

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

PRIMEIRO NÍVEL (alunos até 13 anos)

8 de maio de 1999

Duração da prova: 3 horas

Cada problema vale 10 pontos.

Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações

Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

PROBLEMA 1

São escolhidos 2 números inteiros entre 1 e 100 inclusive, tais que a diferença é 7 e o produto é múltiplo de 5. De quantas maneiras pode ser feita a escolha?

PROBLEMA 2

Num paralelogramo $ABCD$, BD é a diagonal maior.

Ao fazer coincidir B com D mediante uma dobra se forma um pentágono regular.

Calcular as medidas dos ângulos que forma a diagonal BD com cada um dos lados do paralelogramo.

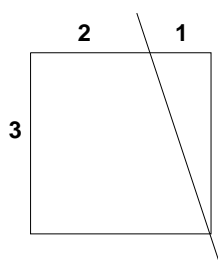
PROBLEMA 3

Em cada um dos 10 degraus de uma escada existe uma rã.

Cada rã pode, de um pulo, colocar-se em outro degrau, mas quando uma rã faz isso, ao mesmo tempo, uma outra rã pulará a mesma quantidade de degraus em sentido contrário: uma sobe e outra desce.

Conseguirão as rãs colocar-se todas juntas num mesmo degrau?

PROBLEMA 4



Dez cartões quadrados de 3 centímetros de lado cortam-se por uma linha, como mostra a figura.

Depois dos cortes tem-se 20 peças: 10 triângulos e 10 trapézios. Forme um quadrado que utilize as 20 peças sem superposições nem espaços.

PROBLEMA 5

Ana, Beatriz, Carlos, Diego e Emilia jogam um torneio de xadrez.

Cada jogador enfrenta uma vez só cada um dos outros quatro jogadores.

Cada jogador consegue 2 pontos se ganha a partida, 1 ponto se empata e 0 pontos se perde a partida.

Ao finalizar o torneio, as pontuações dos 5 jogadores são todas diferentes.

Encontre o máximo número de empates que pode ter tido o torneio e justifique por que não pode ter havido um número maior de empates.

5ª. OLIMPÍADA DE MAIO

SEGUNDO NÍVEL (alunos até 15 anos)

8 de maio de 1999

Duração da prova: 3 horas

Cada problema vale 10 pontos.

Não se pode usar máquina de calcular nem livros ou anotações

Justifique cada uma das respostas

Ao participar você se compromete a não divulgar os problemas até 20 de maio.

PROBLEMA 1

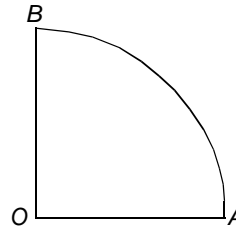
Um número natural de três algarismos é chamado de *tricúbico* se é igual a soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam *tricúbicos*.

PROBLEMA 2

A figura representa a quarta parte de um círculo de raio 1.

No arco AB , se consideram os pontos P e Q de forma tal que a reta PQ seja paralela a reta AB .

Sejam X e Y os pontos de interseção da reta PQ com as retas OA e OB respectivamente.



Calcular $PX^2 + PY^2$.

PROBLEMA 3

A primeira fileira da tabela ao lado se preenche com os números de 1 a 10, em ordem crescente.

A segunda fileira se preenche com os números de 1 a 10, em qualquer ordem.

Em cada casa da terceira fileira se escreve a soma dos dois números escritos nas casas acima.

Existe alguma maneira de preencher a segunda fileira de modo que os algarismos das unidades dos números da terceira fileira sejam todos distintos?

PROBLEMA 4

Seja ABC um triângulo equilátero. M é o ponto médio do segmento AB e N é o ponto médio do segmento BC .

Seja P o ponto exterior a ABC tal que o triângulo ACP é isósceles e retângulo em P . PM e AN cortam-se

em I . Prove que CI é a bissetriz do ângulo MCA .

PROBLEMA 5

São dados 12 pontos que são os vértices de um polígono regular de 12 lados. Rafael deve traçar segmentos que tenham seus dois extremos em dois dos pontos desenhados.

É permitido que cada ponto seja extremo de mais de um segmento e que os segmentos se cruzem, mas é proibido traçar três segmentos que sejam os três lados de um triângulo em que cada vértice é um dos 12 pontos iniciais.

Encontre o número máximo de segmentos que pode traçar Rafael e justifique por que não é possível traçar um número maior de segmentos.