

40ª. OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Problemas e Resultados

Primeiro Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos

Cada problema vale 7 pontos

PROBLEMA 1

Determine todos os conjuntos finitos S de pontos do plano com pelo menos três elementos que satisfazem a seguinte condição:

Para quaisquer dois pontos distintos A e B de S , a mediatriz do segmento AB é um eixo de simetria de S .

PROBLEMA 2

Seja $n \geq 2$ um inteiro fixo.

- a) Determinar a menor constante C para a qual a desigualdade

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \right)^4$$

é válida para quaisquer números reais $x_1, \dots, x_n \geq 0$.

- b) Para esta constante C , determine quando ocorre a igualdade.

PROBLEMA 3

Considere um tabuleiro quadrado $n \times n$, onde n é um inteiro positivo par fixo. O tabuleiro está dividido em n^2 quadrados unitários. Dizemos que dois quadrados distintos do tabuleiro são *adjacentes* se eles têm um lado comum.

Marcam-se N quadrados unitários do tabuleiro de tal forma que qualquer quadrado (marcado ou não) é adjacente a pelo menos um quadrado marcado.

Determine o menor valor possível para N .

Segundo Dia

Duração da prova: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

PROBLEMA 4

Determine todos os pares (n, p) de inteiros estritamente positivos tais que

$$\begin{aligned} p &\text{ é primo,} \\ n &\leq 2p, \text{ e} \\ (p-1)^n + 1 &\text{ é divisível por } n^{p-1}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5

Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 estão contidas no interior de uma circunferência Γ e são tangentes a Γ em pontos distintos M e N , respectivamente. A circunferência Γ_1 passa pelo centro de Γ_2 . A reta que passa pelos dois pontos de intersecção de Γ_1 e Γ_2 intersecta Γ em A e B . As retas MA e MB intersectam Γ_1 respectivamente em C e D . Prove que CD é tangente a Γ_2 .

PROBLEMA 6

Determine todas as funções $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + x f(y) + f(x) - 1$$

para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.