42a Olimpíada Internacional de Matemática
Washington, DC, Estados Unidos da América

Primeiro dia — 8 de Julho de 2001
9:00 — 13:30

1. Seja ABC um triângulo acutângulo com circuncentro O. Seja PA uma altura do triângulo com P no lado BC.

Considere que $\widehat{BCA} \geq \widehat{ABC} + 30°$.

Prove que $\widehat{CAB} + \widehat{COP} < 90°$.

2. Prove que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

para quaisquer números reais positivos a, b e c.

3. Vinte e uma meninas e vinte e um meninos participaram numa competição matemática.

- Cada participante resolveu no máximo seis problemas.
- Para cada menina e cada menino, existe pelo menos um problema que foi resolvido por ambos.

Prove que existe um problema que foi resolvido por pelo menos três meninas e pelo menos três meninos.

Cada problema vale sete pontos.

42a Olimpíada Internacional de Matemática
Washington, DC, Estados Unidos da América

Segundo dia — 9 de Julho de 2001
9:00 — 13:30

4. Seja n um inteiro ímpar maior do que 1 e sejam $k_1, k_2, \ldots, k_n$ inteiros dados. Para cada uma das $n!$ permutações $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, defina

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Prove que existem duas permutações b e c, $b \neq c$, tais que $n!$ é um divisor de $S(b) - S(c)$.

5. Num triângulo ABC, seja AP a bissectriz de $\widehat{BAC}$ com P no lado BC, e seja BQ a bissectriz de $\widehat{ABC}$ com Q no lado CA.

Sabemos que $\widehat{BAC} = 60°$ e que $AB + BP = AQ + QB$.

Quais são os possíveis valores dos ângulos do triângulo ABC?

6. Sejam a, b, c, d inteiros com $a > b > c > d > 0$. Considere que

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Prove que $ab + cd$ não é um número primo.

Cada problema vale sete pontos.