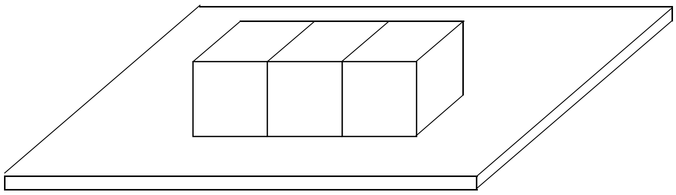
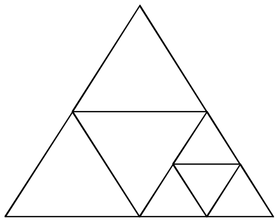
XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 1 (5ª. e 6ª. séries)

PROBLEMA 1:
Paulo tem três dados comuns idênticos nos quais a soma dos números em duas faces opostas é sempre igual a 7. Ele cola os dados, de modo que cada par de faces coladas tenha o mesmo número, e depois os coloca sobre uma mesa não transparente, conforme indica a figura. A soma dos números em todas as onze faces visíveis é 36. Qual é a soma dos números das três faces que estão em contato com a mesa?



PROBLEMA 2:
Um triângulo equilátero pode ser recortado em triângulos equiláteros menores. A figura abaixo mostra como recortar um triângulo equilátero em 7 triângulos equiláteros. Mostre como recortar um triângulo equilátero em 20 triângulos equiláteros menores.



PROBLEMA 3:
Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).
Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

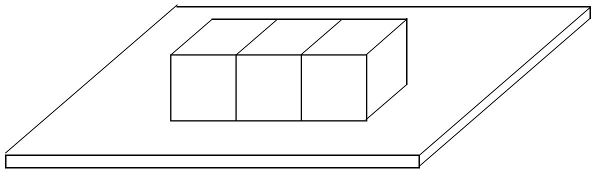
PROBLEMA 4:
Considere a seguinte tabela 5×5, preenchida com os números de 1 a 25.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical, trocamos o sinal de 2 números, de forma que, em cada fileira horizontal e em cada fileira vertical, haja 3 números positivos e 2 números negativos. Somamos, então, todos os números da tabela.
Calcule os possíveis valores dessa soma.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

PROBLEMA 1:
Paulo tem três dados comuns idênticos nos quais a soma dos números em duas faces opostas é sempre igual a 7. Ele cola os dados, de modo que cada par de faces coladas tenha o mesmo número, e depois os coloca sobre uma mesa não transparente, conforme indica a figura. A soma dos números em todas as onze faces visíveis é 36. Qual é a soma dos números das três faces que estão em contato com a mesa?



PROBLEMA 2:
Isabel tem dois baralhos, cada um com 50 cartas. Em cada um dos baralhos estão escritos os números de 1 a 100 (em cada carta estão escritos dois números, um em cada face da carta). Por um defeito de fabricação, a distribuição dos números nas cartas não é a mesma nos dois baralhos (por exemplo, em um dos baralhos o 1 aparece na mesma carta do 2; no outro, o 1 aparece com o 76).
Mostre como Isabel deve fazer para que, ao colocar as 100 cartas sobre uma mesa, as faces voltadas para cima mostrem todos os números de 1 a 100.

PROBLEMA 3:
Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);
b) a seguir, dobramos o papel, ajustando−o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.

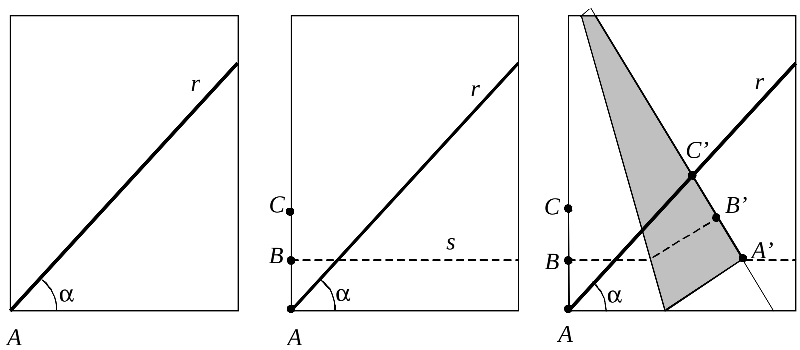


Figura 1 Figura 2 Figura 3

PROBLEMA 4:
É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 3 (Ensino Médio)

PRIMEIRO DIA

PROBLEMA 1:

Em uma folha de papel a reta r passa pelo canto A da folha e forma um ângulo α com a borda horizontal, como na figura 1. Para dividir este ângulo α em três partes iguais, executaremos as seguintes construções:

a) inicialmente, marcamos dois pontos B e C sobre a borda vertical de modo que $AB = BC$; pelo ponto B traçamos a reta s paralela à borda (figura 2);

b) a seguir, dobramos o papel, ajustando−o de modo que o ponto C coincida com um ponto C' sobre a reta r e o ponto A coincida com um ponto A' sobre a reta s (figura 3); chamamos de B' o ponto com o qual B coincide.

Mostre que as retas AA' e AB' dividem o ângulo α em três partes iguais.

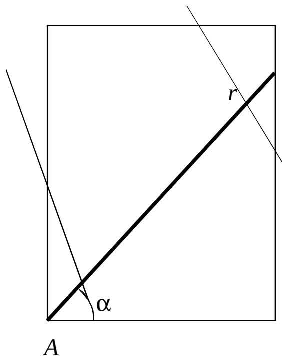


Figura 1

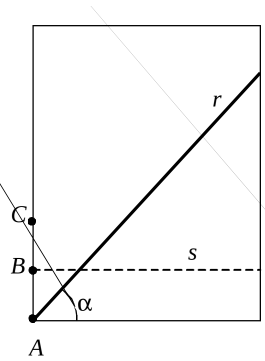


Figura 2

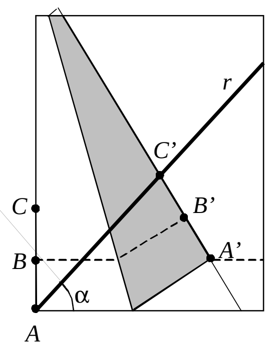


Figura 3

PROBLEMA 2:

Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n, onde n é um inteiro positivo (por exemplo, $\sigma(6) = 12$ e $\sigma(11) = 12$). Dizemos que n é *quase perfeito* se $\sigma(n) = 2n - 1$ (por exemplo, 4 é quase perfeito, pois $\sigma(4) = 7$). Sejam $n \bmod k$ o resto da divisão de n por k e

$$s(n) = \sum_{k=1}^{n} n \bmod k$$

(por exemplo: $s(6) = 0 + 0 + 0 + 2 + 1 + 0 = 3$ e $s(11) = 0 + 1 + 2 + 3 + 1 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 22$).

Prove que n é quase perfeito se, e somente se, $s(n) = s(n-1)$.

PROBLEMA 3:

Seja f uma função definida nos inteiros positivos da seguinte forma:

Dado n, escrevemos $n = 2^a \cdot (2b+1)$, com a e b inteiros e definimos $f(n) = a^2 + a + 1$.

Determine o menor inteiro positivo n tal que $f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \geq 123456$.

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase – Nível 3 (Ensino Médio)

SEGUNDO DIA

PROBLEMA 4:
A avenida Providência tem infinitos semáforos igualmente espaçados e sincronizados.
A distância entre dois semáforos consecutivos é de 1.500m. Os semáforos ficam abertos por 1 min 30s, depois fechados por 1 min, depois abertos por 1 min 30s e assim sucessivamente.
Suponha que um carro trafegue com velocidade constante igual a v, em m/s, pela avenida Providência.
Para quais valores de v é possível que o carro passe por uma quantidade arbitrariamente grande de semáforos sem parar em qualquer um deles?

PROBLEMA 5:
Seja X o conjunto de todas as seqüências $\underline{a} = (a_1, a_2, ..., a_{2000})$ tais que $a_i \in \{0,1,2\}$ se $1 \le i \le 1000$ e $a_i \in \{0,1\}$ se $1001 \le i \le 2000$. Dados $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em X, definimos a distância $d(\underline{a}, \underline{b})$ entre $\underline{a}$ e $\underline{b}$ como sendo o número de valores de i, $1 \le i \le 2000$, tais que $a_i \neq b_i$. Determine o número de funções $f : X \to X$ que preservam distância, isto é, tais que $d(f(\underline{a}), f(\underline{b})) = d(\underline{a}, \underline{b})$, para quaisquer $\underline{a}$ e $\underline{b}$ em X.

PROBLEMA 6:
Seja C um cubo de madeira. Para cada um dos 28 pares de vértices de C cortamos o cubo C pelo plano mediador dos dois vértices do par. Em quantos pedaços fica dividido o cubo?

Nota: Dados dois pontos A e B no espaço, o plano mediador de A e B é o conjunto dos pontos do espaço cujas distâncias a A e B são iguais. Em outras palavras: é o plano perpendicular ao segmento AB passando pelo ponto médio de AB.