

Habilitation à diriger des recherches

Julio C. Rebelo

Liste des travaux présentés

- [Re1] Singularités des flots holomorphes - *Ann. de l'Institute Fourier* **46**, (1996), 411-428.
- [Gh-Re] (avec E. Ghys) Singularités des flots holomorphes II - *Ann. de l'Institute Fourier* **47**, (1997), 1117-1174.
- [Re2] Champs complets avec singularités non-isolées sur les surfaces complexes - *Bol. Soc. Mat. Mexicana* **3**, (1999), 359-395.
- [Re3] Réalisation de germes de feuilletages holomorphes par des champs semi-complets en dimension 2 - *Ann. de la Fac. de Toulouse* **IX**, 4, (2000), 735-763.
- [Re4] Ergodicity and rigidity for certain subgroups of $\text{Diff}^\omega(S^1)$ - *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.* **32**, (1999), 433-453.
- [Re5] A theorem of measurable rigidity in $\text{Diff}^\omega(S^1)$ - *Ergodic Theory and Dynamical Systems* **21**, 5, (2001), 1525-1561.
- [R-RS] (avec R. Silva) The multiple ergodicity of non-discrete subgroups of $\text{Diff}^\omega(S^1)$ - *Moscow Mathematical Journal*, **3**, 1, (2003), 123-171.
- [L-R] (avec F. Loray) Minimal, rigid foliations by curves on $\mathbb{C}P(n)$ - *Journal of European Mathematical Society*, **5**, 2, (2003), 147-201.
- [Re6] On nilpotent subgroups of real analytic diffeomorphisms of the torus - *C. R. Acad. Sci. Paris* **t.331**, Serie I, (2000) 317-322.
- [Re7] On the dynamics of generic non-Abelian free actions, *Bull. Braz. Math. Soc.*, **35**, (2004), 2, 211-251.
- [Re8] Subgroups of $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ acting transitively on unordered 4-tuples, *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**, (2004), 11, 4543-4557.
- [R-AS] (avec A. Silva) On the Burnside problem in $\text{Diff}(M)$, à paraître au *Discrete and Continuous Dynamical Systems -A*.
- [Re9] Meromorphic vector fields and elliptic fibrations, *Michigan Mathematical Journal*, **52**, (2004), 1, 33-59.
- [Re10] Complete algebraic vector fields on affine surfaces, PART I, *Journal of Geometric Analysis*, **13**, 4, (2003), 669-696.
- [Re11] Vertical vector fields on certain complex fibrations, *Journal of Mathematical Sciences, the University of Tokyo*, **11** (2004), 3, 177-243.
- [Re12] Complete algebraic vector fields on affine surfaces, PART II, à paraître dans le *Journal of Differential Equations*, 46 paginas.
- Direction du travail de thèse de Raderson Silva (thèse soutenue à PUC-Rio, 2001, Brésil)
- Direction du travail de thèse de Magno Alves (thèse soutenue à PUC-Rio, 2002, Brésil)
- Direction du travail de thèse de Ana Silva (thèse soutenue à l'USP-SC, 2004, Brésil)
- Codirection (avec J. Bastos Gonçalves) du travail de thèse de Helena Reis (thèse en cours de rédaction, U. do Porto, Portugal).
- Direction du travail de thèse de Jesus Zapata (thèse en préparation, l'IMPA, Brésil).

Table de Matières

1	Introduction	7
2	Les flots holomorphes et leurs singularités	13
2.1	Les champs semi-complets	13
2.2	Les singularités semi-complètes isolées	15
2.3	Les singularités non-isolées	17
2.4	Quelques questions complémentaires et applications	19
3	Les sous-groupes non-discrets de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$	21
3.1	Les théorèmes de Duminy, Shcherbakov, Nakai et Ghys	21
3.2	Des sous-groupes non-discrets aux flots	24
3.3	L'action diagonale et le théorème de Lie	26
4	Les feuilletages rationnels de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$	31
4.1	Quelques théorèmes classiques	31
4.2	Des ouverts de feuilletages chaotiques	32
4.3	La construction des pseudo-groupes	34
4.4	Construction de feuilletages	35
5	Champs méromorphes semi-complets	39
5.1	Des exemples et les cas intégrables	39
5.2	Les résultats principaux et les selle-nœuds	41
5.3	Deux familles d'exemples	43
5.4	Preuve du théorème (??)	44
6	Quelques questions et résultats supplémentaires	47
6.1	Actions de groupes	47
6.2	Champs semi-complets en dimension 3	49

Chapitre 1

Introduction

La recherche présentée dans ce mémoire peut être divisée essentiellement en deux parties. L'une des parties est consacrée à l'étude des Équations Différentielles Ordinaires complexes ainsi qu'à leurs feuilletages sous-jacent. L'autre partie s'occupe de la dynamique des groupes de difféomorphismes du cercle (et parfois des variétés compactes de basse dimension). Cette deuxième partie est pour la plupart représentée par l'étude de la dynamique des sous-groupes non-discrets de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$, le groupe des difféomorphismes analytiques réels du cercle (et qui préservent l'orientation pour simplifier).

Mon travail de thèse (1993-1996) a concerné la classification des singularités isolées des flots holomorphes sur les *surfaces complexes* non-nécessairement compactes (dans tout ce texte l'expression surface complexe désignera une variété complexe de dimension complexe 2). C'est la notion de singularité semi-complète qui va jouer un rôle clef dans cette classification. Cette notion m'a été, en fait, suggérée par mon ancien directeur de thèse Etienne Ghys. Récemment A. Guillot m'a signalé que R. Palais avait déjà considéré la même notion pour les actions des groupes de Lie. Il paraît cependant que R. Palais n'a pas observé les obstructions (de nature locale) que cette notion apporte sur, par exemple, le problème (global) de prolonger un germe de champ de vecteurs holomorphe en un champ holomorphe globalement défini sur une variété compacte. Plus généralement, la notion de singularité semi-complète donne une obstruction locale au problème de prolonger un germe de champ holomorphe en un champ *complet* sur une variété complexe (qu'elle soit compacte ou non).

En dimension 2, nos résultats de classification, obtenus en partie en collaboration avec Etienne Ghys, ont été utilisés par Dloussky, Oeljklaus et Toma pour décrire complètement les surfaces complexes qui admettent un champ de vecteurs holomorphe globalement défini (voir [D-O-T1], [D-O-T2]). Le résumé de ces résultats, y compris le cas des singularités non-isolées qui ont été classifiées juste après ma thèse, se trouve au Chapitre 2. Signalons cependant que le problème analogue pour les surfaces ouvertes et champs holomorphes complets ne semble pas admettre une réponse "raisonnable". En fait, déjà dans le cas algébrique de \mathbb{C}^2 , la question n'a été que récemment résolue de façon indépendante par M. Brunella [Br1] (en suivant la théorie de McQuillan [Ma]) et par l'auteur qui a utilisé une extension "méromorphe" des travaux précédents (pour plus de détails voir le Chapitre 5).

Après les singularités de flots holomorphes, je me suis intéressé au problème de comprendre la dynamique d'un sous-groupe non-résoluble de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ engendré par des éléments proches de l'identité. En effet, Etienne Ghys m'avait aussi proposé cela comme un possible "problème de thèse". Les motivations originales pour ce genre de question proviennent d'une partie d'un résultat non-publié de G. Duminy ([Du]). G. Duminy avait démontré qu'un sous-groupe de $\text{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$ engendré par des éléments suffisamment proches de l'identité ou bien possède une orbite finie ou bien toutes ses orbites sont denses. Ainsi la dynamique topologique d'un tel groupe est parfaitement comprise. Cependant des aspects "différentiables" de ces actions restait inconnus. En particulier, on ignorait si un tel groupe ayant toutes ses orbites denses était nécessairement ergodique i.e. tel que tout borélien invariant est de mesure de Lebesgue nulle ou totale.

Une seconde motivation pour ces questions venait des travaux de Shcherbakov et Nakai [Sh1], [Nak] sur les groupes non-résolubles de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. En effet, Shcherbakov, et puis Nakai, ont construit des champs de vecteurs non-triviaux "dans l'adhérence" d'un tel groupe. Cela veut dire, en termes vagues, que la dynamique de ces champs de vecteurs est la limite de certaines dynamiques contenues dans celle du groupe considéré. Une généralisation de leurs résultats au cercle permettrait d'apporter des réponses à plusieurs questions laissées en suspens par le théorème de Duminy, au moins en classe analytique réelle. Une première approche a été développée par E. Ghys [Gh1] qui, en particulier, a donné une description très précise de la dynamique topologique des sous-groupes non-résolubles de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$. Bien qu'il s'agisse de considérer seulement de difféomorphismes analytiques, son théorème donne des informations plus détaillées que celui de Duminy. De plus, dans le même papier, E. Ghys a aussi démontré que les sous-groupes non-résolubles de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ engendrés par des éléments proches de l'identité sont *non-discrets* i.e. ils contiennent des suites non-triviales d'éléments convergeant vers l'identité. Finalement il a interprété la plupart des résultats ci-dessus comme étant des versions de "dimension infinie" du lemme classique de Zassenhaus sur les groupes de Lie (de dimension finie). Rappelons que le lemme de Zassenhaus affirme qu'un sous-groupe Γ non-nilpotent et engendré par des éléments suffisamment proches de l'identité dans un groupe de Lie G contient un flot non-trivial dans son adhérence $\bar{\Gamma}$ dans G . Ce lemme peut être divisé en deux parties, à savoir :

- Un sous-groupe Γ comme ci-dessus est non-discret. Cela se démontre en regardant la suite formée par des itérations de commutateurs et en observant que ces commutateurs convergent vers l'identité.
- Ensuite on démontre, en utilisant la structure de groupe de Lie de G , et notamment sa compacité locale, qu'un sous groupe non-discret de G possède un flot dans son adhérence.

E. Ghys avait donc accompli la première partie. Il restait à construire un flot dans l'adhérence d'un sous-groupe non-discret de, disons, $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$. Ceci n'est cependant pas immédiat parce que $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ n'est pas localement compact. Ces champs ont été finalement construits dans [Re4]. En particulier, j'ai pu démontrer en classe analytique que tout borélien invariant par un tel groupe est de mesure de Lebesgue nulle ou totale dès que les orbites du groupe sont denses. Des résultats de rigidité et des généralisations à "l'ergodicité multiple" sont aussi devenus accessibles et sont discutés au Chapitre 3. La

technique fondamentale pour compenser la perte de compacité locale de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est de considérer des renormalisations des éléments par des contractions convenables. En un certain sens, cela permet de récupérer la compacité locale grâce à une “réduction convenable de l’espace”

Certains de ces résultats ont connu des généralisations à des difféomorphismes de “basse régularité” obtenues récemment par A. Navas [Nav1]. L’approche de A. Navas est plus proches des méthodes de G. Duminy et on mentionnera aussi ses théorèmes au Chapitre 3.

D’autre part ces théorèmes de Shcherbakov et Nakai ont des applications à la dynamique des feuilletages holomorphes de $\mathbb{CP}(2)$. En effet, considérons le feuilletage (singulier) holomorphe donné par une équation différentielle polynomiale complexe dans \mathbb{C}^2 . Quitte à compactifier \mathbb{C}^2 en $\mathbb{CP}(2)$, on considère ce feuilletage comme un feuilletage \mathcal{F} défini dans $\mathbb{CP}(2)$ tout entier. Supposons alors que \mathcal{F} laisse la “droite à l’infini” de $\mathbb{CP}(2)$ invariante. La dynamique de ces feuilletages a été très étudiée par l’École Russe, notamment par Y. Il’Yashenko, dans les années 70. Ils ont démontré, par exemple, que génériquement parmi les feuilletages qui laissent la droite à l’infini invariante, toutes les feuilles, sauf la droite à l’infini elle-même, sont denses. Y. Il’Yashenko a aussi découvert un phénomène remarquable de rigidité qui *grosso modo* dit que si deux feuilletages comme ci-dessus sont topologiquement conjugués, alors ils sont, en fait, conjugués par une transformation projective. Dans ce contexte de feuilletage, les théorèmes de Shcherbakov et Nakai ont aussi apporté des précisions importantes tout en simplifiant les preuves.

Comme mes résultats précédents sur le cercle laissaient envisager quelques possibles généralisations des travaux de Shcherbakov et Nakai, je me suis intéressé de façon très naïve à la dynamique globale des feuilletages holomorphes. C’est alors que Frank Loray m’a offert l’opportunité de travailler sérieusement sur ces feuilletages. En effet, il m’a expliqué d’abord que la classe de feuilletages couverte par les travaux de l’École Russe est *d’interieur vide* dans un sens naturel (cf. Chapitre 4) parce qu’elles possèdent une courbe algébrique invariante (la droite à l’infini). De plus, l’holonomie de la droite à l’infini engendre naturellement un sous-groupe de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$, ce qui permet de faire appel aux résultats de Shcherbakov et Nakai. Une courbe algébrique invariante est cependant instable en ce sens qu’on peut la “casser” par une petite perturbation du feuilletage original (cf. [Jo]). Ceci, d’ailleurs, montre que les feuilletages ayant la droite à l’infini invariante sont *d’interieur vide* comme mentionné ci-dessus. Regardés dans leur ensemble, ces faits ontent l’espoir de trouver des ouverts de feuilletages à feuilles denses à partir de la dynamique des sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Par contre, Frank Loray a observé que si l’on pouvait avoir des résultats analogues à ceux de Shcherbakov et Nakai en travaillent simplement avec des difféomorphismes locaux de \mathbb{C} , sans avoir nécessairement un point fixe en commun, on devrait être capable de trouver des ouverts de feuilletages dont toutes les feuilles sont denses. La difficulté de travailler avec des (pseudo-)groupes de difféomorphismes locaux sans point fixe en commun m’est familière depuis mes travaux sur le cercle. Ainsi, on a immédiatement commencé une collaboration sur le sujet et on s’a rapidement rendu compte que l’on pouvait travailler en dimension arbitrairement grande. Tout cela nous a conduit à une collaboration de presque deux ans qui m’a été très enrichissante et dont les

résultats principaux sont présentés au Chapitre 4.

Au Chapitre 5 nous reviendrons sur des idées déjà discutées au Chapitre 2. Cependant on a maintenant une perspective plus globale qui est reliée, en certains points, à des questions de la Géométrie Algébrique Complexe. Dans la suite le mot “algébrique” voudra dire projective et complexe. Un premier lien élémentaire entre champs de vecteurs semi-complets et surfaces complexes réside dans la construction de champs de vecteurs *méromorphes* semi-complets sur une surface algébrique M donnée. Le fait qu’on cherche un champ méromorphe et pas holomorphe nous donne plus de flexibilité en ce sens que les champs holomorphes n’existent que très rarement. En particulier, l’existence ou la non-existence des champs méromorphes semi-complets devient aussi un invariant birationnel de la variété.

D’un point de vue technique, il s’agit de généraliser les résultats du Chapitre 2 aux singularités de champs de vecteurs *méromorphes*. De façon quelque peu surprenante, ce dernier problème s’avère bien plus difficile que le cas holomorphe. Par exemple, dans le cadre méromorphe, il y a des “modèles” non-linéaires de feuilletages avec un “gros espace de modules” alors qu’il n’existe que quelques modèles rigides dans le cadre holomorphe. La nature de cette difficulté ainsi que les méthodes pour décrire ces champs seront mentionnés dans le cours du chapitre (cf. [Re10], [Re12]).

L’application la plus simple concerne les fibrations rationnelles ou elliptiques. En effet, supposons que M possède une fibration (singulière cf. Chapitre 5) dont la fibre générique a pour genre 0 ou 1. On peut alors construire un champ méromorphe semi-complet X sur M qui est tangent à la fibration. Cela consiste essentiellement à choisir un champ holomorphe globalement défini (et donc complet) sur chaque “fibre générique”. Évidemment il faut faire ce choix de façon que le champ résultant soit holomorphe est globalement défini quand l’on regarde sur la variété ambiante. L’existence de ce champ permet alors de récupérer aisément la description classique des fibrations rationnelles et elliptiques.

Malheureusement des champs semi-complets tangents à une fibration n’existent que si le genre de la fibre typique est 0 ou 1. Cela nous empêche d’utiliser cette méthode pour traiter les fibrations de genre, disons, 2. La structure des fibrations de genre 2 a été discutée dans plusieurs papiers (cf. [Xi1], [Xi2] et leurs bibliographie). Une description complète de toutes ces fibrations ainsi que des surfaces ambiantes, comme celles classiques pour les fibrations rationnelles et elliptiques, ne semble pas être connue. Cela m’a conduit à proposer une généralisation de champs semi-complets, à savoir les champs “ k -déterminés” qui est adaptée à l’étude des fibrations de genre plus élevé. Avec ces champs, on a étudié le cas de genre 2 en détail. Certains de ces résultats seront rapidement mentionnés dans ce chapitre.

En tout généralité, l’étude de l’existence et la classification des champs méromorphes semi-complets sur les surfaces algébriques contient, en particulier, le problème classique de la classification des champs de vecteurs polynomiaux complets sur \mathbb{C}^2 (cf. [Ce-Sc] et sa bibliographie). Comme mentionné ci-dessus, ce problème a été résolu par M. Brunella en [Br1] en utilisant la théorie de McQuillan. De manière indépendante du travail de M. Brunella, j’ai pu utiliser les résultats de [Re10], [Re12] pour en donner une autre

démonstration du théorème de classification. Des analogies entre la théorie de McQuillan [Ma] et l'approche de [Re10], [Re12] suscitent plusieurs questions intéressantes. Celles-ci sont aussi à l'origine de certains de mes travaux en cours que je n'aborderai pas ici.

Le dernier chapitre de ce mémoire contient un résumé de certains résultats, soit sur des actions de groupes soit sur des champs de vecteurs semi-complets en dimension 3. Dans ce chapitre, mon style devient bien plus informel et je me suis permis d'inclure quelques questions ouvertes que je crois intéressantes. En ce qui concerne les champs semi-complets en dimension 3, je ne discuterai que de certains aspects des travaux de A. Guillot et de ma co-étudiante H. Reis.

Chapitre 2

Les flots holomorphes et leurs singularités

Les flots holomorphes sont des actions holomorphes de \mathbb{C} . Autrement dit, un flot holomorphe sur une variété complexe M de dimension n consiste en une application holomorphe $\Phi : \mathbb{C} \times M \longrightarrow M$ vérifiant les conditions suivantes :

- $\Phi(0, p) = p$ pour tout $p \in M$.
- $\Phi(T_1 + T_2, p) = \Phi(T_1, \Phi(T_2, p))$.

Un flot holomorphe Φ sur M induit un champ de vecteurs holomorphe X par l'équation

$$X(p) = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial T} \right|_{T=0} (T, p).$$

Réciproquement, un champ de vecteurs holomorphe X sur M est dit *complet* s'il engendre un flot holomorphe sur M . On remarque que tout champ de vecteurs holomorphe globalement défini sur une variété compacte est automatiquement complet.

2.1 Les champs semi-complets

Soit U un ouvert d'une variété complexe de dimension n et considérons un champ de vecteurs holomorphe X sur U .

Définition 2.1.1 ([Re1]) *Le champ X est dit semi-complet dans U s'il existe une application holomorphe $\Phi_{sg} : \Omega \subseteq \mathbb{C} \times U \longrightarrow U$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C} \times U$ contenant $\{0\} \times U$, qui satisfait les conditions suivantes :*

1. $\left. \frac{d}{dT} \Phi_{sg}(T, x) \right|_{T=0} = X(x)$ pour tout $x \in U$.
2. $\Phi_{sg}(T_1 + T_2, x) = \Phi_{sg}(T_2, \Phi_{sg}(T_1, x))$ dès que chaque membre est défini.
3. Soit x dans U et T_i une suite de nombres complexes telle que (T_i, x) est dans Ω et tend vers un point du bord de Ω . Alors $\Phi_{sg}(T_i, x)$ tend vers le bord de U (i.e. cette suite quitte tous les compacts contenus dans U).

Dans [Gu1], A. Guillot a proposé d'utiliser la définition suivante :

Définition 2.1.2 ([Gu1]) *Soit M une variété complexe et X un champ de vecteurs sur M . On dit que X est uniformisable (i.e. semi-complet) si pour tout point $p \in M$ où X ne s'annule pas, il existe un ouvert U_p de $(\mathbb{C}, 0)$ et un revêtement $\varphi : (U_p, 0) \rightarrow (L_p, p)$ qui est une solution de X .*

L'équivalence entre les définitions ci-dessus est claire. Récemment, A. Guillot m'a signalé que ces définitions avaient été déjà introduites par R. Palais dans un contexte de Groupes de Transformations (voir [Pa]). En effet, R. Palais définit la notion de “ G -groupe local de transformation maximal” dans [Pa], page 66. Soit G un groupe local de transformations d'un voisinage U d'un point $p \in M$ (voir [Pa] pour des définitions basiques). Un tel groupe est appelé *maximal* s'il satisfait l'une des 4 conditions équivalentes données par R. Palais en [Pa]. En particulier, sa quatrième condition s'énonce :

- ([Pa]) Si g_n est une suite dans $D_p G$ qui converge vers le bord de $D_p G$, alors la suite $g_n.p$ converge vers le bord de U . Ici $D_p G \subset G$ désigne la composante connexe contenant l'identité de l'ensemble des éléments g de G pour lesquels l'itération $g.p$ est définie.

La condition ci-dessus est évidemment à rapprocher de la définition (2.1.1). Autrement dit, un champ de vecteurs X défini sur U est semi-complet s'il est associé à un \mathbb{C} -groupe local de transformations maximal. Cependant, R. Palais n'a pas remarqué que, pour un champ de vecteurs, la condition d'être associé à un “ \mathbb{C} -groupe local de transformations maximal” entraîne des restrictions fortes sur la structure locale du champ X lui-même. Par contre, je veux ajouter que deux ans après [Re1], P. Ahern et J.-P. Rosay sont eux-aussi arrivés indépendamment à la notion de “singularité semi-complète” et à ses conséquences sur les singularités des champs de vecteurs holomorphes, cf. [A-R].

En effet, l'intérêt de la notion de champ semi-complet provient d'une part du fait que la restriction d'un champ *complet* X dans M à n'importe quel ouvert $U \subset M$ est automatiquement semi-complète. De plus, il est vrai que la restriction d'un champ semi-complet dans U à un ouvert $V \subset U$ est aussi semi-complète dans V . Cela nous permet de considérer des *germes de champs semi-complets* et, en particulier, des *singularités semi-complètes*. Les singularités semi-complètes sont celles associées à un champ X qui est semi-complet dans un certain (petit) voisinage de la singularité en question. En résumé, une singularité qui *n'est pas* semi-complète ne peut pas être réalisée par un champ complet sur une variété complexe M . En particulier elle ne peut pas être réalisée par un champ holomorphe globalement défini sur une variété complexe compacte.

En pratique, on dispose d'un critère plus efficace pour décider si un champ X donné sur un ouvert U est semi-complet ou non. Pour énoncer ce critère, on commence en rappelant qu'un champ X , non nécessairement semi-complet, définit un feuilletage holomorphe singulier \mathcal{F} sur U . De plus, chaque feuille régulière L de \mathcal{F} est naturellement équipée d'une différentielle holomorphe (ou plus généralement d'une 1-forme Abélienne) que l'on note dT . Cette forme dT est “l'inverse local du champ”, c'est-à-dire qu'elle est définie par l'équation $d_p T.X(p) = 1$. On appelle dT la *1-forme temps* induite par X sur

L . Observons aussi que, malgré la notation, la 1-forme temps n'est pas en général exacte, mais elle est bien sûr fermée. La définition de champ semi-complet entraîne alors :

Lemme 2.1.3 ([Re1]) *Soit X un champ semi-complet dans un ouvert connexe U de M et L une feuille non singulière de \mathcal{F} . Soit $c : [0, 1] \rightarrow L$ un chemin plongé (injectivement) dans L . Alors l'intégrale de dT le long de c n'est pas nulle.*

Lemme (2.1.3) nous permet de donner plusieurs exemples de champs qui ne sont pas semi-complets. Par l'intégration explicite on vérifie immédiatement que les champs méromorphes unidimensionnel $z^k \partial / \partial z$ ne sont pas semi-complets au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ si $k \geq 3$ ou $k \leq -1$. Avec un peu plus d'effort on démontre le lemme (2.1.4) ci-dessous (cf. [Re1], [Re9]).

Lemme 2.1.4 *Soit f une fonction holomorphe définie dans un voisinage épointé de $0 \in \mathbb{C}$. Supposons que le champ unidimensionnel $X = f(z) \partial / \partial z$ est semi-complet en ce voisinage. Alors f admet un prolongement holomorphe à $0 \in \mathbb{C}$. De plus $J^2(f)(0) \neq 0$, où $J^2(f)(0)$ désigne le deuxième jet de f en $0 \in \mathbb{C}$.*

Remarque 2.1.5 Considérons encore $X = f(z) \partial / \partial z$ comme au lemme (2.1.4). Si $f(0) = f'(0) = 0$, alors il est possible de démontrer que X est conjugué au champ quadratique $z^2 \partial / \partial z$.

2.2 Les singularités semi-complètes isolées

D'après la section précédente, il est intéressant d'étudier les singularités semi-complètes. On commence alors en considérant celles qui sont isolées et on envisage une classification de ces singularités, au moins en dimension 2. Le résultat ci-dessous a été démontré dans [Re1] et c'était la première indication qu'une telle classification était possible.

Théorème 2.2.1 ([Re1]) *Soit X un champ semi-complet défini au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 . Supposons que l'origine est une singularité isolée de X . Alors le deuxième jet de X en $(0, 0)$ est non nul.*

Une démonstration du théorème (2.2.1) peut être aisément obtenue en combinant le lemme (2.1.4) avec l'existence d'une *séparatrice* pour X qui découle de [C-S]. Ici on rappelle qu'une séparatrice pour un champ de vecteurs X est une courbe analytique passant par la singularité et invariante par le feuilletage \mathcal{F} défini par X (on note qu'en dimension 2 les singularités de feuilletages sont toujours isolées, ce qui n'est pas nécessairement vrai pour les champs de vecteurs).

En dimension plus grande que 2, il est connu qu'un champ de vecteurs à singularité isolée n'a peut-être pas de séparatrice. Par contre, on constate facilement qu'un champ de vecteurs *homogène*, toujours à singularité isolée, possède une droite invariante. Étant donné un champ X à singularité isolée et défini au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^n , on va désigner par X^k le champ *homogène* donné par la composante homogène du premier jet non-trivial de X à l'origine dont l'ordre est noté k . On a alors :

Théorème 2.2.2 ([Re1]) *Soit X un champ semi-complet défini au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^n . Soit X^k le champ homogène défini ci-dessus. Supposons que l'origine est une singularité isolée de X^k . Alors $k \geq 2$.*

Bien que le théorème (2.2.2) indique que l'hypothèse de semi-complétude entraîne des restrictions fortes sur la structure d'un champ de vecteurs en dimension quelconque, c'est en dimension 2 que l'on dispose des outils puissants pour chercher une classification de ces champs.

Le restant de ce chapitre sera donc consacré à la dimension 2 et à la description de la classification des singularités semi-complètes correspondantes.

Dans la suite de ce paragraphe on s'occupera exclusivement des singularités isolées. La première étape de la classification désirée consiste en comprendre les champs X semi-complets au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ et qui satisfont $J^1(X)(0, 0) = 0$. Cela est accompli par le théorème (2.2.3), obtenu en collaboration avec mon directeur E. Ghys, qui apporte une grande amélioration au théorème (2.2.1).

Théorème 2.2.3 ([Gh-Re]) *Supposons que X est un champ de vecteurs holomorphe semi-complet défini sur une surface complexe M . Soit p une singularité isolée de X où le premier jet de X s'annule. Alors il existe un voisinage $U \subseteq M$ de p sur lequel le champ X est holomorphiquement conjugué à l'un des champs ci-dessous :*

1. $f[x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y]$ où n est un entier positif ou nul.
 2. $f[x(x-2y)\partial/\partial x + y(y-2x)\partial/\partial y]$.
 3. $f[x(x-3y)\partial/\partial x + y(y-3x)\partial/\partial y]$.
 4. $f[x(2x-5y)\partial/\partial x + y(y-4x)\partial/\partial y]$.
- où f est une fonction holomorphe définie dans U et non nulle à l'origine.

Ce théorème décrit aussi les singularités isolées dont le premier jet est nilpotent (non-trivial). Si l'on remplace dans l'énoncé "où le premier jet de X s'annule" par "où le premier jet de X est nilpotent non-trivial", alors on trouve pour formes normales :

5. $f[(y-2x^2)\partial/\partial x - 2xy\partial/\partial y]$.
6. $f[(2y-x^2)\partial/\partial x + 2xy\partial/\partial y]$.
7. $f[(3y-x^2)\partial/\partial x + 4xy\partial/\partial y]$.
8. $f[2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y]$.

Une autre application du théorème (2.2.3) concerne le problème, à l'occasion encore ouvert (voir section 2.4), de la classification des surfaces complexes compactes possédant des champs de vecteurs holomorphes non-triviaux. En utilisant la classification des surfaces compactes d'Enriques-Kodaira et un théorème de Carrel-Howard-Kosniowski [C-H-K], on a encore démontré :

Théorème 2.2.4 ([Gh-Re]) *Soit X un champ de vecteurs holomorphe sur une surface complexe compacte M . Si X possède une singularité isolée où les premier jet de X s'annule, alors M est la surface F_n de Hirzebruch, $n \geq 0$. De plus, à automorphisme de F_n près, le champ X est unique et donné en coordonnées affines par*

$$x^2\partial/\partial x - y(nx - (n+1)y)\partial/\partial y.$$

La démonstration du résultat fondamental de [Gh-Re], théorème (2.2.3), se divise *grosso modo* en trois parties, à savoir :

- D’abord on montre que l’ensemble des champs semi-complets est fermé pour la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes. Ceci implique que la composante homogène du premier jet non-trivial d’un champ semi-complet est, elle même, semi-complète.

- Ensuite on classe les champs homogènes semi-complets (à singularité isolée ou non). Cela est possible car ces champs admettent des symétries radiales et sont donc “intégrables”. Outre les champs qui apparaissent dans le théorème (2.2.3), on trouve encore les formes normales suivantes :

9. $y^a f(x, y) \partial / \partial x$, où a est un entier et f un polynôme homogène de degré au plus 2.

10. $x[x\partial / \partial x + ny\partial / \partial y]$ avec n un entier.

11. $x^a y^a (x - y)(x\partial / \partial x - y\partial / \partial y)$ ou $x^i y^j (mx\partial / \partial x - ny\partial / \partial y)$ avec $im - jn \in \{-1, 0, 1\}$.

- La dernière partie du théorème consiste en montrer que les champs dont la première composante homogène appartient à la liste du théorème (2.2.3) sont, en fait, conjugués à leur partie quadratique. Ceci utilise notamment des résultats de J.F. Mattei et R. Moussu [M-M], [Ma] et de F. Loray [Lo1]. Finalement il s’agit de montrer que les modèles 9, 10 et 11 ne peuvent pas donner lieu à des champs semi-complets avec *une singularité isolée*. Cela est plus technique et utilise le théorème de réduction des singularités de A. Seidenberg [Sei] et des résultats spécifiques sur les singularités du type selle-nœud (cf. Section 2.3).

2.3 Les singularités non-isolées

Pour achever la classification des singularités semi-complètes en dimension 2, il faut encore regarder les champs de vecteurs à singularités non-isolées.

On commence en observant que l’étude développée dans les sections précédentes, nous donne plusieurs exemples de champs semi-complets à singularités non-isolées. Cela est évident pour les champs “9, 10, 11” de la section 2.2. De plus les champs “2, 3, 4, 6, 7, 8,” de la même section, admettent des intégrales premières holomorphes non-constantes. Ce sont respectivement les fonctions $xy(x - y)$, $xy(x - y)^2$, $xy^2(x - y)^3$, $y(x^2 - y)$, $y(x^2 - y)^2$ et $x^3 + y^2$. On peut donc trouver des nouveaux exemples en multipliant ces champs par les intégrales premières en question. Le résultat principal de [Re2] montre que ces exemples donnent “presque” tous les champs possibles. En fait, on a :

Théorème 2.3.1 ([Re-2]) *Soit X un champ défini et semi-complet au voisinage de l’origine de \mathbb{C}^2 . Supposons que X n’est pas identiquement nul et que l’origine n’est pas une singularité isolée de X . Alors X admet une des formes normales suivantes :*

A : Feuilletages quadratiques ($a \in \mathbb{N}$ et $f(0, 0) \neq 0$).

- $f.[xy(x - y)]^a [x(x - 2y)\partial / \partial x + y(y - 2x)\partial / \partial y]$
- $f.[xy(x - y)^2]^a [x(x - 3y)\partial / \partial x + y(y - 3x)\partial / \partial y]$.
- $f[xy^2(x - y)^3]^a [x(2x - 5y)\partial / \partial x + y(y - 4x)\partial / \partial y]$.

B : Feuilletages nilpotents ($a \in \mathbb{N}$ et $f(0,0) \neq 0$).

- $f \cdot [y(x^2 - y)]^a [(2y - x^2)\partial/\partial x + 2xy\partial/\partial y]$.
- $f \cdot [y(x^2 - y)^2]^a [(3y - x^2)\partial/\partial x + 4xy\partial/\partial y]$.
- $f \cdot [x^3 + y^2]^a [2y\partial/\partial x - 3x^2\partial/\partial y]$.

C : Feuilletages avec deux valeurs propres non nulles ($a \in \mathbb{N}$, $f(0,0) \neq 0$, $m, n \in \mathbb{N}$).

- $f \cdot x[x\partial/\partial x + ny\partial/\partial y]$.
- $f \cdot x^a y^a (x - y)(x\partial/\partial x - y\partial/\partial y)$
- $x^i y^j (mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y)$ avec $im - jn \in \{-1, 1\}$
- $f \cdot (x^n y^m)^a [mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y + \text{h.o.t.}]$.

D : Feuilletages réguliers: $y^a g(x, y)\partial/\partial x$ où $a \in \mathbb{N}$ est $g(x, y)$ admet une des formes suivantes :

$$g(x, y) = \text{cst}, \quad g(x, y) = x, \quad g(x, y) = x^2 + p_1(y)x + p_2(y)$$

avec p_1, p_2 holomorphes et $p_1(0) = p_2(0) = 0$.

Quand on travaille avec des singularités non-isolées, il est commode de distinguer un champ de vecteurs X et son feuilletage associé \mathcal{F} . Le champ X s'écrit $X = fY$ où f est une fonction holomorphe et Y un champ de vecteurs holomorphe n'ayant que des singularités isolées. Le feuilletage \mathcal{F} associé à X est donc celui défini par les orbites locales de Y .

Pour les notions de base sur les singularités des feuilletages holomorphe en dimension 2, nous renvoyons le lecteur à [Ce-Ma]. En particulier, en dimension 2, un feuilletage ne peut avoir que des singularités isolées.

Le théorème de Seidenberg affirme que la singularité d'un feuilletage \mathcal{F} comme ci-dessus peut être "simplifiée" par des suites d'éclatements jusqu'à n'avoir que certains modèles plus simples (dites irréductibles). Une singularité est dite *irréductible* si elle satisfait l'une des conditions ci-dessous :

- \mathcal{F} possède deux valeurs propres non nulles λ_1, λ_2 en la singularité. De plus $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$.
- \mathcal{F} possède exactement une valeur propre différente de zéro en la singularité. Dans ce cas, la singularité de \mathcal{F} est appelée une *selle-nœud*.

De façon plus précise, le théorème de Seidenberg assure l'existence d'une suite d'éclatements

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \xleftarrow{\pi_1} \tilde{\mathcal{F}}_1 \xleftarrow{\pi_2} \dots \xleftarrow{\pi_n} \tilde{\mathcal{F}}_n,$$

où $\tilde{\mathcal{F}}_i$ dénote la transformée stricte de \mathcal{F} par l'application d'éclatement π_i , qui satisfait :

- Les composantes irréductibles du diviseur exceptionnel (total) $(\pi_1 \circ \dots \circ \pi_n)^{-1}(0)$ sont des courbes rationnelles D_1, \dots, D_n d'auto-intersection strictement négative.
- Les singularités de $\tilde{\mathcal{F}}_n$ sont toutes réduites.

Les composantes irréductibles D_1, \dots, D_n ne sont pas nécessairement invariantes par $\tilde{\mathcal{F}}_n$. Cependant ceci doit toujours arriver si \mathcal{F} est associé à un champ semi-complet X dont l'ordre en l'origine est plus grand que 2. En effet, l'existence d'une composante non-invariante par $\tilde{\mathcal{F}}_n$ produit une infinité de séparatrices pour le feuilletage original \mathcal{F} . On

peut donc trouver une séparatrice sur laquelle le champ X ne s'annule pas identiquement. La restriction de X à une telle séparatrice n'est cependant pas semi-complète comme on l'a vu dans la section 2.2. Dans la suite nous supposons donc que le diviseur exceptionnel total est invariant pour $\tilde{\mathcal{F}}_n$.

Il est bien connu des spécialistes que les singularités dont la résolution ne contient pas de selle-nœud sont bien plus maniables. L'un des résultats les plus importants de [Re2] est le lemme (2.3.2) ci-dessous qui précisément va nous permettre d'exclure les selles-nœud de notre discussion.

Lemme 2.3.2 *Soit X un champ de vecteurs holomorphe dont le feuilletage associé \mathcal{F} définit une selle-nœud à l'origine de \mathbb{C}^2 . Supposons que X n'est pas à singularité isolée. Alors X n'est pas semi-complet.* \square

Soit alors X , \mathcal{F} comme dans l'énoncé du théorème (2.3.1). Le restant de la preuve de ce théorème se fait par récurrence à partir du "dernier niveau" de la suite de réduction de la singularité de \mathcal{F} . La structure de la preuve est assez proche de celle du théorème (2.2.3) bien que techniquement plus délicate. De façon similaire au théorème (2.2.4), ici on obtient encore une application au problème de classification des champs holomorphes sur les surfaces compactes complexes. Cela est le contenu du

Théorème 2.3.3 ([Re2]) *Soit X un champ de vecteurs holomorphe globalement défini sur une surface complexe compacte M . Soit $\text{Sing}(X)$ une composante connexe du lieu singulier de X qui n'est pas réduite à un point isolé. Alors la courbe analytique $\text{Sing}(X)$ n'admet que des singularités nodales.*

2.4 Quelques questions complémentaires et applications

Le théorème (2.3.1) et le lemme (2.3.2) nous laissent encore quelques questions en suspens. La plus immédiate peut-être étant celle de savoir quelles sont les singularités du type selle-nœud qui sont associées à un champ holomorphe semi-complet à singularité isolée. Or, les singularités du type selle-nœud ont été décrites de manière très détaillée par J. Martinet et J.P. Ramis dans [M-R1]. Il s'agit donc d'utiliser leur présentation pour identifier les singularités qui nous intéressent. Bien que les selles-nœuds ont un grand espace de modules [M-R1], celles associées à des champs semi-complets sont parfaitement classifiées par le théorème suivant :

Théorème 2.4.1 ([Re3]) *Supposons que \mathcal{F} est un feuilletage holomorphe définissant une singularité de type selle-nœud au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Supposons de plus que \mathcal{F} est associé à un champ holomorphe semi-complet X . Alors \mathcal{F} est analytiquement conjugué au feuilletage donné par la 1-forme*

$$\omega = x(1 + \lambda y) dy - y^2 dx$$

avec $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Une autre question naturelle motivée par le théorème (2.3.1) est celle de savoir s'il existe un champ semi-complet de la forme $f.(x^n y^m)^a [mx\partial/\partial x - ny\partial/\partial y + \text{h.o.t.}]$ qui ne soit pas linéarisable. L'espace de modules des feuilletages associés à ces champs a été décrit dans [M-R2] d'une façon plus au moins analogue à les selle-nœuds de [M-R1]. Encore une fois ces espaces de modules sont assez large, mais cette fois l'hypothèse "semi-complète" n'apporte pas de restrictions trop sévères. Par exemple on montre dans [Re3] que les champs non-linéarisables

$$x^n y^m \left[mx \frac{\partial}{\partial x} - ny(1 + x^{kn} y^{km}) \frac{\partial}{\partial x} \right]$$

sont tous semi-complets au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$.

Finalement on peut se demander si une singularité de feuilletage ayant deux valeurs propres non-nulles est toujours associée à un champ semi-complet. Le cas difficile de la question étant précisément les singularités dont le quotient des valeurs propres est réel négatif (le "domaine de Siegel") car ceci correspond au cas où la linéarisation n'est pas toujours possible. Il s'avère que la réponse est affirmative.

Théorème 2.4.2 ([Re3]) *Soit \mathcal{F} un feuilletage holomorphe défini au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que les deux valeurs propres de \mathcal{F} en $(0, 0)$ sont différentes de zéro. Alors il existe un champ de vecteurs holomorphe X tangent au feuilletage \mathcal{F} et semi-complet au voisinage de $(0, 0)$.*

La classification des singularités holomorphes semi-complètes a été utilisée d'abord par D. Cerveau et B. Scardua dans leur travail sur les champs de vecteurs polynomiaux complets de \mathbb{C}^2 [Ce-Sc]. Comme on le verra au Chapitre 4, ce problème a ultérieurement connu une solution optimale.

D'autre part, nos applications au problème de classification des couples "surface complexe compacte avec champ holomorphe globalement défini" ont un peu perdu de leur intérêt car G. Dloussky, K. Oeljeklaus et T. Matei ont finalement répondu à cette question en donnant une liste complète de tels couples, voir [D-O-T1], [D-O-T2]. On remarque cependant que le papier [D-O-T1] utilise fortement notre classification de singularités semi-complètes (isolées ou non).

Chapitre 3

Les sous-groupes non-discrets de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$

Dans ce chapitre, $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ désignera le groupe des difféomorphismes analytiques réels du cercle qui respectent l'orientation. La généralisation de tous nos résultats aux difféomorphismes qui renversent l'orientation est cependant facile. Soit alors Γ un sous-groupe de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ et considérons la dynamique de Γ .

D'un point de vue "abstrait" il est naturel de diviser les groupes Γ comme ci-dessus en deux classes selon qu'ils sont discrets ou non. Quoi que ce soit la définition de "discret" qu'on utilise, les exemples les plus simples et mieux connus sont les groupes Fuchsien. Par contre, les groupes non-discrets les plus étudiés sont ceux qui possèdent un ensemble de générateurs proches de l'identité. Le caractère "non discret" de ces groupes est précisé, en classe analytique, par le théorème (3.1.3) ci-dessous.

3.1 Les théorèmes de Duminy, Shcherbakov, Nakai et Ghys

Dans la suite $\text{Diff}^r(\mathbb{S}^1)$ désigne le groupe de difféomorphismes de classe C^r du cercle qui préservent l'orientation. Le cas $r = \omega$ correspondra aux difféomorphismes analytiques réels.

Alors que la dynamique des groupes Fuchsien est un sujet très développé, la dynamique des groupes $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité est moins connue. Le résultat le plus classique étant un théorème non-publié de G. Duminy [Du] qui, selon A. Navas [Nav1], s'énonce :

Théorème 3.1.1 ([Du], voir aussi [Nav1]) *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que, si $\Gamma \subset \text{Diff}^2(\mathbb{S}^1)$ est un sous groupe engendré par un ensemble Λ de difféomorphismes dont au moins l'un a un nombre fini de points périodiques, et tels que $|f''(x)| \leq \delta$ pour tout $f \in \Lambda$ et $x \in \mathbb{S}^1$, alors Γ n'admet pas de minimal exceptionnel. Autrement dit, soit Γ possède une orbite finie soit toutes ces orbites sont denses.*

Il y a une analogie bien connue entre (groupes de) difféomorphismes du cercle et (groupes de) germes de difféomorphismes holomorphes fixant $0 \in \mathbb{C}$. Notons $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes.¹ Ceci nous permet de poser des questions analogues pour la dynamique des sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. Elles ont été résolues par A. Shcherbakov et I. Nakai [Sh1], [Nak]. Les divers théorèmes dans [Sh1], [Nak] ainsi que les contributions de chaque auteur sont bien décrits par exemple dans [Lo2], pages 15 et 16. Ici on se contentera d'énoncer leur résultat central dans une version légèrement technique.

Pour cela considérons deux éléments f_1, f_2 de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ dont les séries de Taylor s'écrivent respectivement

$$f_1(z) = z + c_1 x^{r_1+1} + \dots, \quad (3.1)$$

$$f_2(z) = z + c_2 x^{r_2+1} + \dots, \quad (3.2)$$

avec $c_1 c_2 \neq 0$ et $r_2 > r_1 > 0$. Observons qu'un sous-groupe non-résoluble de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ contient toujours des éléments f_1, f_2 comme ci-dessus. Réciproquement deux difféomorphismes f_1, f_2 comme dans (3.1), (3.2) engendrent un groupe qui n'est jamais résoluble. Il est aussi vrai qu'un tel groupe n'est jamais discret, dans un certain sens à préciser (voir Remarque 3.1.4).

D'autre part, la dynamique topologique d'un élément f de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ tangent à l'identité est bien comprise, il s'agit de la célèbre "fleur" (voir [C-G]). Les "pétales" de la "fleur" consistent en des points qui sont attirés vers l'origine par la dynamique de f . Elles sont en particulier contenues dans le bassin d'attraction de f (en l'origine) noté $\text{Bas}(f)$.

Théorème 3.1.2 ([Sh1], [Nak]) *Soient f_1, f_2 comme dans (3.1), (3.2). Il existe un champ de vecteurs analytique (réel), sans singularité, défini dans $\text{Bas}(f_1) \setminus \{0\}$ avec les propriétés suivantes :*

1. *Pour chaque temps fixé, l'application correspondante induite par le flot local de X est holomorphe.*
2. *Soient V un ouvert relativement compact de $\text{Bas}(f_1) \setminus \{0\}$ et $t_0 > 0$ un réel positif tel que le flot local Φ^t de X est défini dans V pour tout $0 \leq t \leq t_0$. Alors il existe une suite d'applications $\{h_n\} \subset \Gamma_{f_1, f_2}$ qui converge uniformément vers Φ^{t_0} dans V (où Γ_{f_1, f_2} désigne le groupe engendré par f_1, f_2).*
3. *Quitte à choisir n très grand, la suite h_n mentionnée ci-dessus est donnée explicitement par $h_n = f_1^{-n} \circ f_2^{v(n)} \circ f_1^n$ où $\{v(n)\} \subset \mathbb{N}$ est une suite telle que $v(n).n^{(r_1-r_2)/r_1}$ converge vers t_0 lorsque $n \rightarrow \infty$.*

En utilisant le théorème (3.1.2), les auteurs montrent que la dynamique associée à un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ non-résoluble a des orbites localement denses et est

¹parfois on pensera les éléments de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ comme des difféomorphismes locaux de $(\mathbb{C}, 0)$ et des sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ comme les pseudo-groupes qui en résultent.

topologiquement rigide. Il est aussi facile de caractériser les composantes ergodiques. Ce sont simplement les ensembles minimaux du groupe.

Comme on l'a déjà remarqué, la généralisation de ces théorèmes au cercle en apporterait des réponses à certaines questions suscitées par le théorème de G. Duminy. Ces généralisations nécessitent cependant de l'hypothèse de "non-discrétude" du groupe en question (qui est automatique dans $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ comme on va bientôt le voir). Dans son approche à ces questions [Gh1], E. Ghys a montré que les sous-groupes non-résolubles de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ engendré par des éléments "proches de l'identité" sont non-discrets tout en donnant un sens aux expressions "proche de l'identité" et "non-discret". Pour énoncer son théorème, considérons \mathbb{S}^1 comme le cercle unité dans \mathbb{C} . Supposons aussi que $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est engendré par l'ensemble fini $S = \{f_1, \dots, f_l\}$ (notation : $\Gamma = \langle f_1, \dots, f_l \rangle = \langle S \rangle$). Étant donné deux éléments g, h de Γ , désignons par $[g, h]$ le commutateur $[g, h] = g \circ h \circ g^{-1} \circ h^{-1}$. Finalement on définit une suite d'ensembles $S(k)$, $k \in \mathbb{N}$, de façon inductive par la règle ci-dessous :

- $S(0) = S$.
- $S(k + 1)$ est l'ensemble dont les éléments sont de la forme $[g^{\pm 1}, h^{\pm 1}]$ avec $g \in S(k)$ et $h \in S(k) \cup S(k - 1)$ ($h \in S$ si $k = 0$).

Rappelons que \mathbb{S}^1 est regardé comme le cercle unité dans \mathbb{C} . Pour $0 < \tau < 1/4$, on désigne par $A_{2\tau}$ l'anneau défini par $A_{2\tau} = \{z \in \mathbb{C} ; 1 - 2\tau < \|z\| < 1 + 2\tau\}$. Finalement, si f appartient à $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$, alors f admet un prolongement holomorphe \tilde{f} à un voisinage de $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. Étant donné $\varepsilon > 0$ et $0 < \tau < 1/4$, soit $U_{2\tau}^\varepsilon \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ l'ensemble constitué par les difféomorphismes $f \in \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ tels que :

1. f admet un prolongement holomorphe \tilde{f} à $A_{2\tau}$.
2. $\sup_{z \in A_{2\tau}} \|\tilde{f}(z) - z\| < \varepsilon$.

Théorème 3.1.3 ([Gh1]) *Pour tout $0 < \tau < 1/4$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, si $S = \{f_1, \dots, f_l\}$ est contenu dans $U_{2\tau}^\varepsilon$ et $\Gamma = \langle S \rangle$ est non-résoluble, alors on a :*

1. $S(k)$ ne se réduit pas à l'identité pour aucun $k \geq 0$.
2. Chaque $h_k \in S(k)$ possède un prolongement holomorphe \tilde{h}_k à l'anneau $A_\tau = \{z \in \mathbb{C} ; 1 - \tau < \|z\| < 1 + \tau\}$.
3. Si $h_k \in S(k)$, alors $\sup_{z \in A_\tau} \|\tilde{h}_k(z) - z\| < 2^{-k}\varepsilon$.

Le théorème (3.1.3) montre bien qu'un sous-groupe Γ comme dans l'énoncé est non-discret en ce sens qu'il possède une suite non-triviale d'éléments qui converge vers l'identité, par exemple, en topologie C^∞ sur \mathbb{S}^1 .

Remarque 3.1.4 Les estimations qui conduisent à la preuve du théorème (3.1.3) sont locales et valables en dimensions plus grandes. Lorsqu'on les applique au cas d'un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ engendré par des éléments f_1, f_2 comme dans (3.1) (3.2), elles entraînent que Γ contient une suite non-triviale d'éléments h_k définis sur un voisinage uniforme de $0 \in \mathbb{C}$ convergeant uniformément vers l'identité sur ce voisinage.

3.2 Des sous-groupes non-discrets aux flots

D'après le théorème (3.1.3), il restait à construire un flot non-trivial dans l'adhérence de $\Gamma = \langle S \rangle$, où $S = \{f_1, \dots, f_l\} \subset U_{2\tau}^\varepsilon$, τ, ε comme dans l'énoncé. L'idée immédiate est de répéter l'argument classique des groupes de Lie (ou des groupes topologiques sans petits sous-groupes, voir [Ka]). Plus précisément, on voudrait itérer les difféomorphismes h_k jusqu'à une puissance $n(k)$ convenable de sorte qu'ils soient à une distance inférieurement bornée de l'identité. Ensuite on cherche des sous-suites convergentes à partir d'un procédé "diagonal". La difficulté évidente est que le groupe $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ n'est pas localement compact (au contraire des groupes de Lie de dimension finie). Ces sous-suites convergentes peuvent donc ne pas exister. Cela peut être partiellement remédié en utilisant un théorème de compacité comme celui de Ascoli-Arzelà ou celui de Montel, qui est directement adapté à notre situation. On cherche alors des puissances $n(k)$ telles que l'on ait :

- $\tilde{h}_k^{n(k)}$ est défini dans $A_{\tau/2}$.
- $Cst_1 < \sup_{z \in A_{\tau/2}} \|\tilde{h}_k^{n(k)}(z) - z\| < Cst_2$, pour certaines constantes uniformes $Cst_2 > Cst_1 > 0$.

Il n'est pas difficile de trouver des puissances $n(k)$ et des constantes $Cst_2 > Cst_1 > 0$ comme ci-dessus. On pense alors à utiliser le théorème de Montel pour garantir l'existence des sous-suites convergentes sur, par exemple, l'anneau $A_{\tau/4}$. Par contre, il est encore possible que la restriction à $A_{\tau/4}$ des difféomorphismes $h_k^{n(k)}$ converge vers l'identité. En effet, la condition $\sup_{z \in A_{\tau/2}} \|\tilde{h}_k^{n(k)}(z) - z\| > Cst_1 > 0$ ne dit rien sur la norme de $(\tilde{h}_k^{n(k)}(z) - z)$ dans l'anneau $A_{\tau/4}$. Le flot construit de cette manière serait donc *trivial*. Pour assurer que ce phénomène n'arrive pas, et donc que le flot résultant est non-trivial, il faut modifier le domaine de définition à chaque instant pour "exclure" les régions où le difféomorphisme ne se comporte pas comme souhaité. Ceci peut être accompli en conjuguant les difféomorphismes par une contraction locale. Cette contraction (ou expansion selon le goût) locale peut aisément être obtenue à partir, par exemple, de l'existence d'un point fixe hyperbolique pour un élément quelconque du groupe. Ainsi j'ai finalement réussi à construire des flots dans l'adhérence du groupe Γ qui sont analogues à ceux de Shcherbakov et Nakai pour les sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. En combinant cela avec la description de la dynamique topologique d'un sous-groupe non-résoluble $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ engendré par des difféomorphismes proches de l'identité, [Du], [Gh1], on obtient :

Théorème 3.2.1 ([Re4]) *Il existe un voisinage \mathcal{U} de l'identité dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ avec la propriété suivante : si $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est un groupe non-résoluble engendré par des éléments contenus dans \mathcal{U} , alors il existe un champ de vecteurs X (sans singularité) défini au voisinage de n'importe quel point non-périodique p de Γ dont le flot local est contenu dans l'adhérence de Γ .*

On remarque que les points périodiques de Γ ont un stabilisateur non-résoluble. C'est-à-dire que la dynamique au voisinage de ces points peut être analysée en utilisant les champs de Shcherbakov et Nakai (qui sont "asymptotiques"). En particulier, on a trouvé l'analogie "ergodique" du théorème de Duminy en classe analytique :

Corollaire 3.2.2 *Soit Γ comme dans l'énoncé du théorème (3.2.1). Supposons que Γ n'a pas de points périodiques. Alors Γ est ergodique par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. tout borélien invariant par Γ est de mesure de Lebesgue nulle ou totale.*

A. Navas [Nav1] a récemment démontré que ce résultat sur l'ergodicité reste vrai en classe C^2 pour un groupe engendré par des difféomorphismes f vérifiant $|f''(x)| \leq \delta$ où δ est la constante du théorème de Duminy (3.1.1). À vrai dire, il a besoin aussi de supposer que l'ensemble des points périodiques d'au moins un de ses générateurs consiste en de points isolés (une hypothèse toujours vérifiée en classe analytique). Les méthodes qu'il utilise sont à rapprocher de celles de Duminy et ne sont pas basées sur l'existence de champs de vecteurs.

Remarque 3.2.3 On peut se poser la question de savoir s'il existe un champ de vecteur globalement défini sur \mathbb{S}^1 . De même que l'on peut se poser la question de l'existence d'un champ de Shcherbakov-Nakai qui soit défini au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$. Cette dernière question a une réponse négative. Je dois ce contre-exemple à Frank Loray et il apparaît dans notre papier conjoint [L-R]. Soit $\Gamma_0 \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le sous-groupe engendré par $g(z) = z/(1-2z)$ et $h(z) = z/\sqrt{1-4z^2}$, avec la détermination $\sqrt{1} = 1$. D'après [Be-C-L], on sait que ce groupe est libre et, en particulier, non-discret au sens de la Remarque (3.1.4). Or, les séries de Taylor centrées en $0 \in \mathbb{C}$ des difféomorphismes locaux g, g^{-1}, h, h^{-1} ont toutes leurs coefficients dans \mathbb{Z} . Il en est donc de même pour tout élément de Γ_0 . Cependant, si X est un champ de vecteurs non-trivial défini au voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, il existe un temps $t \neq 0$, tel que les coefficients de Taylor du difféomorphisme local Φ^t induit par le flot de X ne sont pas tous entiers. Un tel difféomorphisme ne peut donc pas être approché par des éléments dans Γ_0 .

À ma connaissance, il n'existe pas de contre exemple explicite à cette question dans le cas de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$. Mais le fait que la réponse est négative dans $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ semble être une indication qu'un tel champ global n'existe pas en tout généralité.

Plus généralement, on a des théorèmes complètement analogues à ceux de Shcherbakov et Nakai. En particulier le théorème de rigidité topologique.

Théorème 3.2.4 ([Re4]) *Soit $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ comme ci-dessus et supposons que $S_1 = \{f_1^1, \dots, f_l^1\}$ et $S_2 = \{f_1^2, \dots, f_l^2\}$ sont contenus dans \mathcal{U} . Supposons de plus qu'il existe un homéomorphisme h du cercle qui conjugue h_i^1 à h_i^2 et que les groupes engendrés par S_1, S_2 sont non-résolubles. Alors h est, en fait, un élément de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$.*

Encore dans le papier [Nav1], A. Navas a démontré que ce théorème reste vrai en classe C^2 (ou C^r $r \geq 2$) dans les mêmes conditions de son théorème ergodique. Cependant il faut supposer en plus que l'homéomorphisme en question est non-singulier par rapport à la mesure de Lebesgue.

Motivé par le théorème de rigidité topologique et par des questions de théorie ergodique, je me suis intéressé à la question de savoir si un théorème de "rigidité mesurable" pour ces groupes était vrai. À ma connaissance, cette question était ouverte aussi pour

$\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ et peut-être même pour des sous-groupes de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ agissant sur le cercle (remarque de A. Zeghib). Rappelons les définitions nécessaires.

Soit $\tilde{\Gamma}$ un groupe non-résoluble (abstrait) engendré par des éléments $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$. Considérons deux représentations fidèles ρ_1, ρ_2 de $\tilde{\Gamma}$ dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ et posons $\Gamma_1 = \rho_1(\tilde{\Gamma})$, $\Gamma_2 = \rho_2(\tilde{\Gamma})$. Un *isomorphisme de mesure* entre Γ_1, Γ_2 est une application mesurable $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ satisfaisant :

- Il existe un autre application mesurable $\varphi^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ telle que $\varphi \circ \varphi^{-1}(x) = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$ p.p. $x \in \mathbb{S}^1$.
- φ préserve la classe de la mesure de Lebesgue μ , i.e. μ et $\varphi^*\mu$ ont les mêmes ensembles de mesure nulle.
- $\varphi \circ \rho_1(\gamma_i) \circ \varphi^{-1}(x) = \rho_2(\gamma_i)(x)$ p.p. $x \in \mathbb{S}^1$.

Théorème 3.2.5 ([Re5]) *Soit $\tilde{\Gamma}$ et ρ_1, ρ_2 comme ci-dessus. Il existe un voisinage \mathcal{U} de l'identité dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ telle que, si $\rho_1(\gamma_i), \rho_2(\gamma_i)$ appartiennent à \mathcal{U} pour tout $i = 1, \dots, l$, alors sont équivalents :*

1. Γ_1, Γ_2 sont C^ω -conjugués i.e. il existe $f \in \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ tel que $f \circ \rho_1(\gamma_i) \circ f^{-1}(x) = \rho_2(\gamma_i)(x)$, $x \in \mathbb{S}^1$.
2. Il existe un isomorphisme de mesure φ entre Γ_1, Γ_2 , i.e. $\varphi \circ \rho_1(\gamma_i) \circ \varphi^{-1}(x) = \rho_2(\gamma_i)(x)$ p.p. $x \in \mathbb{S}^1$.

De plus, à un revêtement fini près, l'isomorphisme de mesure φ coïncide p.p. avec un élément de $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$.

3.3 L'action diagonale et le théorème de Lie

Ce paragraphe est consacré au théorème (3.3.2), obtenu avec mon ancien étudiant R. Silva, dont l'énoncé m'avait été suggéré par E. Ghys. Ce théorème se voit comme une version "locale" du théorème "infinitésimal" de Lie qui classe les algèbres de Lie de dimension finie sur $(\mathbb{R}, 0)$. Avant de donner l'énoncé précis et d'expliquer sa relation avec le théorème classique de Lie, je veux mentionner deux autres motivations que Raderson et moi avons eues concernant ce genre de questions.

Pensons un sous-groupe $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ comme étant l'image d'une représentation fidèle ρ d'un groupe abstrait $\tilde{\Gamma}$ engendré par des éléments $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$. Cela nous permet de considérer l'action diagonale de Γ (ou de $\tilde{\Gamma}$) sur n -copies du cercle \mathbb{S}^1 qui s'identifie naturellement au tore de dimension n , \mathbb{T}^n . Si (x_1, \dots, x_n) appartient à $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$, alors on pose $\gamma.(x_1, \dots, x_n) = (\rho_1(\gamma)(x_1), \dots, \rho_l(\gamma)(x_n))$ pour tout $\gamma \in \tilde{\Gamma}$. Ceci définit l'action diagonale sur \mathbb{T}^n .

L'étude de l'action diagonale sur le tore \mathbb{T}^2 est la clé pour la démonstration du théorème (3.2.5). En effet, dans le papier [Re5], j'avais construit des champs de vecteurs sur des ouverts de \mathbb{T}^n qui sont dans l'adhérence de l'action diagonale correspondante. L'idée pour en déduire le théorème (3.2.5) consiste alors à regarder sur \mathbb{T}^2 le graphe de

l'isomorphisme de mesure φ . Il s'agit d'une courbe mesurable invariante par l'action de Γ sur \mathbb{T}^2 . Le fait que cette courbe est un graphe implique qu'il n'y a pas de champs de vecteurs dans l'adhérence de Γ sur \mathbb{T}^2 qui soit *vertical* en un point "générique" de cette courbe. On montre par contre que l'ensemble des points de \mathbb{T}^2 où l'action de Γ sur \mathbb{T}^2 n'admet pas de champs de vecteurs verticaux est une courbe analytique. Donc le graphe de l'isomorphisme de mesure doit être contenu, au sens de la mesure, dans cette courbe et cela nous conduit à la preuve du théorème.

De façon indépendante, M. Belliard, I. Liousse et F. Loray ont regardé l'action d'un sous-groupe non-résoluble de $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ sur *le fibré de jets d'ordre infini* de $(\mathbb{C}, 0)$. Ils démontrent dans [B-L-L] que la complexité d'une telle dynamique sur $(\mathbb{C}, 0)$ persiste sur ce fibré. Cela leur a permis de conclure que certaines équations différentielles ordinaires complexes ne possèdent aucune structure géométrique invariante, autre la structure conforme évidente. Il en résulte une réponse négative à certaines questions posées dans [C-Sc].

Comme la nature de l'action sur des fibrés de jets n'est pas si différente de l'action diagonale, on avait déjà deux applications de ce genre d'idées. On a alors décidé de discuter la dynamique d'un sous groupe non-discret $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ sur les tores de dimension arbitraire. Le but était de prouver l'énoncé suggéré par E. Ghys qui a finalement été parfaitement atteint ; c'est le théorème (3.3.2).

Dans la suite μ denote la mesure de Lebesgue normalisée sur le tore \mathbb{T}^n . Étant donné un groupe $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$, on parlera simplement de *l'action de Γ sur \mathbb{T}^n* pour l'action diagonale définie ci-dessus. On dira alors que Γ est *ergodique* sur \mathbb{T}^n si tout borélien de \mathbb{T}^n μ -p.p. invariant sur Γ est de mesure nulle ou totale. Si un tel Γ n'est pas ergodique, alors on peut considérer ses composantes ergodiques. Pour simplifier les énoncés, on introduit une définition.

Définition 3.3.1 *Soit G un groupe de transformations mesurables agissant sur une variété M équipée de la mesure de Lebesgue normalisée μ . Le groupe G est dit ergodique par morceaux, si et seulement si :*

- a) *Il existe un ensemble fini d'ouverts U_1, \dots, U_m invariants par G et tels que l'union $\bigcup_{i=1}^m U_i$ est de mesure μ totale.*
- b) *La restriction de l'action de G à chaque U_i est ergodique par rapport à la restriction de μ et minimale (i.e. tous les orbites sont denses).*
- c) *Chaque U_i a un nombre fini de composantes connexes qui sont permutées par l'action de G .*

On a alors :

Théorème 3.3.2 ([R-RS]) *Il existe un voisinage \mathcal{U} de l'identité dans $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ telle que, si $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est un groupe infini engendré par un ensemble fini S de difféomorphismes avec $S \subset \mathcal{U} \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$, alors on a :*

1. Γ est ergodique par morceaux sur \mathbb{S}^1 sauf si Γ est une extension finie de \mathbb{Z} .

2. Si Γ n'est pas une extension finie de \mathbb{Z} , alors il est ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^2 sauf si Γ est abélien.
3. Si Γ n'est pas abélien, alors il est ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^3 sauf si Γ est conjugué à un sous-groupe d'un revêtement fini du groupe affine de la droite $\text{Aff}(\mathbb{R})$.
4. Si Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe d'un revêtement fini du groupe affine $\text{Aff}(\mathbb{R})$, alors il est ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^4 sauf si Γ est conjugué à un sous-groupe d'un revêtement fini de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.
5. Si Γ n'est pas conjugué à un sous-groupe d'un revêtement fini de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, alors il est ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.3.3 Les ensembles ouverts U_i 's qui interviennent dans le théorème (3.3.2) sont, en fait, des unions finies de sous-variétés ouvertes proprement plongées qui, de plus, se comportent localement comme des ensembles analytiques. Comme, par définition, la dynamique de Γ sur ces ouverts a tous les orbites denses, notre théorème caractérise aussi les composantes minimales de ces actions.

Le théorème (3.3.2) est clairement optimal : une extension finie d'un difféomorphisme "pôle sud - pôle nord" n'est pas ergodique par morceaux ; le groupe de rotations du cercle est ergodique, abélien mais il n'est pas ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^2 ; le groupe affine de la droite $\text{Aff}(\mathbb{R})$ n'est pas ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^3 puisqu'il préserve les ensembles de niveau de la fonction réelle définie sur \mathbb{T}^3 à partir de la raison croisée où le point "à l'infini" a été fixé. Finalement un sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ne peut pas être ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^4 car il préserve les ensembles de niveau de la raison croisée considérée comme une fonction de \mathbb{T}^4 à valeur dans \mathbb{S}^1 .

Comme les groupes Fuchsien ne peuvent pas être ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^4 , ce théorème nous donne aussi la première "classe" large de groupes finiment engendrés qui sont ergodiques par morceaux sur \mathbb{T}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, on sait aussi qu'un sous-groupe de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ ayant un point fixe commun est conjugué à un sous-groupe de $\text{Aff}(\mathbb{R})$ et est donc résoluble. Ainsi on obtient une version "diagonale" du théorème de M. Belliard, I. Lioussse et F. Loray mentionné ci-dessus :

Corollaire 3.3.4 *Soit Γ comme au théorème (3.3.2). Supposons que Γ n'est pas résoluble et qu'il possède un point fixe commun $p \in \mathbb{S}^1$. Alors Γ est ergodique par morceaux sur \mathbb{T}^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Il faut encore expliquer l'analogie entre le théorème (3.3.2) et la classification de Lie des algèbres de Lie de dimension finie de l'algèbre des champs de vecteurs analytiques sur \mathbb{S}^1 . Si G est un groupe de Lie agissant sur le cercle et Γ est un sous-groupe non-discret de G , alors la fermeture $\bar{\Gamma}$ de Γ est un groupe de Lie ayant une algèbre de Lie non-triviale. Le théorème de Lie nous permet alors de reconnaître cette algèbre. Le théorème (3.3.2) montre que de ce point de vue le groupe topologique de dimension infinie $\text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ se comporte de façon cohérente comme un groupe de Lie. En effet, supposons

que $\Gamma \subset \text{Diff}^\omega(\mathbb{S}^1)$ est non-discret (ce qui peut être garanti par exemple par la “version de dimension infinie du lemme de Zassenhaus”, i.e. théorème 3.1.3). Alors, soit Γ possède une des algèbres de Lie de dimension finie possibles, soit Γ possède une “algèbre de Lie de dimension infinie” ce qui se manifeste par l’ergodicité par morceaux de Γ sur le produit de n’importe quel nombre de copies de \mathbb{S}^1 . Autrement dit, si on considère l’ergodicité par morceaux pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme un analogue d’une algèbre de Lie de dimension infinie (voir Remarque 3.3.5), alors le théorème de Lie peut être interprété comme une version “infinitésimale” du théorème (3.3.2).

Remarque 3.3.5 Les algèbres de Lie de dimension finie du théorème de Lie correspondent à des groupes de Lie dont l’action sur les tores de dimension, respectivement, 2, 3 et 4 préserve un feuilletage. Observons que ces feuilletages admettent une intégrale première. En général, si G est un groupe de Lie agissant sur une variété M , on peut considérer l’action diagonale de G sur le produit de n copies de M . Alors, le fait que G soit de dimension finie, implique que, pour n suffisamment grand, cette action préserve un feuilletage sur la variété produit. Cela montre que l’idée d’interpréter l’ergodicité par morceaux pour tout n comme un analogue d’une algèbre de dimension infinie est “raisonnable”.

Chapitre 4

Les feuilletages rationnels de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$

Ce chapitre est entièrement consacré au papier [L-R] de Frank Loray et moi-même ainsi qu'à certains résultats connexes.

4.1 Quelques théorèmes classiques

Un champ de vecteurs sur \mathbb{C}^{n+1} dont les coefficients sont de polynômes homogènes de degré $d \in \mathbb{N}$,

$$X = H_0(x) \frac{\partial}{\partial x_0} + H_1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + H_n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}, \text{ avec } x = (x_0, \dots, x_n),$$

définit un feuilletage régulier par courbes sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \text{Sing}(X)$, où $\text{Sing}(X)$ désigne l'ensemble singulier de X . Les feuilles de ce feuilletage sont les courbes intégrales complexes de X . Comme les polynômes H_i sont homogènes de même degré, ce feuilletage, ainsi que l'ensemble $\text{Sing}(X)$, est invariant par homothéties. Il induit donc un feuilletage \mathcal{F} singulier sur $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ dont on note $\text{Sing}(\mathcal{F})$ l'ensemble singulier. Quitte à diviser X par le diviseur commun des H_i (ce qui ne modifie pas le feuilletage), on peut supposer que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ est de codimension au moins 2. La réciproque est également vraie : tout feuilletage par courbes de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ dont le lieu singulier est un ensemble analytique de codimension ≥ 2 peut être obtenu de cette manière.

On notera $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ l'espace de ces feuilletages où les polynômes H_i sont de degré d et ne présentent aucun facteur commun. Dans ce chapitre, les membres de $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ sont appelés les *feuilletages de degré d de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$* . Il est clair que $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ est une variété complexe de dimension finie. Plus précisément, elle s'identifie naturellement à un ouvert de Zariski d'un espace projectif $\mathbb{C}\mathbb{P}(N)$ de dimension convenable. Dans la suite on supposera toujours que $d, n \geq 2$.

La dynamique globale d'un membre générique de $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ est assez mal connue. On sait que toutes les singularités sont hyperboliques et en nombre $(d^{n+1} - 1)/d - 1$. De plus, un tel feuilletage ne possède pas de courbe algébrique invariante (voir [LN-So]).

Dans les années 70, l'École Russe a étudié les feuilletages de $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ que laissent la droite à l'infini Δ invariante. Dénotons par $\text{Fol}^d(\mathbb{C}^2) \subset \text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(2))$ cette classe de feuilletages.

La combinaison de résultats de Hudai-Verenov, A. Shcherbakov et surtout Yu. Il'Yashenko entraîne :

Théorème 4.1.1 ([HV], [Il1], [Sh1]) *Pour $d \geq 2$, il existe un ouvert dense de mesure totale $\mathcal{A}^d \subset \text{Fol}^d(\mathbb{C}^2)$ dont les éléments possèdent uniquement des singularités hyperboliques et satisfont les conditions suivantes :*

Minimalité: *Outre la droite à l'infini, toutes les feuilles sont denses dans \mathbb{C}^2 .*

Ergodicité: *Tout borélien invariant par le feuilletage est de mesure de Lebesgue nulle ou totale.*

Rigidité: *Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{A}^d \subset \text{Fol}(\mathbb{C}^2)$ sont conjugués par un homéomorphisme de $\mathbb{CP}(2)$ proche de l'identité, alors ils sont aussi conjugués par une transformation affine.*

Voici un résumé de la démonstration. On regarde d'abord le groupe d'holonomie de la droite à l'infini $\text{Hol}(\Delta)$ (c'est-à-dire le groupe d'holonomie de $\Delta \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$) et on vérifie qu'il s'agit, génériquement, d'un groupe "large" (par exemple, non-résoluble). Ensuite on démontre qu'un tel groupe présente une dynamique "compliquée", avec, par exemple, toutes les orbites denses (on peut comparer cela aux résultats de [Sh1] et [Nak] chronologiquement postérieurs). On suppose de plus que le feuilletage n'a pas de courbes algébriques invariantes (la généricité de cette hypothèse dans un certain sens, était connue depuis [Jo]) et que les singularités sont hyperboliques. Alors, en utilisant le fait que \mathbb{C}^2 est Stein, on peut démontrer que toutes les feuilles affines d'un tel \mathcal{F} intersectent une section transversale à $\Delta \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Ceci nous permet d'en déduire des propriétés dynamiques de \mathcal{F} , par exemple la densité des feuilles, à partir des propriétés analogues de $\text{Hol}(\Delta)$.

Cependant, comme on l'a vu, la classe $\text{Fol}^d(\mathbb{C}^2) \subset \text{Fol}^d(\mathbb{CP}(2))$ est en fait contenue dans un ensemble de Zariski de grande codimension. Elle est donc d'intérieur vide et de mesure nulle dans $\text{Fol}^d(\mathbb{CP}(2))$. Néanmoins le résultat ci-dessus a été amélioré, mentionnons en particulier [GM-Bo], [GM], [LN-Sa-Sc]. L'hypothèse sur l'existence d'une courbe algébrique invariante a toujours été présente dans ces travaux de sorte qu'ils ne s'appliquent qu'à des feuilletages bien spéciaux.

En [Ce], D. Cerveau a construit un ouvert de feuilletages de $\mathbb{CP}(2)$ dont toutes les feuilles sont denses, un résultat aussi obtenu par B. Mjuller. Dans [Mj], B. Mjuller a trouvé des exemples de feuilletages de $\mathbb{CP}(3)$ tangent au plan à l'infini et possédant toutes les feuilles affines denses.

Dans son rapport pour la conférence d'Helsinki ([Il2]), Yu. Il'Yashenko a, cependant, conjecturé que presque "tous les feuilletages de $\text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n))$ satisfont à des conditions analogues à celles du théorème (4.1.1)". Le but de l'article [L-R] qui sera discuté dans la suite du chapitre est de donner une réponse partielle à cette conjecture en montrant qu'il y a des ensembles ouverts de $\text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n))$ dont les membres ont les propriétés en question.

4.2 Des ouverts de feuilletages chaotiques

Dans [L-R] nous avons démontré le

Théorème 4.2.1 ([L-R]) *Pour tout $d \geq 2$, il existe un ouvert non-vide $\mathcal{U} \subset \text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ tel que tout feuilletage $\mathcal{F} \in \mathcal{U}$ a des singularités hyperboliques et satisfait :*

Minimalité: *Tous les feuilles sont denses dans $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$.*

Ergodicité: *Tout borélien invariant par le feuilletage est de mesure de Lebesgue nulle ou totale.*

Rigidité: *Si $\mathcal{F}, \mathcal{F}' \in \mathcal{U} \subset \text{Fol}(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ sont conjugués par un homéomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ proche de l'identité, alors ils sont aussi conjugués par une transformation projectif.*

La stratégie de preuve du théorème (4.2.1) est essentiellement la même que celle utilisée pour le théorème (4.1.1). Pour accomplir cela, on est toutefois confrontés à trois difficultés. D'abord, pour étudier les feuilletages "génériques", même en dimension 2, il faut travailler avec des feuilles ayant un "petit" (disons cyclique) groupe fondamental. Ceci est en contraste avec l'existence d'une courbe algébrique invariante qui nous permet d'avoir un "grand" groupe fondamental. Cette difficulté sera surmontée en considérant des perturbations de feuilletages, avec une feuille ayant un "grand" groupe d'holonomie, et en démontrant que la "complexité dynamique" d'un tel groupe persiste après la perturbation.

Quand la dimension de l'espace ambiant est supérieure à 2, un nouveau élément arrive : les groupes (ou plus généralement pseudo-groupes) d'holonomie des feuilletages considérés sont des sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}^{n-1}, 0)$ ou, en fait, des pseudo-groupes de transformations de la boule unité de \mathbb{C}^{n-1} . Leur étude est bien plus délicate que dans le cas de dimension 1, en particulier, il peut exister des groupes libres discrets (cf. remarque 3.1.4).

Finalement, une fois que les résultats sur des pseudo-groupes de transformation auront été établis, il va falloir les réaliser par un feuilletage de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$. Cela n'est pas immédiat et est relié au problème de Riemann-Hilbert dans le cas où la représentation de monodromie est proche de l'identité. Il y a aussi une difficulté supplémentaire pour déduire des propriétés dynamiques globales à partir de leurs analogues pour les pseudo-groupes : le complémentaire d'une courbe en $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$ ($n \geq 3$) n'est plus Stein. On va donc considérer des "drapeaux" invariants.

Tout comme les théorèmes de Shcherbakov et Nakai, il est raisonnable d'espérer que nos résultats sur les pseudo-groupes puissent avoir d'autres applications. Voici un exemple typiques des résultats que l'on obtient.

Théorème 4.2.2 *Soient f_1, \dots, f_k des éléments de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ et supposons que leurs parties linéaires A_1, \dots, A_k engendrent un sous-groupe dense de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Alors il y a des constantes $\varepsilon, r > 0$ tels que pour toute collection de transformations holomorphes g_1, \dots, g_k de la boule unité de \mathbb{C}^n dans \mathbb{C}^n , vérifiant $\|g_i - f_i\|_{B^n(r)} \leq \varepsilon$ engendre un pseudo-groupe qui est ergodique et minimal dans la boule $B^n(r)$ ou dans la boule $B^n(r)$ épointée selon que ces transformations ont un point fixe commun ou non.*

Le théorème ci-dessus a été démontré indépendamment par S. Lamy [La] pour $n = 2$. Un peu plus tard, deux papiers par M. Belliard [Be1], [Be2], ont présenté une amélioration de ce théorème. En effet, en combinant ces méthodes avec la classification des algèbres

de Lie filtrées, il parvient à démontrer que, quitte à faire des hypothèses génériques additionnelles, le pseudo-groupe en question approxime n'importe quel germe de difféomorphisme holomorphe de $B^n(r)$ dans \mathbb{C}^n .

4.3 La construction des pseudo-groupes

Observons d'abord l'existence de sous-groupes libres, discrets de $GL(n, \mathbb{C})$ dès que $n \geq 2$. Des exemples de tels groupes sont donnés par les groupes de Schottky agissant sur $\mathbb{C}\mathbb{P}(n-1)$. Plus précisément les groupes de Schottky sont, en fait, des sous-groupes de $SL(n, \mathbb{C})$ mais qui peuvent être représentés par des matrices dans $GL(n, \mathbb{C})$. Il sera donc nécessaire que la partie linéaire des groupes considérés ne soit pas discrète dans $GL(n, \mathbb{C})$. Il serait même convenable, pour simplifier les arguments, d'avoir ces parties linéaires denses dans $GL(n, \mathbb{C})$.

Les sous-groupes finiment engendrés Γ de $GL(n, \mathbb{C})$ qui sont denses dans $GL(n, \mathbb{C})$ tout entier ne sont cependant pas "stables". En effet, un sous-groupe de \mathbb{C}^* engendré par deux nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ est discret ou dense dans \mathbb{C}^* selon qu'ils sont multiplicativement dépendants sur \mathbb{Z} ou non. Bien que la plupart (au sens de la théorie de la mesure) de ces groupes soient denses, la propriété d'être dense n'est pas ouverte (i.e. stable). Cela entraîne l'affirmation ci-dessus pour $GL(n, \mathbb{C})$, $n \geq 2$, grâce au sous-groupe de \mathbb{C}^* induit à partir du déterminant des matrices dans $GL(n, \mathbb{C})$.

D'autre part, la fermeture d'un sous-groupe non-discret de $GL(n, \mathbb{C})$ est elle-même un groupe de Lie avec une algèbre non-triviale. On peut alors utiliser la structure de l'algèbre de $GL(n, \mathbb{C})$ pour trouver des sous-groupes "aussi grand que possibles" et qui soient encore stables par perturbation de leurs générateurs. Dans [L-R], on appelle "gros" un groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ contenant un sous-groupe dense dans $SL(n, \mathbb{C})$. On vérifie aisément que la fermeture d'un tel groupe est de la forme $\Lambda \times SL(n, \mathbb{C})$ où $\Lambda \subset \mathbb{C}^*$. On démontre alors :

Proposition 4.3.1 ([L-R]) *L'ensemble $\mathcal{U} \subset GL(n, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$ formé des matrices A, B qui engendrent un "gros" sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$ est ouvert et dense. De plus son intersection avec un voisinage de (I, I) est un sous-ensemble de mesure de Lebesgue totale de ce voisinage.*

Il n'est pas difficile de trouver un analogue de la proposition (4.3.1) pour le groupe affine de \mathbb{C}^n . Dans cette section, on va plutôt essayer d'expliquer les idées de [L-R] dans le cas de sous-groupes de $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$. Le cas plus général (et crucial pour ce travail) des pseudo-groupes de transformations holomorphes sans point fixe commun, sera juste mentionné en connexion avec le premier cas.

Supposons maintenant que $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ est un groupe finiment engendré par des difféomorphismes locaux dont les parties linéaires engendrent, elles-mêmes, un sous-groupe "gros" de $GL(n, \mathbb{C})$. En utilisant le théorème (3.1.3) de E. Ghys, on conclut aisément que ces groupes ne sont pas discrets, au sens de la remarque (3.1.4). Tout cela se généralise facilement au cas de pseudo-groupes sans point fixe commun.

La difficulté la plus importante, toujours en considérant $\Gamma \subset \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ comme ci-dessus, sera bien sûr de construire un flot non-trivial dans l'adhérence de Γ . C'est bien l'absence d'un résultat de compacité locale qui pose cette difficulté. Pour la surmonter, on supposera que les groupes en question (ou même les pseudo-groupes sans point fixe commun) possèdent un élément f ayant un point fixe hyperbolique (que l'on peut supposer l'origine) dont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfont

$$0 < |\lambda_n|^2 < |\lambda_1| < \dots < |\lambda_n| < 1.$$

Cette hypothèse peut être affaiblie, mais ceci n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème (4.2.1). On remarque tout de suite qu'il s'agit d'une condition ouverte. De plus un tel difféomorphisme est toujours linéarisable. Il peut donc être écrit comme $A(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$. Pour illustrer la rôle jouée par cette hypothèse, considérons une application holomorphe $g : B^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, B^n étant la boule unité, qui est "proche de l'identité". La série de Taylor de g s'écrit comme

$$g = V + M.(x_1, \dots, x_n) + O(x_1^2, \dots, x_n^2)$$

où $M.(x_1, \dots, x_n)$ dénote la partie linéaire de g appliquée au vecteur (x_1, \dots, x_n) et $V = g(0)$. Si l'on conjugue g par une puissance N de A , on obtient

$$\|A^{-N} \circ g \circ A^N - A^{-N} \circ (V + M.(x_1, \dots, x_n)) \circ A^N\| \leq \left[\frac{|\lambda_n|^2}{|\lambda_1|} \right]^N O(x_1^2, \dots, x_n^2).$$

On voit donc que cette conjugaison augmente la norme de la partie affine de g , alors qu'elle réduit la norme des termes non-linéaires car $|\lambda_n|^2 < |\lambda_1|$. Autrement dit, avec cette construction la norme de $(g - id)$ est "concentrée" sur la partie linéaire. On doit donc être capable "d'oublier" les termes de degré plus élevé. Puisque les termes linéaires définissent un groupe de Lie de dimension finie (le groupe affine), on a retrouvé la "compacité locale" dont on avait besoin. On peut rendre ces idées heuristiques plus rigoureuses en utilisant, par exemple, les méthodes discutées au Chapitre 3. Bien sûr, il y a un nombre de difficultés techniques dont on doit tenir compte. Par exemple les domaines de définitions des éléments du pseudo-groupe doivent être uniformes. Tout cela est expliqué en détail dans [L-R] où on arrive à démontrer le théorème (4.2.2). Dans le même ordre d'idées on vérifie que ces groupes sont topologiquement rigides.

4.4 Construction de feuilletages

Pour démontrer le théorème (4.2.1), il va falloir, en particulier, réaliser des pseudo-groupes comme à l'énoncé du théorème (4.2.2) dans le pseudo-groupe (grupoïde) d'holonomie d'un feuilletage \mathcal{F} de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$.

Soit alors $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ l'ensemble des feuilletages holomorphes de degré d de $\mathbb{C}\mathbb{P}(n)$. D'après [LN-So], on sait que l'ensemble des éléments de $\text{Fol}^d(\mathbb{C}\mathbb{P}(n))$ qui n'ont pas de

courbes algébrique invariante et dont toutes les singularités sont hyperboliques contient un ouvert de Zariski de $\text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n))$.

L'idée pour réaliser des pseudo-groupes spéciaux dans les pseudo-groupes (groupoïde) d'holonomie d'un feuilletage $\mathcal{F} \in \text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n))$, commence avec un exemple où l'holonomie puisse être calculée explicitement. Il est naturel de penser au problème classique de Riemann-Hilbert et de considérer un feuilletage qui laisse une droite projective invariante. Pour des raisons de notations, on va travailler dans $\mathbb{CP}(n+1)$ au lieu de $\mathbb{CP}(n)$. De plus on notera les coordonnées de \mathbb{C}^{n+1} par (w, x) , où $x = (x_1, \dots, x_n)$. Étant donné des matrices M_1, \dots, M_d de taille $n \times n$ et des points $w_1, \dots, w_d \in \mathbb{C}$, soit $X(M_1, \dots, M_d)$ la famille de champs de vecteurs

$$\frac{\partial}{\partial w} + \sum_{i=1}^d \frac{M_i x}{w - w_i} \frac{\partial}{\partial x}$$

où $M_i x \partial / \partial x = \sum_{i,j} m_{i,j} x_j \partial / \partial x_i$, avec $M = (m_{i,j})$. Finalement soit $\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$ le feuilletage correspondant sur $\mathbb{CP}(n+1)$. On vérifie :

- $\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$ est de degré d et est tangent à la droite projective induite par $\{x = 0\} = \{x_1 = \dots = x_n = 0\}$.
- les singularités de $\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$ sur la droite induite par $\{x = 0\}$ correspondent aux points $w = w_1, \dots, w = w_d$ et $w = \infty$.
- les hyperplans sur ces singularités sont invariants par $\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$.
- l'holonomie locale de chaque singularité $w = w_i$ est induite par une matrice $A_i \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$ agissant dans \mathbb{C}^n (identifié à l'hyperplan mentionné ci-dessus).

Soit $\mathcal{V} \subset \text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n+1))$ la sous-variété paramétrée par les feuilletages $\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$. On a alors une application naturelle Mono : $\mathcal{V} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}(n, \mathbb{C})$ (d fois). Cette application est définie par

$$\text{Mono}[\mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)] = (A_1, \dots, A_d).$$

En particulier, on a $\text{Mono}[\mathcal{F}(I, \dots, I)] = (I, \dots, I)$ où I désigne la matrice identité de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. La proposition ci-dessous de [F-R] est une variante de la célèbre solution de Lappo-Danilevskii au problème de Riemann-Hilbert lorsque la représentation de monodromie est proche de l'identité.

Proposition 4.4.1 ([F-R]) *L'application Mono est un difféomorphisme local au voisinage de $\mathcal{F}(I, \dots, I) \in \mathcal{V}$.*

Comme \mathcal{V} et $\text{GL}(n, \mathbb{C}) \times \dots \times \text{GL}(n, \mathbb{C})$ (d fois) sont des variétés de dimension finie, la preuve de la proposition (4.4.1) repose sur le théorème d'inversion locale. Il suffit de démontrer que la dérivée de Mono en $\mathcal{F}(I, \dots, I)$ est un isomorphisme. Cela peut

effectivement être vérifié car les matrices A_i sont explicites dès que les deux conditions ci-dessous soient satisfaites :

- Toutes les matrices M_i 's, sauf une que l'on noté M_{i_0} , sont égales à l'identité.
- La matrice M_{i_0} diffère de l'identité par une seule entrée.

Il suffira alors de faire tous les possibles choix d'ensemble de d matrices vérifiant ces conditions pour conclure que la dérivée de Mono en $\mathcal{F}(I, \dots, I)$ est surjective. La proposition en résulte.

On choisit alors un feuilletage $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}(M_1, \dots, M_d)$ dont les holonomies locales sont proches de l'identité et tel que les singularités $w = w_1, \dots, w = w_d$ et $w = \infty$ sont toutes hyperboliques. Rappelons que les singularités hyperboliques sont persistentes. C'est-à-dire que, si $\mathcal{F}' \in \text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n+1))$ est suffisamment proche de \mathcal{F}_0 , alors \mathcal{F}' a $d+1$ singularités hyperboliques correspondantes à la "persistance" des singularités $w = w_1, \dots, w = w_d$ et $w = \infty$. L'holonomie locale de chacune de ces singularités est une matrice de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$. Ceci nous permet donc de prolonger l'application Mono à un voisinage de \mathcal{F}_0 dans $\text{Fol}^d(\mathbb{CP}(n+1))$ (et non seulement dans \mathcal{V}). De plus, la proposition (4.4.1) entraîne que cette dernière application est une submersion locale. Comme la "perturbation" \mathcal{F}' peut être choisie de façon à n'avoir plus de courbes algébriques invariantes [LN-So], il est maintenant clair qu'il existe \mathcal{F}' réalisant un pseudo-groupe comme dans le théorème (4.2.2).

Résumons ce que l'on vient de prouver. Il existe un feuilletage \mathcal{F}' arbitrairement proche de \mathcal{F}_0 (et donc arbitrairement proche de $\mathcal{F}(I, \dots, I)$) dont le pseudogroupe (groupoïde) d'holonomie contient, dans un voisinage de la droite $\{x = 0\}$ de \mathcal{F}' , un pseudogroupe ayant toutes les orbites denses (et ergodique et topologiquement rigide). Pour simplifier les notations, nous dirons qu'un tel pseudo-groupe est "chaotique". D'autre part, il nous reste deux choses à faire :

1. "Globaliser" le chaos du pseudo-groupe mentionné, i.e. montrer par exemple que toutes les feuilles de \mathcal{F}' sont denses
2. Comme la rigidité topologique pour les pseudo-groupes d'holonomie entraîne que \mathcal{F}' est transversalement "topologiquement rigide", il restera à conclure qu'elle est aussi rigide "le long des feuilles".

La deuxième étape est cependant "facile". Sous certaines hypothèses, X. Gomez-Mont montre dans [GM] qu'un feuilletage "transversalement topologiquement rigide" est "globalement topologiquement rigide".

Pour la première étape, considérons d'abord le cas de $\mathbb{CP}(2)$. Le complémentaire de $\{x = 0\}$ est donc Stein. Il s'ensuit que toutes les feuilles régulières de \mathcal{F}_0 viennent s'accumuler sur cette droite. En utilisant des arguments standards de compacité, on se convainc aisément que toutes les feuilles de \mathcal{F}' rentrent dans le domaine de définition de notre pseudo-groupe "chaotique". Cela résout ce premier cas.

Supposons maintenant que l'on travaille dans $\mathbb{CP}(3)$. La remarque fondamentale consiste à observer que l'on peut choisir \mathcal{F}_0 qui, de plus, laisse invariant *un 2-plan contenant la droite* $\{x = 0\}$. Autrement dit, \mathcal{F}' laisse un 2-drapeaux invariant (i.e. un 2-plan et une droite dans ce plan). Le complémentaire du drapeaux est évidemment Stein. Tout en gardant le 2-plan invariant, on perturbe \mathcal{F}_0 dans le 2-plans et, grâce à la discussion ci-

dessus, on rend toutes les feuilles denses dans ce 2-plan. De plus toutes les autres feuilles de ce nouveau feuilletage viennent s'accumuler sur le 2-plan en question. Finalement, on détruit le 2-plan par une deuxième perturbation. On arrive ainsi à garantir que toutes les feuilles du feuilletage final sont "capturées" par le pseudo-groupe chaotique d'holonomie.

Le théorème (4.2.1) se démontre en continuant ce procédé inductivement.

Chapitre 5

Champs méromorphes semi-complets

Ce chapitre peut être vu comme une généralisation des résultats du chapitre 2 au cas *méromorphe*. Celle-ci ne se limite pas à une question technique car des champs de vecteurs méromorphes semi-complet interviennent dans certains problèmes classiques comme on va le voir.

5.1 Des exemples et les cas intégrables

Comme motivation pour ce qui suivra, on considère la question de classier tous les champs polynomiaux complets de \mathbb{C}^2 . Diverses classifications de ces champs ont été proposées (voir la bibliographie de [Ce-Sc]) mais une classification optimale n'était pas connue.

Dans [Br1] M. Brunella a utilisé la théorie de McQuillan [Ma] pour donner une réponse définitive à cette question. De façon indépendante, je m'étais intéressé au même problème mais avec une approche très différente. En effet, dans [Re10] et [Re12] j'ai classifié les singularités des champs de vecteurs méromorphes semi-complets dans \mathbb{C}^2 . La classification des champs polynomiaux complets apparaît comme un cas particulier, car un tel champ se prolonge en un champ méromorphe sur $\mathbb{CP}(2)$: le diviseur de pôles de ce champ étant simplement la droite à l'infini. Les papiers [Br1] et [Re10] sont parus plus ou moins à la même époque. Par contre [Re12], où la classification des singularités méromorphes semi-complètes est achevée (et qui contient une nouvelle preuve de la classification de [Br1]) n'est paru qu'environ 10 mois plus tard. Dans ce chapitre on discutera certains points de ces papiers et aussi de [Re9] et [Re11] avec une attention toute particulière aux applications.

Outre le problème des champs de vecteurs polynomiaux complets sur \mathbb{C}^2 , il y a une question classique qui met en jeu des champs semi-complets. Rappelons qu'une *fibration* (singulière) sur une surface complexe M est la donnée d'une application holomorphe non-constante $\mathcal{P} : M \rightarrow S$ de M sur une surface de Riemann S compacte. Comme une telle application n'a qu'un nombre fini de valeurs singulières $\{p_1, \dots, p_k\} \subset S$, il résulte que \mathcal{P} restreint à $M \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{P}^{-1}(p_i)$ est une fibration régulière sur $S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ (au sens différentiable). Les pré-images $\mathcal{P}^{-1}(p_i)$ sont appelées les fibres singulières. Le genre de la

fibration est le genre (en tant que surface de Riemann) d'une fibre générique. Si le genre est 0 (resp. 1) la fibration est dite *rationnelle* (resp. *elliptique*).

Une fibration rationnelle ou elliptique est globalement munie d'un champ de vecteurs méromorphe semi-complet qui, de plus, est tangent aux fibres, voir [Re9]. En effet, si on ne considère qu'un voisinage d'une fibre singulière, on peut même supposer que le champ est holomorphe. Cependant ceci ne simplifie pas l'argument, de sorte qu'on va travailler directement avec des champs méromorphes, d'autant plus qu'ils seront nécessaires dans la suite. Réciproquement, l'existence du champ mentionné ci-dessus caractérise la fibration, c'est-à-dire que si une fibration admet un champ méromorphe tangent aux fibres et semi-complet alors son genre est 0 ou 1. En particulier, on peut utiliser l'existence de ces champs pour étudier comment les fibres régulières dégèrent, i.e. pour décrire les possibles "voisinages tubulaires feuilletés" des fibres singulières [Re9]. La description de ces surfaces étant un résultat bien connu de Kodaira, cette interprétation nous permet de nous placer dans un contexte plus "dynamique". En effet, les orbites du champ de vecteurs mentionné sont les fibres elles-mêmes et donc compactes. Autrement dit, ces champs n'ont pas de "dynamique riche". Cependant dans le problème général de classier les champs de vecteurs méromorphes semi-complets (en particulier, celui de la classification des champs polynomiaux complets de \mathbb{C}^2), les champs considérés ne sont pas sujets à cette contrainte. C'est-à-dire que dans ces problèmes on peut trouver des situations avec une dynamique plus riche et regarder cela comme une généralisation "dynamique" de la description de Kodaira.

Avant de discuter la classification des champs méromorphes semi-complets, on va regarder de plus près la structure des fibrations sur les surfaces. Pour les fibrations de genre 2 ou plus grand, on ne dispose pas d'une description aussi détaillée que celle donnée par Kodaira dans le cas elliptique (le cas rationnel étant connu par l'école italienne d'Enriques etc). Lorsque que le genre est 2, ou plus généralement pour les fibrations "hyperelliptiques", il y a une littérature vaste (voir [Xi1], [Xi2]). Malheureusement, je n'ai pas trouvé dans cette littérature une présentation systématique du sujet (disons qui soit parallèle à celle de Kodaira pour le genre 1) même pour les fibrations de genre 2. J'ai appris aussi de K.O. Sthör qu'une bonne partie des méthodes utilisées dans ces questions sont issues du papier [Sf] et reviennent à considérer l'involution du corps des fonctions associées qui est induite par l'involution hyperelliptique dans les fibres.

En tous cas, je voulais utiliser des champs de vecteurs tangents aux fibres d'une fibration pour étudier les voisinages des fibres singulières, disons pour les fibrations de genre 2. Comme ces fibrations n'admettent pas de champs semi-complets tangents aux fibres (voir plus haut), j'ai proposée la définition suivante :

Définition 5.1.1 ([Re11]) *Soit X un champ de vecteur méromorphe sur une variété complexe M . Soit \mathcal{F} le feuilletage associé à X et, étant donnée une feuille régulière L de \mathcal{F} , notons dT_L la 1-forme temps induite par X sur L . Nous dirons que X est k -déterminé sur M si pour toute feuille L comme ci-dessus et tout point $p \in L$, il existe au plus $k - 1$ points $q_1, \dots, q_{k-1} \in L$ sujets à la condition suivante : pour chaque q_i , il existe un chemin $c : [0, 1] \rightarrow L$ joignant p à q_i le long duquel l'intégrale de dT_L s'annule.*

Si $\mathcal{P} : M \rightarrow S$ est une fibration de genre 2, alors on démontre qu'elle admet un champ tangent aux fibres et 2-déterminé. Ce champ, d'ailleurs, peut être vu sur chaque fibre de la façon suivante : on considère le quotient de la fibre par l'involution hyperelliptique. Ce quotient étant isomorphe à $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$, le champ cherché n'est autre que l'image réciproque par l'application quotient d'un champ *complet* sur $\mathbb{C}\mathbb{P}(1)$. Autrement dit, pour ces fibrations, notre point de départ est le même que celui issu de [Sf]. Notre argument cependant s'applique aussi aux fibrations de genre 3 où il y a un champ tangent aux fibres et 3-déterminé (alors qu'il n'y a pas d'automorphisme de la fibre en général).

D'un point de vue plus effectif, dans [Re10] on a classifié toutes les singularités des champs 2-déterminés qui sont associés aux fibrations de genre 2 (la liste étant un peu longue on ne la reproduira pas ici). En travaillant avec B. Santoro, nous avons alors été en mesure de donner une description de ces fibrations qui est analogue à celle de Kodaira pour les fibrations elliptiques (le papier en question doit paraître bientôt). Évidemment ces calculs deviennent rapidement très compliqués lorsque le genre de la fibration augmente. Pour le cas des fibrations semi-stables, il est peut-être possible de donner des résultats plus généraux.

Ceci dit, on revient à la classification des champs méromorphes semi-complets au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. D'abord observons que, parmi les champs de vecteurs étudiés au Chapitre 2, ceux qui ont des intégrales premières non-triviales donnent des exemples de champs méromorphes semi-complets. En effet, il suffit de les multiplier par une puissance convenable de leurs intégrales premières (i.e. une puissance négative si l'intégrale première est holomorphe). Dans [Re9] on démontre que ce sont tous les exemples de champs de vecteurs méromorphe semi-complets satisfaisant les deux conditions ci-dessous :

- L'origine n'est pas une singularité dicritique.
- Dans le procédé de réduction de la singularité de Seidenberg, on ne trouve pas de singularités du type selle-nœud (i.e. la singularité est une "courbe généralisée").

On appellera les champs obtenus ci-dessus *intégrables*.

5.2 Les résultats principaux et les selle-nœuds

Une grande partie de la difficulté du cas méromorphe par rapport au cas holomorphe résulte précisément de la présence de singularités du type selle-nœud. D'après le lemme (2.3.2), on sait qu'un champ holomorphe semi-complet n'admet pas une telle singularité. Cependant dans [Re10], on prouve :

Lemme 5.2.1 ([Re10]) *Supposons que Y est un champ de vecteurs méromorphe semi-complet défini au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Supposons de plus que le feuilletage \mathcal{F} associé à Y est une selle-nœud. Alors, à un facteur multiplicatif inversible près, Y admet une des formes normales suivantes :*

1. $Y = x(1 + \lambda y)\partial/\partial x + y^2\partial/\partial y, \lambda \in \mathbb{Z}$.
2. $Y = y^{-p}[(x(1 + \lambda y^p) + yR(x, y))\partial/\partial x + y^{p+1}\partial/\partial y]$.

3. $Y = y^{1-p}[(x(1 + \lambda y^p) + yR(x, y))\partial/\partial x + y^{p+1}\partial/\partial y]$ où la monodromie induite par \mathcal{F} est triviale (donc $\lambda \in \mathbb{Z}$ et la variété faible de \mathcal{F} est convergente).

Pour expliquer le théorème de classification des champs méromorphes semi-complets, on ajoutera quelques hypothèses qui permettent de simplifier la discussion. Cela est aussi fait dans les papiers [Re10] et [Re12]. On peut alors fixer comme but la démonstration du théorème ci-dessous (qui est aussi le résultat principal de [Br1]).

Théorème 5.2.2 ([Br1], ([Re12]) *Soit X un champ de vecteurs polynomial complet dans \mathbb{C}^2 et dont l'orbite typique est isomorphe à \mathbb{C} . Alors le flot de X préserve un pinceau rationnel dans $\mathbb{CP}(2)$.*

Rappelons aussi que les pincesaux rationnels dans $\mathbb{CP}(2)$ ont été classifiés par M. Suzuki [Su2] de sorte qu'il est facile d'en déduire des formes normales explicites pour ces champs (voir [Br1]). Il est intéressant de remarquer aussi que, parmi ces champs, certains présentent des selles-nœuds dans l'arbre de résolution de leurs singularités à l'infini. En effet, on peut trouver des exemples qui, de plus, ont une intégrale première entière dans \mathbb{C}^2 (cf [Su1]). Cette intégrale première ne sera cependant pas algébrique, à cause de la présence des singularités du type selle-nœud à l'infini.

Dans la situation du théorème (5.2.2), les hypothèses ci-dessous sont toujours satisfaites (voir [Re10], [Re12]).

- Le diviseur des zéros de X est vide et les orbites de X ne contiennent pas deux périodes linéairement indépendantes.
- X n'a pas de singularité dicritique. De plus, le diviseur de pôles de X au voisinage d'une singularité est (localement) contenu dans une séparatrice lisse de cette singularité.
- Au voisinage d'une singularité contenue dans le diviseur de pôles de X (i.e. la droite à l'infini), X s'écrit $X = y^{-k}Z$ où Z est un champ de vecteur holomorphe dont l'ordre en la singularité est au plus k .

Alors que nos méthodes ne sont pas limitées à ces singularités, une classification plus générale n'apporterait pas vraiment d'idées nouvelles. Cela explique pourquoi dans ces papiers, nous avons démontré le théorème (5.2.2).

Dans la preuve de nos théorèmes, la rôle clef est jouée par la notion *d'ordre asymptotique* d'un champ de vecteurs sur une séparatrice lisse. Pour expliquer cela, considérons un champ de vecteurs méromorphe Y défini au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Notons $Y = fZ$ où Z est un champ *holomorphe* pour lequel l'origine est une singularité isolée. Le feuilletage induit par les orbites locales de Z n'est autre que le feuilletage \mathcal{F} associé à Y . Si \mathcal{F} admet une séparatrice lisse S , on peut supposer sans perte de généralité qu'il s'agit de l'axe $\{y = 0\}$. Posons $Z = F\partial/\partial x + G\partial/\partial y$. L'ordre de \mathcal{F} le long de S , $\text{ord}_S(\mathcal{F}, (0, 0))$ est alors défini comme étant l'ordre à $0 \in \mathbb{C}$ de la fonction $x \mapsto F(x, 0)$. Dans [C-S], l'indice de \mathcal{F} le long de S est défini comme

$$\text{Ind}_{(0,0)}(\mathcal{F}, S) = \text{Ind}_{(0,0)}(\mathcal{F}, \{y = 0\}) = \text{Res} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{G}{F} \right) (x, 0) dx .$$

Finalemment écrivons aussi $Y = y^d(F\partial/\partial x + G\partial/\partial y)$ avec F, G holomorphes (et non-identiquement nulles sur $\{y = 0\}$). Soit k l'ordre de l'application $x \mapsto F(x, 0)$. Alors l'ordre asymptotique $\text{ord asy}_{(0,0)}(Y, S)$ de Y le long de S est définie par

$$\text{ord asy}_{(0,0)}(Y, S) = k + d \cdot \text{Ind}_{(0,0)}(\mathcal{F}, S).$$

Cette notion d'ordre asymptotique trouve son intérêt dans les deux propositions ci-dessous.

Proposition 5.2.3 ([Re12]) *Soit Y un champ de vecteurs méromorphe et semi-complet au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 . Supposons que S est une séparatrice lisse de Y . Alors $0 \leq \text{ord asy}_{(0,0)}(Y, S) \leq 2$. De plus, si $\text{ord asy}_{(0,0)}(Y, S) = p/q \neq 1$ avec p, q premiers entre eux, alors l'holonomie locale de S est finie d'ordre q .*

La proposition suivante est une version "asymptotique" de la formule de Poincaré-Hopf.

Proposition 5.2.4 ([Re12]) *Soit C une courbe rationnelle invariante par le feuilletage \mathcal{F} associé à un champ méromorphe Y . Alors la somme des ordres asymptotiques de Y le long des points de C est égale à 2.*

C'est la combinaison de ces propositions et du théorème d'indice de [C-S] qui va nous permettre d'analyser en détail la structure des singularités méromorphes semi-complètes.

5.3 Deux familles d'exemples

Soit alors Y un champ méromorphe semi-complet défini au voisinage de l'origine de \mathbb{C}^2 et supposons que Y vérifie les conditions ci-dessus. Considérons la réduction de la singularité du feuilletage \mathcal{F} associé à Y et observons que le diviseur exceptionnel total E qui en résulte est invariant par la transformé stricte de $\tilde{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} . En effet, cela découle simplement du fait que \mathcal{F} n'est pas dicritique.

En ce point il convient de diviser la discussion en deux étapes. Observons que le diviseur peut avoir des composantes irréductibles D_i sur lesquelles la transformée stricte \tilde{Y} de Y est régulière. En fait, il peut arriver que, sur l'une de ces composantes, l'ordre du champ éclaté (qui vient du diviseur des zéros et de l'ordre de la singularité du feuilletage associé) se compense avec l'ordre du diviseur de pôles du champ. Ce phénomène est à la source d'une complication combinatoire accentuée du diviseur E . On commence donc en supposant que cela ne se produit pas. On dira alors que Y est à pôles adaptés si, pour la suite d'éclatement de Y , \mathcal{F} donnée par le théorème de Seidenberg, le diviseur de zéros et pôles de la transformé stricte (finale) \tilde{Y} de Y contient le diviseur exceptionnel total E .

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose alors que Y a pôles adaptés. On peut par contre affaiblir nos hypothèses de base, en admettant par exemple que le diviseur des zéros de Y n'est pas vide. On consultera les sections 5 et 6 de [Re10] pour les hypothèses précises de ce paragraphe.

Notre premier but est de décrire deux familles de champs de vecteurs semi-complets qui vérifient nos hypothèses. Le théorème principal de [Re10] affirme alors que ces deux familles contiennent tous les exemples possibles. Pour cela considérons une courbe rationnelle C d'auto-intersection -1 dans une surface complexe. Remarquons aussi qu'un voisinage tubulaire de cette courbe est uniquement déterminé au sens holomorphe car l'auto-intersection est négative. On considère alors un champ de vecteur méromorphe Y , ainsi que son feuilletage associé \mathcal{F} , défini au voisinage de C . On suppose de plus que C est invariant par \mathcal{F} . Nous sommes intéressés par les deux modèles de Y, \mathcal{F} décrits ci-dessous :

Modèle $Z_{0,12}$: \mathcal{F} possède 3 singularités p_1, p_2, p_3 sur C dont les valeurs propres sont respectivement $1, 0, -1, 2$ et $-1, 2$. La singularité p_1 est une selle-nœud dont la variété invariante forte est contenue dans C . La séparatrice de p_2 (resp. p_3) transverse à C constitue un pôle d'ordre $d \in \mathbb{N}$ de Y . Finalement C est une composante du diviseur de pôles de Y d'ordre $2d - 1$.

Modèle $Z_{1,00}$: \mathcal{F} possède 3 singularités p_1, p_2, p_3 sur C dont les valeurs propres sont respectivement $-1, 1, 1, 0$ et $1, 0$. Les singularités p_2, p_3 sont des selle-nœuds avec variété invariante forte contenue dans C . La séparatrice de p_1 transverse à C est une composante du diviseur de pôles de Y d'ordre $d \neq 0$. La courbe C est une composante du diviseur de pôles de Y d'ordre $d - 1$.

On note encore $Z_{0,12}, Z_{1,00}$ les champs de vecteurs méromorphes définis au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ à partir de l'implosion de la courbe C (rappelons qu'elle est d'auto-intersection -1). On vérifie que ces deux champs de vecteurs sont semi-complets (et satisfont à nos hypothèses).

On va maintenant montrer que les deux exemples en question sont, en fait, les premiers exemples de deux familles, notées $Z_{0,12}^{(n)}$ et $Z_{1,00}^{(n)}$ de champs de vecteurs méromorphes semi-complets qui satisfont nos hypothèses. On considère encore la courbe rationnelle C comme ci-dessus ainsi que le champ Y et son feuilletage associé \mathcal{F} . Les prochains membres de ces familles sont donnés par

Modèle $Z_{0,12}^{(1)}$: \mathcal{F} possède une unique singularité p_1 sur C , donnée par le modèle $Z_{0,12}$.

Modèle $Z_{1,00}^{(1)}$: \mathcal{F} possède deux singularités p_1, p_2 sur C . La singularité p_1 est localement donnée par le modèle $Z_{1,00}$. La singularité p_2 est linéaire avec valeurs propres $-1, 1$.

Les membres qui suivent sont alors :

Modèle $Z_{0,12}^{(2)}$: \mathcal{F} possède deux singularités p_1, p_2 sur C . La singularité p_1 est localement donnée par le modèle $Z_{0,12}^{(1)}$. La singularité p_2 est linéaire de valeurs propres $-1, 1$.

Modèle $Z_{1,00}^{(2)}$: \mathcal{F} possède deux singularités p_1, p_2 sur C . La singularité p_1 est localement donnée par le modèle $Z_{1,00}^{(1)}$. La singularité p_2 est linéaire de valeurs propres $-1, 1$.

Les familles continuent par induction. Dans [Re10] on démontre :

Théorème 5.3.1 ([Re10]) *Soit Y un champ de vecteurs méromorphe défini au voisinage de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Supposons que Y est semi-complet et satisfait les hypothèses ci-dessus. Alors Y appartient à l'une des familles $Z_{0,12}^{(n)}, Z_{1,00}^{(n)}$.*

5.4 Preuve du théorème (5.2.2)

Dans cette dernière section on va esquisser les résultats principaux de [Re12] y compris la preuve du théorème (5.2.2). Supposons que X est un champ de vecteurs polynomial complet dans \mathbb{C}^2 . La droite Δ à l'infini est donc invariante par le feuilletage (noté \mathcal{F}) induit par X sur $\mathbb{CP}(2)$. Observons d'abord que, grâce au théorème (5.3.1), il est facile de constater que les singularités de \mathcal{F} sur Δ *ne sont pas à pôles adaptés*. Le but de [Re12] étant exactement de classifier les singularités satisfaisant les hypothèses de la section 2 mais n'étant pas à pôles adaptés. Avec cette classification, dont on ne présentera ici qu'un énoncé partiel, on sera en mesure de prouver le théorème (5.2.2).

D'une façon un peu plus précise, en plus des hypothèses faites dans la section 2, on suppose encore que :

- $\text{ord}_{\text{asy}_{(0,0)}}(Y, S) \leq 1$ où S est la séparatrice contenue dans le diviseur de pôles de Y .
- Y n'a pas de pôles adaptés.

Considérons le diviseur exceptionnel E obtenu par l'application du procédé de Seidenberg à la singularité de \mathcal{F} . Ce diviseur admet alors la structure suivante (cf. [Re12]) :

1. Il existe une suite D_1, \dots, D_k de composantes irréductibles de E qui forment un diviseur linéaire i.e. une "suite de Hirzebruch-Jungreis". De plus, sauf par la composante D_k , ce diviseur est contenu dans le diviseur des pôles de la transformée stricte \tilde{Y} de Y .
2. D_1 contient deux singularités, $p_{0,1}, p_{1,2}$. La singularité $p_{0,1}$ (resp. $p_{1,2}$) correspond à son intersection avec la transformée stricte de la séparatrice S (resp. D_2).
3. Pour $i \in \{2, \dots, k-1\}$ chaque D_i possède deux singularités $p_{i-1,i}$ et $p_{i,i+1}$ correspondants aux intersections avec D_{i-1} et D_{i+1} respectivement.
4. Toutes les singularités $p_{0,1}, \dots, p_{k-2,k-1}$ ont deux valeurs propres non nulles dont le quotient est rationnel négatif. De plus, l'ordre asymptotique de \tilde{Y} sur chacune des séparatrices correspondantes est 1.
5. D_{k-1} possède une singularité $p_{k-2,k-1}$ comme ci-dessus et une autre singularité $p_{k-1,k} = D_{k-1} \cap D_k$ qui est une selle-nœud dont la variété forte est contenue dans D_{k-1} .
6. \tilde{Y} est régulier sur D_k .

La démonstration des affirmations ci-dessus fait partie du résultat principal de [Re12]. Avec cela on va en déduire le théorème (5.2.2) en un cas spécial (qui s'avère "emblématique"). Rappelons que X est un champ polynomial complet dans \mathbb{C}^2 dont le feuilletage \mathcal{F} associé sur $\mathbb{CP}(2)$ laisse la droite à l'infini Δ invariante. Supposons alors que \mathcal{F} possède exactement deux singularités P et Q sur Δ . De plus supposons que $\text{ord}_{\text{asy}_P}(X, \Delta) \leq 1$ et $\text{ord}_{\text{asy}_Q}(X, \Delta) \leq 1$. La proposition (5.2.4) entraîne alors immédiatement que $\text{ord}_{\text{asy}_P}(X, \Delta) = \text{ord}_{\text{asy}_Q}(X, \Delta) = 1$.

Considérons la suite de réduction the P (resp. Q) et dénotons par D_1^P, \dots, D_k^P (resp. D_1^Q, \dots, D_n^Q) la “composante linéaire” (décrite ci-dessus) du diviseur exceptionnel résultant. On identifie Δ avec sa transformée stricte dans ces procédés.

Affirmation : Parmi les courbes $D_1^P, \dots, D_{k-1}^P, D_1^Q, \dots, D_{n-1}^Q, \Delta$, il y en a une d’auto-intersection -1 .

Preuve: Supposons le contraire. Alors chacune de ces courbes est d’auto-intersection ≤ -2 . Rappelons que D_{k-1}^P contient deux singularités, $p_{k-1,k}^P$ et $p_{k-2,k-1}^P$. De plus $p_{k-1,k}^P$ est une selle-nœud dont la variété forte est contenue dans D_{k-1}^P . Son indice ([C-S]) par rapport à D_{k-1}^P vaut *zéro* ce qui implique que l’indice de $p_{k-2,k-1}^P$ par rapport à D_{k-1}^P est un entier ≤ -2 (l’auto-intersection de D_{k-1}^P). Comme $p_{k-2,k-1}^P$ a deux valeurs propres non nulles, son indice par rapport à D_{k-2}^P est l’inverse de cet entier (disons $-1/q$). Alors l’indice par rapport à D_{k-2}^P est donné par l’auto-intersection de D_{k-2}^P (≤ -2) plus $1/q$. Comme $q \geq 2$, on voit que ce dernier indice est rationnel de dénominateur q et numérateur ≥ 2 (c’est donc que le numérateur a augmenté). Si l’on continue le procédé on voit que tous les indices sont des rationnels non-entiers (car le numérateur ou le dénominateur augmente toujours et restent premiers entre eux). Ceci est cependant impossible. Par le même argument utilisé au début, on conclut que l’indice de la singularité $p_{n-2,n-1}^Q$ doit être un entier. Ceci contredit la conclusion ci-dessus et démontre l’Affirmation. \square

On revient maintenant à la preuve du théorème (5.2.2). On commence par contracter la courbe d’auto-intersection -1 dont l’existence est garanti par l’Affirmation. Cette courbe étant contractée, on retrouve la même structure de courbes qu’auparavant. C’est donc qu’on a une nouvelle composante d’auto-intersection -1 . Cette nouvelle composante peut aussi être contractée et le procédé continue par induction. Après avoir contracté toutes les courbes, on arrive à la situation suivante (“emblématique”) : il y a une seule courbe D qui intersecte la courbe D_k^P (resp. D_n^Q) en une singularité p^P (resp. p^Q). Clairement p^P (resp. p^Q) est une selle-nœud dont la variété forte est contenue dans D . La formule de l’indice appliquée à D entraîne que l’auto-intersection de D est *zéro*. Par un résultat bien connu de Géométrie Algébrique, D est alors une fibre régulière d’une fibration rationnelle sur la surface ambient M en question (qui par construction est birationnellement équivalente à $\mathbb{CP}(2)$). On dénote aussi par \tilde{X} la transformée stricte de X sur cette surface M . Observons qu’au voisinage de la fibre D , le diviseur de *pôles* de \tilde{X} est entièrement contenu dans la composante D . Cela est simplement une conséquence du fait que le champ \tilde{X} est régulier sur D_k^P, D_n^Q (point 5 ci-dessus). Autrement dit, une fibre de cette fibration qui est proche de D n’intersectera pas le diviseur des *pôles* de \tilde{X} . Ceci nous suffit pour invoquer le lemme classique de Blanchard et conclure que le flot de X doit préserver cette fibration. Le théorème (5.2.2) est démontré. \square

Chapitre 6

Quelques questions et résultats supplémentaires

Ce chapitre contient quelques commentaires sur certaines questions liées aux problèmes de ce mémoire. Comme il s’agit plutôt de problèmes que de “réponses”, je me suis permis d’être plus informel. Parfois j’emploie aussi des expressions un peu vagues ou sans définition précise.

6.1 Actions de groupes

Un problème très général est celui de la structure algébrique des sousgroupes de $\text{Diff}(M)$ où M est une variété compacte (la classe de régularité des difféomorphismes n’est pas précisée, on peut penser qu’ils sont analytiques réels). Étant donné un groupe (abstraite) finiment engendré Γ , on se demande si ce groupe se plonge dans $\text{Diff}(M)$ (voir [A-G], [Gh1]).

On peut, en particulier, penser aux groupes Γ qui sont des réseaux dans des groupes de Lie G semisimples de rang supérieur. Cette dernière question est essentielle dans ce qui s’appelle “le programme de Zimmer” ([Z]). Parmi les questions concernant ce programme, il a été conjecturé qu’un tel groupe ne peut pas agir (fidèlement) sur une variété de dimension n si la dimension de G est plus grande que $n + 1$. Dans les papiers, on considère suivant le cas “typique” où le groupe de Lie G est $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Ce cas est quand-même un peu particulier car il nous permet d’utiliser l’existence d’éléments “unipotents” dans Γ , alors qu’en toute généralité ces éléments peuvent ne pas exister.

Cette question est encore largement ouverte sauf sur le cercle. En effet, pour les groupes de Lie du type $\text{PSL}(n, \mathbb{R})$ on sait que la réponse est affirmative pour le groupe d’homéomorphismes du cercle [Wi]. L’argument de D. Witte [Wi] est de nature combinatoire et utilise explicitement l’existence des sous-groupes nilpotents dans ces réseaux. Un argument valable pour des groupes de Lie généraux peut être trouvé dans [Gh2] mais ce dernier ne s’applique qu’aux groupes de difféomorphismes de classe C^1 . Quitte à passer de la classe C^1 à la classe $C^{1+\epsilon}$, un argument encore plus général se trouve dans [Nav2]

pour des groupes (abstrait) ayant la propriété T de Kazhdan (rappelons que les réseaux en question ont toujours la propriété T grâce au théorème de Kazhdan-Margulis, [Z]).

Dans le cas des surfaces, un résultat de Ghys [Gh1] répond à cette question en classe analytique réelle et pour des groupes du type $\mathrm{PSL}(n, \mathbb{R})$ dès que la surface n'est pas le tore. J'ai étendu ce résultat au tore dans [Re6]. Récemment [F-H], Franks et Handel ont amélioré ces résultats en passant au cas différentiable. Néanmoins ils supposent que leurs groupes préservent une forme d'aire sur la surface. Mentionnons finalement que dans le cadre holomorphe (kählérien), cette conjecture a été démontrée par S. Cantat [C]. Pour ce genre de question, l'hypothèse holomorphe est cependant un peu forte car le groupe d'automorphismes d'une variété compacte complexe est toujours un groupe de Lie de dimension finie. Le lecteur peut consulter aussi le papier de T.C. Dinh et N. Sibony [D-S] sur les groupes commutatifs d'automorphismes de variétés kählériennes qui est utilisé dans [C].

L'une des difficultés majeures dans ces questions est de trouver un critère pour garantir qu'un difféomorphisme agit trivialement (i.e. qu'il est l'identité). Quand on travaille en classe analytique, on peut souvent s'en sortir en trouvant des points fixes pour des éléments convenables (comme dans [Gh1], [Re6]). Il serait très intéressant d'obtenir des résultats analogues dans les variétés de dimension 3 à condition que le groupe soit contenu dans la composante connexe de l'identité.

Par contre, pour des difféomorphismes d'ordre fini (i.e. ceux dont une puissance non-triviale est l'identité), on peut invoquer des arguments plus au moins classiques de la "théorie de Smith" (voir [W]) pour assurer qu'un tel difféomorphisme coïncide avec l'identité. Si l'on considère alors des groupes (infinis) finiment engendrés et dont tous les éléments sont d'ordre fini (i.e. des groupes de Burnside), on peut faire un peu de progrès. Mon attention sur ces groupes a été attirée par E. Ghys quand j'étais encore en thèse avec lui. Mon étudiante A. Silva a alors considéré des groupes de Burnside agissant de manière symplectique sur des 4-variétés. Dans [R-AS], on démontre par exemple qu'un groupe de Burnside n'agit pas sur une 4-variété symplectique dont la classe fondamentale s'exprime comme un produit de classes dans H^1 . Il est probable que la méthode utilisée dans ce papier puisse être appliquée à des variétés symplectiques plus générales.

Dans l'esprit du Chapitre 3, il serait intéressant de considérer aussi la structure de la dynamique des sous-groupes non-discrets *qui sont déjà plongés* dans $\mathrm{Diff}(M)$. On va se restreindre au cas des surfaces car il semble déjà contenir tous les difficultés essentielles. Évidemment le vrai obstacle aux méthodes décrites au Chapitre 3 arrive quand le groupe n'a pas de points fixes "attirants". On peut penser par exemple aux groupes qui préservent une forme d'aire sur la surface. Au moins génériquement, on peut trouver des éléments ayant un point fixe hyperbolique du type "selle". On est alors tentés de généraliser quelques arguments du Chapitre 3 à cette situation. Même cette question est probablement trop difficile. En fait, j'imagine qu'elle est reliée à l'existence d'un "bon opérateur de renormalisation" pour des applications du type "Hénon".

Une question peut-être plus approchable est celle de trouver des critères "raisonnables" pour qu'un groupe de difféomorphismes C^∞ soit non-discret. Dans [Re8] on a exploité le fait qu'un sous-groupe 2-transitif de difféomorphismes C^∞ agissant sur le cercle n'est

pas discret en un sens naturel. Cependant les groupes “transitifs” sont très gros... on aimerait avoir un critère valable pour des groupes finiment engendrés (comme celui du théorème 3.1.3 pour le cadre analytique). On observe cependant que la technique de [Re8] doit se généraliser sans surprise aux surfaces (au-delà des groupes qui préservent l’aire). Les groupes préservant une forme d’aire peuvent, par contre, nous conduire à des phénomènes nouveaux.

6.2 Champs semi-complets en dimension 3

Cette section se voit comme un résumé de certains travaux de A. Guillot et H. Reis sur les singularités semi-complètes en dimension 3. Les questions que je mentionnerai sont aussi directement motivées par leurs papiers. En particulier, je ne discuterai pas la question la plus connue du sujet : est-il vrai qu’une singularité isolée d’un champ semi-complet dans $(\mathbb{C}^3, 0)$ possède toujours un deuxième jet non-trivial ? Cette question a été posée par E. Ghys et a motivé la définition des champs semi-complets dans [Re1].

D’un certain point de vue, on peut dire que l’intérêt principal de A. Guillot dans [Gu1] est la classification des champs (homogènes) quadratiques semi-complets dans $(\mathbb{C}^3, 0)$. Ces champs sont aussi non-dégénérés en ce sens que leur éclatement possède 7 singularités sur le diviseur exceptionnel, toutes ayant 3 valeurs propres non nulles. Il arrive à classifier toutes les familles à paramètres de ces champs. En ce qui concerne leur classification “individuelle”, il obtient une description précise à un nombre fini de possibles exemples près. Ces (possibles) exemples sont appelés *sporadiques*, cf. [Gu1]. Une question difficile mais très intéressante est celle de mieux comprendre les champs sporadiques. Par exemple on ignore s’ils sont tous semi-complets. La réponse à cette question entraînera des résultats nouveaux et de nature globale sur les feuilletages holomorphes. En effet, la nature locale des singularités du champ éclaté est complètement claire dans les cas sporadiques. C’est donc le comportement global du feuilletage sur le diviseur exceptionnel qui jouera un rôle décisif. Peut-être que la meilleure approche consiste à démontrer que l’éclaté d’un champ semi-complet a toujours une courbe invariante sur le diviseur exceptionnel. Si cela est vrai, on doit pouvoir décrire les champs semi-complets précisément. De plus il sera peut-être possible de démontrer l’analogie 3-dimensionnel du théorème (2.2.3). Autrement dit, de prouver qu’une singularité isolée semi-complète qui commence avec une partie quadratique est conjuguée à sa partie quadratique. Là un résultat de linéarisation de H. Reis [R2] qui généralise aux dimensions supérieures le lemme classique de Mattei-Moussu [M-M] sera sans doute utile.

D’une façon générale, on doit être capable de réduire la “dégénérescence” d’une singularité en faisant une suite d’éclatement (comme dans le théorème de Seidenberg en dimension 2). Il y a cependant des singularités qui n’ont pas 3 valeurs propres non nulles et qui ne se réduisent pas par éclatements. Ces sont les analogues 3-dimensionnels de la selle-nœud. Si l’on cherche à obtenir des résultats totalement généraux sur les champs semi-complets, on ne pourra pas éviter de considérer ces singularités. Lorsque la singularité ne possède qu’une valeur propre nulle, cela a été complètement résolu par H. Reis

dans [R1]. Ce papier généralise parfaitement les résultats de [Re3].

Les singularités que n'ont qu'une valeur propre non nulle sont par contre plus difficile à décrire. Cependant, dans les situations intéressantes, elles interviennent sous une forme spéciale qui nous permet de caractériser celles qui sont semi-complètes. Ceci est cependant en partie un travail en cours. Je mentionne quand-même que la classification des singularités semi-complètes n'ayant qu'une valeur propre non nulle est tout aussi intéressante et largement ouverte.

Un autre aspect intéressant des travaux de A. Guillot consiste en son étude très détaillé des "champs de Halphen" semi-complets [Gu2]. Ces champs ont au moins deux aspects remarquables : les feuilles du feuilletage associé sont hyperboliques ; ils ont une "dynamique riche". Au chapitre 5 on avait remarqué que l'on pouvait penser aux champs semi-complets comme à des généralisations dynamiques de certaines questions géométriques. Autrement dit, on peut se demander à quel point l'hypothèse "semi-complète" est de nature géométrique dans le sens où elle nous empêcherait d'avoir des dynamiques compliquées. En effet, on avait déjà trouvé des dynamiques non-triviales parmi les champs complets de \mathbb{C}^2 . Les feuilles de ces derniers sont cependant des courbes paraboliques de sorte que la dynamique qui en résulte n'est pas vraiment "riche". Avec ses feuilles hyperboliques, les champs de Halphen permettent une richesse dynamique équivalente à celle du flot horocyclique sur des surfaces de Riemann de volume fini, voir [Gu2]. De plus, les champs de Halphen sont aussi des cas particuliers de l'équation de Riccati de sorte que cette dynamique peut être parfaitement comprise [Gu2]. Il serait très intéressant de savoir si les équations de Riccati fournissent le seul mécanisme pour lequel les champs semi-complets peuvent présenter une dynamique "riche".

La "philosophie" implicitement mentionnée ci-dessus, i.e. celle qui préconise que des feuilles paraboliques ne permettent pas de dynamique riche, mérite un commentaire supplémentaire. J'ai appris de A. Guillot que ces champs de Halphen se globalisent en des flots complets sur certaines variétés de dimension 3 [Gu2]. Les orbites régulières de ces flots sont évidemment paraboliques. La variété ambiante est cependant "très transcendente" (i.e. non-kählérienne).

Si on ne regarde que les champs semi-complets qui peuvent se globaliser en un flot sur une variété kählérienne, la situation devient bien plus simple. Cela est l'un des objets d'un travail en cours de H. Reis.

Il y a une autre situation où des progrès sont plus accessibles. Il s'agit d'une algèbre commutative de champs semi-complets. Dans le même travail mentionné ci-dessus, H. Reis obtient des résultats intéressants sur la classification de ces "algèbres" (parfois même en dimension 4). D'après A. Guillot [Gu3], on sait que parmi ces algèbres en $(\mathbb{C}^3, 0)$, il en existe au moins une qui amène à un contre-exemple remarquable, dû à Lins-Neto, pour une question de Painlevé. Il me semble donc que ces algèbres méritent une investigation plus approfondie...

Bibliographie

- [A-R] P. AHERN & J.-P. ROSAY, On Rebelo's theorem on singularities of holomorphic flows, *Ark. Mat.*, **37**, 2, (1999), 211-220.
- [A-G] G. D'AMBRA & M. GROMOV, *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics*, Surveys in differential geometry, Cambridge, MA, (1990), 19-111.
- [Ar-Ya] V. ARNOLD & YU. IL'YASHENKO, *Ordinary differential equations*, Encyclopedia of Math. Sciences Vol 1. Dynamical Systems I, (Eds. D. Anosov, V. Arnold), Springer-Verlag, (1988), 1-148.
- [Be1] M. BELLIART, Sur certains pseudogroupes de biholomorphismes locaux de $(\mathbb{C}^n, 0)$, *Bull. Soc. Math. France*, **129**, (2001), 159-284.
- [Be2] M. BELLIART, On the dynamics of certain actions of free groups on closed real analytic manifolds, *Comment. Math. Helv.*, **77**, (2002), 524-548.
- [B-L-L] M. BELLIART, I. LIOUSSE & F. LORAY, The generic rational differential equation $dw/ds = P_n(s, w)/Q_n(s, w)$ carries no interesting transverse structure on $\mathbb{C}P(2)$, *Ergodic Theory and Dyn. Syst.*, **21**, (2001), 1599-1607.
- [Be-C-L] M. BERTHIER, D. CERVEAU & A. LINS-NETO, Sur les feuilletages analytiques réels et le problème du centre, *Jour. Diff. Eq.*, **131**, (1996), 244-266.
- [Br1] M. BRUNELLA, Complete polynomial vector fields on the complex plane, *Topology*, **43**, 2, (2004), 433-445.
- [Br2] M. BRUNELLA, *Birational geometry of foliations*, IMPA Mathematical Publications, IMPA, (2004).
- [C-S] C. CAMACHO & P. SAD, Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, *Annals of Math.*, **115**, 3, (1982), 579-595.
- [C-Sc] C. CAMACHO & B. SCARDUA, Beyond Liouvillian transcendence, *Math. Res. Lett.*, **6**, 1, (1999), 31-41.
- [C] S. CANTAT, Version kählérienne d'une conjecture de Robert J. Zimmer *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **37**, 5, (2004), 759-768.

- [C-G] L. CARLESON & T. GAMELIN, *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, New York, (1993).
- [C-H-K] J. CARRELL, A. HOWARD & C. KOSNIOWSKI, Holomorphic vector fields on complex surfaces, *Math. Ann.*, **204**, (1973), 73-81.
- [Ce] D. CERVEAU, Densité des feuilles de certaines équations de Pfaff à 2 variables, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **33**, 1, (1983), 185-194.
- [Ce-Ma] D. CERVEAU & J.-F. MATTEI, *Formes intégrables holomorphes singulières*, *Asterisque*, **97**, Société Mathématique de France, (1982).
- [Ce-Sc] D. CERVEAU & B. SCARDUA, Complete polynomial vector fields in two complex variables, *prépublication Univ. Rennes I*, 2002. À paraître à *Forum Mathematicum*.
- [D-S] T.C.DINH & N. SIBONY, Groupes commutatifs d'automorphismes d'une variété kählérienne comapcte, *Duke Math. J.*, **123**, 2, (2004), 311-328.
- [D-O-T1] G. DLOUSSKY, K. OELJEKLAUS & T. MATEI, Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs, *Comment. Math. Helv.*, **75**, 2, (2000), 255-270.
- [D-O-T2] G. DLOUSSKY, K. OELJEKLAUS & T. MATEI, Surfaces de la classe VII_0 admettant un champ de vecteurs, II *Comment. Math. Helv.*, **76**, 4, (2001), 640-664.
- [Du] G. DUMINY, manuscript non-publié, (1978).
- [F-H] J. FRANKS & M. HANDEL, Area preserving group actions on surfaces, *Geom. Topol.*, **7**, (2003), 757-771.
- [Gh1] E. GHYS, Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité, *Bol. Soc. Bras. Mat.*, **24**, 2, (1993), 137-178.
- [Gh2] E. GHYS, Actions de réseaux sur le cercle, *Inv. Math.*, **137**, 1, (1999), 199-231.
- [GM] X. GOMEZ-MONT, The transverse dynamics of a holomorphic flow, *Ann. of Math.*, **127**, (1988), 49-92.
- [GM-Bo] X. GOMEZ-MONT & L. ORTIZ-BOBADILLA, *Sistemas dinamicos holomorphos em superficies*, Sociedad Matematica Mexicana, ed., (1989).
- [Gu1] A. GUILLOT, Semicompleteness of homogeneous quadratic vector fields, à paraître aux *Ann. de l'Institut Fourier*.
- [Gu2] A. GUILLOT, Sur les équations d'Halphen et les actions de $SL(2, \mathbb{C})$, en *préparation*.

- [Gu3] A. GUILLOT, Sur les exemples de Lins Neto de feuilletages algébriques, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, **334**, 9, (2002), 747-750.
- [HV] M. HUDAI-VERENOV, A property of the solutions of a differential equation (in Russian), *Mat. Sbornik*, **56**, **98**, 3, (1962), 301-308.
- [Il1] YU. IL'YASHENKO, The topology of phase portraits of analytic differential equations in the complex projective plane (in Russian), *Trudy Sem. Petrovsk*, **4**, (1978), 83-136. (in English), *Sel. Math. Sov.* **5**, 2, (1986), 141-199.
- [Il2] YU. IL'YASHENKO, Global and local aspects of the theory of complex differential equations, *Proc. of Int. Cong. of Math. Helsinki*, vol 2, Acad. Scient. Fennica, (1978), 821-826.
- [Jo] J.-P. JOUANOLOU, Équations de Pfaff algébriques, *Lecture Notes in Math.* (Springer-Berlin), **708**, (1979).
- [Ka] I. KAPLANSKY, *Lie algebras and locally compact groups*, The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London (1971).
- [La] S. LAMY, Problèmes de densité d'orbites pour les groupes d'automorphismes de \mathbb{C}^2 , *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, **329**, 9, (1999), 807-810.
- [Lo1] F. LORAY, Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble, *Ph.D. thèse*, Univ. Rennes I, (1994).
- [Lo2] F. LORAY, Habilitation à diriger des recherches en sciences mathématiques, *Université des Sciences et technologies de Lille*, (2000).
- [LN-Sa-Sc] A. LINS-NETO, P. SAD & B. SCARDUA, On topological rigidity of projective foliations, *Bull. Soc. Math. France*, **126**, 3, (1998), 381-406.
- [LN-So] A. LINS-NETO & M. SOARES, Algebraic solutions of one-dimensional foliations, *J. Diff. Geom.*, **43**, (1996), 652-673.
- [M-R1] J. MARTINET & J.-P. RAMIS, Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre, *Publ. math. I.H.E.S.*, **55**, (1982), 63-164.
- [M-R2] J. MARTINET & J.-P. RAMIS, Classification analytique des équations différentielles non linéaire résonnantes du premier ordre, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup*, **16**, 4, (1983), 571-621.
- [M-M] J.-F. MATTEI & R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup*, **13**, 4, (1980), 469-523.
- [Ma] J.-F. MATTEI, manuscript non-publié (1996).

- [Ma] M. MCQUILLAN, Non-commutative Mori theory, prépublication I. H. E. S. (2001).
- [Mj] B. MJULLER, On the density of solutions of an equation in $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$, *Mat. Sbornik*, **98**, 140, 3, (1975), 325-338.
- [Nak] I. NAKAI, Separatrix for non solvable dynamics on $(\mathbb{C}, 0)$, *Ann. Inst. Fourier*, **44** (2), (1994), 569-599.
- [Nav1] A. NAVAS, Sur les groupes de difféomorphismes du cercle engendrés par des éléments proches des rotations, *Enseign. Math.*, **50**, 1-2, (2004), 29-68.
- [Nav2] S. NAVAS, Actions de groupes de Kazhdan sur le cercle, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup*, **35**, 5, (2002), 749-758.
- [Pa] R. PALAIS, A global formulation of the Lie theory of transformation groups, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **22**, (1957), 123 pp.
- [R1] H. REIS, Semi-complete vector fields of saddle-node type in \mathbb{C}^n , *prépublication Centro de Matemática da Universidade do Porto*, (2004).
- [R2] H. REIS, Equivalence and semi-completeness of foliations, *à paraître au Journal of Nonlinear Analysis*.
- [Sei] A. SEIDENBERG, Reduction of singularities of the differentiable equation $Ady = Bdx$, *Amer. J. Math*, **90**, (1968), 248-269.
- [Sf] I. SHAFAREVICH, *Lectures on minimal models and birational transformations of two dimensional schemes*, Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, (1966).
- [Sh1] A.A. SHCHERBAKOV, On the density of an orbit of a pseudogroup of conformal mappings and a generalization of the Hudai-Verenov theorem, *Vestnik Mouvskovskogo Universiteta Mathematica* **31** (4) (1982), 10-15.
- [Sh2] A.A. SHCHERBAKOV, Topological and analytic conjugation of non-commutative groups of conformal mappings, *Trudy Sem. Petrovsk*, **10**, (1984), 170-192.
- [Su1] M. SUZUKI, Sur les opérations holomorphes de \mathbb{C} et de \mathbb{C}^* sur un espace de Stein, *séminaire Norquet*, Springer Lecture Notes, Vol 670, Springer, Berlin, 1977, 80-88.
- [Su2] M. SUZUKI, Sur les opérations holomorphes du groupe additif complexe sur l'espace de deux variables complexes, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, **4**, 10, (1977), 517-546.

- [Xi1] G. XIAO, Surfaces fibrées en courbes de genre deux, *Lecture Notes in Mathematics 1137*, Springer-Verlag, Berlin, (1985).
- [Xi2] G. XIAO, π_1 of elliptic and hyperelliptic surfaces, *Internat. J. Math*, **2**, 5, (1991), 599-615.
- [W] S. WEINBERGER, $SL(n, \mathbb{Z})$ cannot act on small tori, *Geometric topology*, Athens, GA, (1993), 406-408.
- [Wi] D. WITTE, Arithmetic groups of higher \mathbb{Q} -rank cannot act on 1-manifolds, *Proc. AMS*, **122**, (1994), 333-340.
- [Z] R. ZIMMER, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, 81, Birkhäuser Verlag, Basel (1984).