P3 de Equações diferenciais e de diferenças
MAT 1154 — 2007.1
Data: 16 de junho de 2007

Nome:______________________________ Matrícula:____________
Assinatura:__________________________ Turma:____________

Questão	Valor	Nota	Revisão
1a	2.0		
1b	1.0		
2a	1.0		
2b	1.0		
2c	1.0		
3a	1.0		
3b	1.0		
4a	1.0		
4b	1.0		
Total	10.0		

Instruções

- Mantenha seu celular desligado durante toda a prova.
- Não é permitido usar nenhum tipo de calculadora.
- Não destaque as folhas da prova.
- A prova pode ser resolvida a lápis, caneta azul ou caneta preta.
  Não use caneta vermelha ou verde.
- Você **não** tem o direito de consultar anotações.
- Todas as respostas devem ser justificadas.

1. Seja y a solução do problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + y'(t) = f(t), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$$

onde

$$f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) + \cos(t), & 0 \leq t < \pi/2 \\ 0, & t \geq \pi/2. \end{cases}$$

(a) Calcule $y(t)$.

(b) Calcule $\lim_{t \to +\infty} y(t)$.

Solução:

(a) Temos

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 - u_{\pi/2}(t))(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) \\ &= \operatorname{sen}(t) + \cos(t) + u_{\pi/2}(t)(-\cos(t - \pi/2) + \operatorname{sen}(t - \pi/2)) \end{aligned}$$

donde, aplicando Laplace aos dois lados da equação temos

$$s^2Y + s + sY + 1 = \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{(-s+1)e^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$

$$Y = \frac{-s-1}{s(s+1)} + \frac{s+1}{s(s+1)(s^2+1)} + \frac{(-s+1)e^{-\pi s/2}}{s(s+1)(s^2+1)}$$

$$Y = -\frac{s}{s^2+1} + \frac{(-s+1)e^{-\pi s/2}}{s(s+1)(s^2+1)} = -\frac{s}{s^2+1} + e^{-\pi s/2}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s^2+1}\right)$$

donde

$$y = -\cos(t) + u_{\pi/2}(t)\left(1 - e^{-(t-\pi/2)} - \operatorname{sen}(t - \pi/2)\right).$$

(b) Podemos escrever ainda

$$y = \begin{cases} -\cos(t), & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 1 - e^{-(t-\pi/2)}, & t \geq \pi/2 \end{cases}$$

donde

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = \lim_{t \to +\infty} 1 - e^{-(t-\pi/2)} = 1.$$

2. Considere o problema de valor inicial abaixo:

$$y''(t) + (2+t)y(t) = \frac{e^t - 1}{t}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 0.$$

Considere ainda a expansão em série de potências da solução:

$$y = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n + \cdots .$$

(a) Encontre uma equação de diferenças relacionando os coeficientes a_n.

(b) Encontre a_n para $n \leq 6$.

(c) Calcule

$$\lim_{t \to 0} \frac{t y'(t)}{y(t) - y(0)}.$$

Solução:

(a) Temos

$$\begin{aligned}
y'' &= 2a_2 + 6a_3 t + \cdots + (k+1)(k+2)a_{k+2}t^k + \cdots \\
y'' + (2+t)y &= (2a_2 + 2a_0) + (6a_3 + 2a_1 + a_0)t + \cdots \\
&\quad + ((k+1)(k+2)a_{k+2} + 2a_k + a_{k-1})t^k + \cdots \\
\frac{e^t - 1}{t} &= 1 + \frac{t}{2!} + \cdots + \frac{t^k}{(k+1)!} + \cdots
\end{aligned}$$

donde a equação de diferenças é

$$(k+1)(k+2)a_{k+2} + 2a_k + a_{k-1} = \frac{1}{(k+1)!}, \quad k \geq 1$$

(para $k = 0$, temos $2a_2 + 2a_0 = 1$) com condições iniciais $a_0 = 1/2$, $a_1 = a_2 = 0$.

(b) Aplicando a relação encontrada no item (a) temos

$$\begin{aligned}
6a_3 + 2a_1 + a_0 &= \frac{1}{2} &\rightarrow\quad& a_3 = 0, \\
12a_4 + 2a_2 + a_1 &= \frac{1}{6} &\rightarrow\quad& a_4 = \frac{1}{72}, \\
20a_5 + 2a_3 + a_2 &= \frac{1}{24} &\rightarrow\quad& a_5 = \frac{1}{480}, \\
30a_6 + 2a_4 + a_3 &= \frac{1}{120} &\rightarrow\quad& a_6 = -\frac{7}{10800}.
\end{aligned}$$

(c) Temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} \frac{ty'(t)}{y(t)-y(0)} &= \lim_{t\to 0} \frac{a_1 t + 2a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + 4a_4 t^4 + \cdots}{a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \cdots} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{4}{72} t^4 + \frac{5}{480} t^5 + \cdots}{\frac{1}{72} t^4 + \frac{1}{480} t^5 + \cdots} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{4}{72} + \frac{5}{480} t + \cdots}{\frac{1}{72} + \frac{1}{480} t + \cdots} = 4.
\end{aligned}
$$

3. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função F. Encontre f, a transformada de Laplace inversa de F.

(a)

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^4 - 16}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{32}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s+2} - \frac{4}{s^2+2^2}\right)$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{32}u_3(t)\left(e^{2(t-3)} - e^{-2(t-3)} - 2\operatorname{sen}(2(t-3))\right).$$

(b)

$$F(s) = \frac{s-2}{(s-4)^5}$$

Solução:

Temos

$$F(s) = \frac{(s-4)+2}{(s-4)^5} = \frac{1}{(s-4)^4} + \frac{2}{(s-4)^5}$$

donde

$$f(t) = \frac{1}{6}t^3e^{4t} + \frac{1}{12}t^4e^{4t} = \frac{(2+t)t^3e^{4t}}{12}.$$

4. Em cada um dos itens abaixo é dada uma função f. Calcule a transformada de Laplace F de cada uma destas funções.

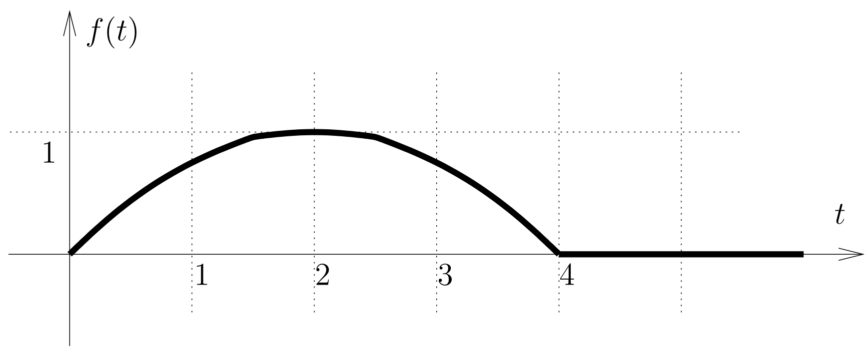
(a)

$$f(t) = \int_0^t \cos(\tau)\,\mathrm{sen}(t-\tau)d\tau$$

Solução:
A função f está dada como a convolução $g * h$ onde $g(t) = \cos(t)$ e $h(t) = \mathrm{sen}(t)$. Assim

$$F(s) = G(s)H(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

(b) A função f tem o gráfico abaixo (a curva é um arco de parábola com vértice no ponto $(2, 1)$):



Solução:
Temos

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} \frac{t(4-t)}{4}, & 0 \le t \le 4, \\ 0, & t \ge 4 \end{cases} \\ &= \frac{1}{4}\left(-t^2 + 4t + u_4(t)(t^2 - 4t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-t^2 + 4t + u_4(t)((t-4)^2 + 4(t-4))\right) \end{aligned}$$

donde

$$F(s) = \frac{1}{4}\left(-\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s^2} + \frac{2e^{-4s}}{s^3} + \frac{4e^{-4s}}{s^3}\right) = \frac{(2s-1) + (2s+1)e^{-4s}}{2s^3}.$$