Estruturas Algébricas I

6 de julho de 2010

A prova deve ser feita individualmente, com consulta livre.
Todas as questões têm o mesmo valor.

1. Seja $G = GL(3, \mathbb{Z}/(2))$ o grupo de todas as matrizes 3×3 inversíveis com coeficientes em $\mathbb{Z}/(2)$.
   (a) Calcule a ordem de G.
   (b) Para cada primo p dividindo a ordem de G dê um exemplo explícito de um p-subgrupo de Sylow de G.
   (c) Para cada primo p dividindo a ordem de G calcule o número de p-subgrupos de Sylow de G.

2. Observe que $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.
   (a) Mostre que existe um grupo não abeliano de ordem 105.
   (b) Mostre que todo grupo G de ordem 105 admite um subgrupo cíclico e normal H de ordem 35.
   (c) Quantos grupos não isomorfos de ordem 105 existem?

3. Seja G dado por geradores e relações como abaixo:

$$G = \langle a, b | (ab)^2 = e \rangle.$$

   (a) Faça um esboço de diagrama de Cayley de G.
   (b) Mostre que todo elemento de G pode ser escrito de forma única como $a^i b^j$, $i, j \in \mathbb{Z}$.
   (c) Diga se G tem algum elemento de ordem finita maior do que 2.

4. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa; justifique.
   (a) Seja G um grupo finito.
   Se $g^5 = e$ para todo elemento de G então G é abeliano.
   (b) Seja G um grupo finito com $|G| = n$.
   Se $|Z(G)| > n/4$ então G é abeliano.
   (c) Seja G um grupo finito com $|G| = p^k$, $p > 2$ primo e k inteiro.
   Então existe um subgrupo normal $H \leq G$ tal que H e G/H são ambos abelianos.