Seja a sequência X: N --> N (N = conjunto dos inteiros positivos), definida por:
X(1) = 1, e, para n > 1, X(n) = menor inteiro positivo tal que:
(i) X(n) não pertence a { X(1) , X(2) , ... , X(n-1) }, e
(ii) o conjunto { X(1), ..., X(n) } tem média aritmética inteira.
Prove que X é uma bijeção (ou seja, cada inteiro positivo aparece na sequência exatamente uma vez).

Sejam $S(n)=\sum_{i=1}^{n} X(i), m(n)=\dfrac{S(n)}{n}$ e $S(n)\equiv 0(\bmod n)$

É fácil ver que, para n > 1, S(n) = S(n - 1) + X(n) = m(n-1).(n-1) + X(n)
Donde verificamos que:
S(n) = m(n-1).n + X(n) – m(n-1) $\equiv$ 0 (mod n)
$\Rightarrow$ X(n) $\equiv$ m(n-1) (mod n) $\Rightarrow$ X(n) = m(n-1) + k.n para algum k inteiro
Essa linha também nos diz que M(i) = {m(1), m(2), ... m(i)} $\subset$ {X(1), X(2), ..., X(i+1)} pois o valor m(n-1) é o menor que satisfaz o critério de média aritmética inteira.
Neste ponto estou sendo ligeiramente desleixado na notação pois há valores repetidos para as médias o que faz com que o conjunto M(i) não tenha necessariamente i elementos.

$$\Rightarrow m(n)=\frac{S(n)}{n}=\frac{m(n-1)n+kn}{n}=m(n-1)+k$$

Vamos tentar provar por indução que m(n) = m(n-1) + k, sendo que k $\in$ {0, 1} para todo n.

m(2) = m(1) + 1, logo para o caso inicial temos que a afirmação é verdadeira.
Suponha que, para todo 2 <= i < n. m(i) = m(i-1) + k, com k $\in$ {0, 1}
Com essa hipótese temos:

m(1) <= m(2) <= ... <= m(n-1) <= n-1 .... (1)

$$X(i)=\begin{cases} m(i-1) \\ m(i-1)+i \end{cases} ....(2)$$

Também sabemos que X(i+1) $\equiv$ m(i) (mod i + 1)
Se para todo j, 1<= j <= i, X(j) $\neq$ m(i), assuma X(i+1) = m(i) e temos:

m(i+1) = m(i) + 0.

Se existe um valor para j em que X(j) = m(i), tome X(i+1) = m(i) + i + 1 e vamos verificar que não existe nenhum inteiro u, 2 <= u <= i tal que X(u) = X(i+1):
A partir de (2), temos X(u) <= m(u-1) + u
De (1) temos X(u) <= m(i) + u < m(i) + i + 1, pois u <= i. Verificar que X(1) $\neq$ X(i+1) é trivial.
Sendo assim m(i+1) = m(i) + 1.

Está provado então, pelo PIF que $m(n) = m(n-1) + k$, com $k \in \{0, 1\}$ para todo $n >= 2$.

Se provarmos que não existe um valor u tal que, para todo $v > u$, $m(v) = m(u)$ teremos provado que para todo inteiro a, existe um inteiro w tal que $m(w) = a$ e, como $\{m(1), m(2), ... m(w)\} \subset \{X(1), X(2), ..., X(w+1)\}$, a também pertence a seqüência X e logo teremos provado que X é sobrejetora.

Se $m(v) = m(u)$ para todo $v > u$, temos
$S(v) = m(u).v$
$S(v+1) = m(u).(v+1)$
$S(v+1) = S(v) + X(v+1) \Rightarrow X(v+1) = m(u)$
$S(v+2) = m(u).(v+2) = S(v+1) + X(v+2) \Rightarrow X(v+2) = m(u)$,

mas aí $X(v + 2) \in \{X(1)... X(v+1)\}$, o que contraria a definição da seqüência!
X é injetora e sobrejetora, logo é bijetora. CQD.