39ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Primeiro dia
Duração da Prova: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 1
No quadrilátero convexo *ABCD*, as diagonais *AC* e *BD* são perpendiculares e os lados opostos *AB* e *DC* não são paralelos. Sabemos que o ponto *P*, onde se intersectam as mediatrizes de *AB* e *DC*, está no interior de *ABCD.* Prove que *ABCD* é um quadrilátero inscritível se, e somente se, os triângulos *ABP* e *CDP* têm áreas iguais.

PROBLEMA 2
Numa competição, existem a concorrentes e b juízes, onde $b \geq 3$ é um inteiro ímpar. Cada juiz avalia cada um dos concorrentes, classificando−o como "aprovado" ou "reprovado". Suponha que k é um número tal que as classificações dadas por dois juízes quaisquer coincidem no máximo para k concorrentes. Prove que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

PROBLEMA 3
Para qualquer inteiro positivo n, seja $d(n)$ o número de divisores positivos de n (incluindo 1 e n).
Determine todos os inteiros positivos k tais que $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ para algum n.

Segundo dia
Duração da Prova: 4 horas 30 min.

PROBLEMA 4
Determine todos os pares (a, b) de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$ divide $a^2b + a + b$.

PROBLEMA 5
Seja I o incentro do triângulo *ABC*. A circunferência inscrita no triângulo *ABC* é tangente aos lados *BC, CA* e *AB* nos pontos *K, L* e *M,* respectivamente. A reta que passa por *B*, paralela ao segmento *MK,* intersecta as retas *LM* e *LK* nos pontos *R* e *S,* respectivamente. Prove que o ângulo $\angle RIS$ é agudo.

PROBLEMA 6
Considere todas as funções f definidas no conjunto N dos inteiros positivos, com valores no mesmo conjunto, que satisfazem $f(t^2 f(s)) = s\ (f(t))^2$, para todos s e t em N. Determine o menor valor possível de $f(1998)$