ e centros respectivos $(1/j, 0)$ e $(-1/j, 0)$. Sejam os pontos $N^\pm = (0, 0, \pm 1)$ e sejam $D_j^\pm$ os cones com base $S_j^\pm$ e vértice $N^\pm$. Defina

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} (D_j^+ \cup D_j^-)$$

Seja $\alpha_j^\pm : I \to X$ um caminho fechado, com $\alpha_j^\pm(0) = 0$, que dá uma volta no círculo $S_j^\pm$, digamos com velocidade constante. Considere a concatenção infinita

$$\gamma = \alpha_1^+(\alpha_1^-(\alpha_2^+(\alpha_2^-(\cdots)))) .$$

Afirmação do Elon. *O caminho $\gamma : I \to X$ não é homotópico a constante.*

Suponha por absurdo que existe uma homotopia $F : I^2 \to X$, com ponto-base a origem, entre γ e o caminho constante 0. Seja $k \geq 1$ um inteiro fixado. Considere

$$X_k = \bigcup_{j=1}^{k} (D_j^+ \cup D_j^-)$$

Seja $R_k : X \to X_k$ o retrato que "esmaga horizontalmente" os cones D_j^+ (resp. D_j^-), com $j > k$, no segmento $(0, 0) \times [0, 1]$ (resp. $(0, 0) \times [-1, 0]$). Seja $\beta = R_k \circ \gamma$; então o caminho β é homotópico a 0 via a homotopia $H = R_k \circ F$. Vamos provar o seguinte:

Lema 1. *Existem $z, z' \in I^2$ tais que*

$$\|z - z'\| < \frac{C}{k} \quad e \quad |H_3(z) - H_3(z')| \geq 1,$$

onde C é uma constante (não depende de k), e $H = (H_1, H_2, H_3)$.

O lema implica a afirmação do Elon. De fato, R_k preserva a terceira coordenada, logo

$$|F_3(z) - F_3(z')| = |H_3(z) - H_3(z')| \geq 1,$$

Como k é arbitrariamente alto, isso contradiz a continuidade uniforme de F.

Sejam X_k^+ e X_k^- as componentes conexas de $X_k \smallsetminus \{0\}$, sendo a primeira contida em $\{x_3 \geq 0\}$. Vamos considerar as componentes conexas de $H^{-1}(X_k \smallsetminus \{0\})$ que intersectam a parte de baixo do quadrado, $I \times \{0\}$. Essas serão chamadas *componentes principais*. Cada componente principal está contida $H^{-1}(X_k^+)$ ou em $H^{-1}(X_k^-)$, e será chamada de *positiva* ou *negativa* de acordo. Temos:

Lema 2. *Seja U uma componente positiva (resp. negativa). Então $H(U)$ contém o ponto N^+ (resp. N^-).*

Prova. Seja U uma componente positiva. Tome um intervalo $J \subset I$ tal que $J \times \{0\}$ intersecta U, e tal que o caminho β restrito a J é uma reparametrição de um caminho α_j^+. Seja $R : X_k \to D_j^+$ o retrato que esmaga horizontalmente os outros cones positivos no eixo $(0, 0) \times [0, 1]$, e manda os cones negativos em 0. Seja $G : I^2 \to K$ dada por

$$G(z) = \begin{cases} R(H(z)) & \text{se } z \in U, \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Então G é contínua. Além disso, G envia o bordo do quadrado no bordo do cone D_j^+, e essa restrição $\partial I^2 \to S_j^+$ não é homotópica a constante. Como D_j^+ é topologicamente um disco fechado, segue que G é sobrejetiva. □

É claro que existem no máximo k componentes principais de cada tipo. Além disso, vale o seguinte:

Lema 3. *Existem pelo menos $k + 1$ componentes principais.*

Antes de provar esse lema, vamos concluir dele a:

Prova do lema 1. Pelo lema 3, existem pelo menos $\frac{k+1}{2}$ componentes positivas ou $\frac{k+1}{2}$ componentes negativas. Digamos que seja o primeiro caso. Pelo lema 2, em cada componente positiva U_i existe um ponto z_i tal que $H(z_i) = N^+$. Se k é grande, existem dois deles z_i e z_j que estão próximos. Como estão em componentes conexas diferentes de $H^{-1}(X \smallsetminus \{0\})$, deve existir um ponto z no segmento $[z_i, z_j]$ tal que $H(z) = 0$. Então z_i e z estão próximos mas $|H_3(z_i) - H_3(z)| = 1$. □

Resta provar o lema 3. Considere os intervalos abertos disjuntos $I_1, I_2, \ldots, I_{2k} \subset I$ tais que

$$\beta^{-1}(X \smallsetminus \{0\}) = I_1 \cup I_2 \cup \cdots I_{2k}$$

e

$$\beta\left(\overline{I_1}\right) = S_1^+, \quad \beta\left(\overline{I_2}\right) = S_1^-, \ \ldots, \quad \beta\left(\overline{I_{2k-1}}\right) = S_k^+, \quad \beta\left(\overline{I_{2k}}\right) = S_k^- .$$

Dados $i, j \in \{1, \ldots, 2k\}$, escrevemos $i \sim j$ para indicar que $I_i \times \{0\}$ e $I_j \times \{0\}$ estão numa mesma componente principal. Isso define uma relação de equivalência no conjunto $\{1, 2, \ldots, 2k\}$.

Vejamos que a relação $\sim$ possui as propriedades seguintes:

$$\text{se } i \sim j \text{ então } i \text{ e } j \text{ são ambos pares ou ambos ímpares;} \tag{1}$$

$$\text{se } j_1 < j_2 < j_3 < j_4 \text{ são tais que } j_1 \sim j_3 \text{ e } j_2 \sim j_4 \text{ então } j_1 \sim j_2 \sim j_3 \sim j_4. \tag{2}$$

A primeira é óbvia, e a segunda é conseqüência do *teorema da curva de Jordan*. De fato, considere j_i's como em (2). Tome pontos x_i em I_{j_i}; então $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Sejam U e V as componentes principais que contém $\{(x_1, 0), (x_3, 0)\}$ e $\{(x_2, 0), (x_4, 0)\}$, respectivamente. U é aberto em I^2, logo existe caminho injetivo de $(x_3, 0)$ a $(x_1, 0)$ cuja imagem está, exceto pelos extremos, contida em $U \cap \operatorname{int} I^2$. Justapondo com o segmento em $[x_1, x_3] \times \{0\}$, obtemos uma curva de Jordan. Se $\varepsilon > 0$ é pequeno, os pontos de V (x_2, ε) e (x_4, ε) estão respectivamente no interior (pois $(x_2, -\varepsilon)$ está no exterior) e no exterior da curva de Jordan. Como existe um caminho em $V \cap \operatorname{int} I^2$ ligando os dois, concluímos que $U \cap V \neq \varnothing$, provando (2).

Portanto o lema 3 segue do seguinte fato combinatório:

Lema 4. *Seja $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ um "intervalo" finito, com $n \geq 1$ elementos. Seja $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathcal{N}$ que satisfaz* (1) *e* (2)*. Então $\sim$ possui pelo menos $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ classes de equivalência.*

Prova. Indução em n: para $n = 1$ vale. Podemos supor que $\mathcal{N} = [1, n] = \{1, \ldots, n\}$. Seja $\ell \geq 1$ o maior inteiro tal que $1 \sim 2\ell - 1$. Pela propriedade 2, nenhum ponto no intervalo $[1, 2\ell - 1]$ é equivalente a um ponto no intervalo (possivelmente vazio) $[2\ell, n]$.

O número de classes em $[1, 2\ell - 1]$ é maior ou igual a ℓ: isso é evidente se $\ell = 1$; caso contrário aplicamos a hipótese de indução ao intervalo $[1, 2\ell - 2]$.

Se $2\ell - 1 = n$, então $\lfloor n/2 \rfloor + 1 = \ell$ e acabou. Se $2\ell - 1 < n$, então o número de classes em $[2\ell, n]$ é, pela hipótese de indução, pelo menos

$$\left\lfloor \frac{n - 2\ell + 1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor - \ell + 1.$$

Logo o número total de classes de $\mathcal{N}$ é pelo menos

$$\left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor + 1 \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

□

Jairo – setembro de 2005.