XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 1

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − SC − SP

10 de junho de 2000

- ***A duração da prova é de 3 horas.***
- ***Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.***
- ***Você pode solicitar papel para rascunho.***
- ***Entregue apenas a folha de respostas.***

1. Observe as multiplicações a seguir:

$$12\ 345\ 679 \times 18 = 222\ 222\ 222$$
$$12\ 345\ 679 \times 27 = 333\ 333\ 333$$
$$12\ 345\ 679 \times 54 = 666\ 666\ 666$$

Para obter 999 999 999 devemos multiplicar 12 345 679 por:
A) 29 **B)** 99 **C)** 72 **D)** 41 **E)** 81

2. Outro dia ganhei 250 reais, incluindo o pagamento de horas extras. O salário (sem horas extras) excede em 200 reais o que recebi pelas horas extras. Qual é o meu salário sem horas extras?
A) 200 reais **B)** 150 reais **C)** 225 reais **D)** 175 reais **E)** 180 reais

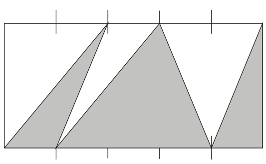
3. Num relógio digital, que marca de 0:00 até 23:59, quantas vezes por dia o mostrador apresenta todos os algarismos iguais?
A) 10 **B)** 8 **C)** 6 **D)** 7 **E)** 9

4. A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?
A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

5. Numa caixa havia várias bolas, sendo 5 azuis, 4 amarelas, 3 vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Renato retirou 3 bolas da caixa. Sabendo que nenhuma delas era azul, nem amarela, nem preta, podemos afirmar a respeito dessas 3 bolas que:

A) são da mesma cor. **B)** são vermelhas. **C)** uma é vermelha e duas são brancas.
D) uma é branca e duas são vermelhas. **E)** pelo menos uma é vermelha.

6. Se a área do retângulo dado é 12, qual é a área da figura sombreada?



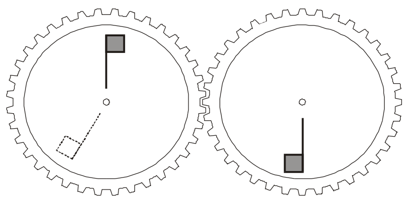
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

7. O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos:
10 = 5 + 5 e 10 = 7 + 3. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?
A) 4 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** nenhuma

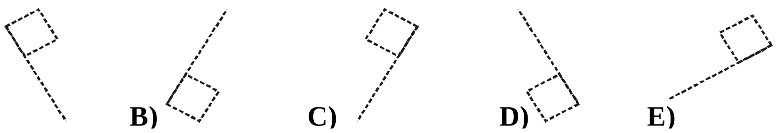
8. 1 litro de álcool custa R$0,75. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool.
Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?
A) 54 **B)** 72 **C)** 50 **D)** 52 **E)** 45

9. Um certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo−se
a ordem dos algarismos desse número, obtém−se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:
A) 7 **B)** 10 **C)** 13 **D)** 9 **E)** 11

10. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:



As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

11. Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado.
Para que possam ser melhor transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. O número de latas de palmito em cada caixote é
A) 576 **B)** 4.608 **C)** 2.304 **D)** 720 **E)** 144

12. Há 18 anos Hélio tinha precisamente três vezes a idade de seu filho. Agora tem o dobro
da idade desse filho. Quantos anos têm Hélio e seu filho?

A) 72 anos e 36 anos. **B)** 36 anos e 18 anos. **C)** 40 anos e 20 anos.
D) 50 anos e 25 anos. **E)** 38 anos e 19 anos.

13. Se os números naturais são colocados em colunas, como se mostra abaixo, debaixo de que letra aparecerá o número 2000?

A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
1		**2**		**3**		**4**		**5**
	9		**8**		**7**		**6**	
10		**11**		**12**		**13**		**14**
	18		**17**		**16**		**15**	
19		**20**		**21**		**...**		**...**

A) ***F*** **B)** ***B*** **C)** ***C*** **D)** ***I*** **E)** ***A***

14. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O numero de filhos do emir é:

A) 111 **B)** 48 **C)** 51 **D)** 78 **E)** 75

15. Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

− Eu não fui, diz o Benjamim. − Foi o Carlos, diz o Mário.
− Foi o Pedro, diz o Carlos. − O Mário não tem razão, diz o Pedro.

Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

A) Mário **B)** Pedro **C)** Benjamim **D)** Carlos
E) não é possível saber, pois faltam dados

16. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de
uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos
terminam em 1?

A) 1.000 **B)** 10.000 **C)** 50.000 **D)** 100.000 **E)** 500.000

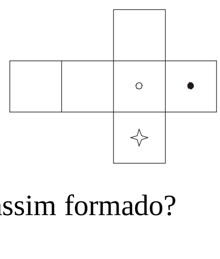
18. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram
distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na turma A e os 30 seguintes na turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu−se passar o último colocado da turma A para a turma B. Com isso:

A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

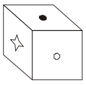
19. Escrevem−se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de
7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo−se 7, 8, 14, 16, ... O 100º número escrito é:

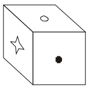
A) 406 **B)** 376 **C)** 392 **D)** 384 **E)** 400

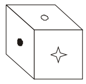
20. A figura abaixo foi desenhada em cartolina e dobrada de modo a formar um cubo.

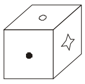


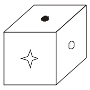
Qual das alternativas mostra o cubo assim formado?

A) 

B) 

C) 

D) 

E) 

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − SC − SP

10 de junho de 2000

− A duração da prova é de 3 horas.
− Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
− Você pode solicitar papel para rascunho.
− Entregue apenas a folha de respostas.

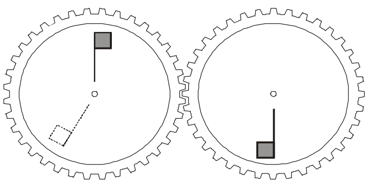
1. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?

A) 1.000 **B)** 10.000 **C)** 50.000 **D)** 100.000 **E)** 500.000

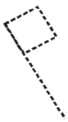
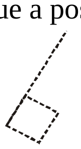
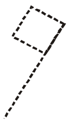
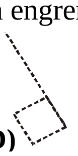
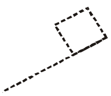
2. Uma fábrica embala latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado, de modo que cada caixa contém 8 latas. Para poderem ser melhor transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. O número de latas de palmito em cada caixote é:

A) 576 **B)** 4.608 **C)** 2.304 **D)** 720 **E)** 144

3. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:



As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Quatro amigos vão visitar um museu e um deles resolve entrar sem pagar. Aparece um fiscal que quer saber qual deles entrou sem pagar.

− Eu não fui, diz o Benjamim.
− Foi o Carlos, diz o Mário.
− Foi o Pedro, diz o Carlos.
− O Mário não tem razão, diz o Pedro.

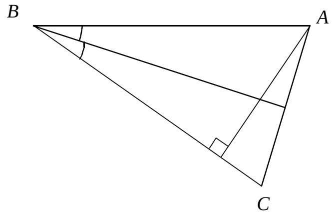
Só um deles mentiu. Quem não pagou a entrada do museu?

A) Mário **B)** Pedro **C)** Benjamim **D)** Carlos

E) não é possível saber, pois faltam dados

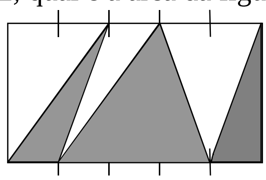
5. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu−se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:
A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

6. No triângulo *ABC* representado ao lado, a medida do ângulo $\hat{C}$ é 60° e a bissetriz do ângulo $\hat{B}$ forma 70° com a altura relativa ao vértice *A*. A medida do ângulo $\hat{A}$ é:



A) 50° **B)** 30° **C)** 40° **D)** 80° **E)** 70°

7. Se a área do retângulo dado é 12, qual é a área da figura sombreada?



A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 8

8. Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?
A) 105 **B)** 630 **C)** 900 **D)** 1.050 **E)** não pode ser determinado

9. *DEFG* é um quadrado no exterior do pentágono regular *ABCDE*. Quanto mede o ângulo *EÂF*?
A) 9º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º **E)** 21º

10. Quantos são os números inteiros de 2 algarismos que são iguais ao dobro do produto de seus algarismos?
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

11. Escrevem−se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo−se 7, 8, 14, 16, . O 100° número escrito é:
A) 406 **B)** 376 **C)** 392 **D)** 384 **E)** 400

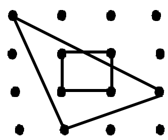
12. Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram−se ao acaso (sem

reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?
A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

13. Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?

A) xy **B)** $x^2 + y^2$ **C)** $(x + y)^2$ **D)** $x^2 + y(x + y)$ **E)** $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$

14. Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. A região comum ao triângulo e ao quadrado tem área:



A) $\frac{9}{10}$ **B)** $\frac{15}{16}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{11}{12}$ **E)** $\frac{14}{15}$

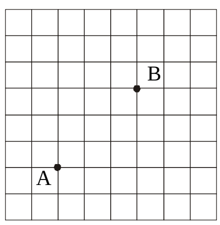
15. Sejam a e b números reais positivos tais que $\frac{a}{b} < 1$. Então $\frac{a+1}{b+1}$

A) é igual a $\frac{a}{b} + 1$. **B)** é igual a $\frac{a}{b}$. **C)** é menor que $\frac{a}{b}$.

D) é maior que $\frac{a}{b}$ mas menor que 1. **E)** pode ser maior que 1.

16. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?
A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

17. Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?



A) 3 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 5

18. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma, num de seus escritos, que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O número de filhos do emir é:

A) 75 **B)** 48 **C)** 51 **D)** 78 **E)** 111

19. De Itacimirim a Salvador, pela estrada do Coco, são 60 km. Às 11 horas, a 15 km de Salvador, dá−se um acidente que provoca um engarrafamento, que cresce à velocidade de 4 km/h, no sentido de Itacimirim. A que horas, aproximadamente, devemos sair de Itacimirim para chegar a Salvador ao meio−dia, sabendo que viajamos a 60 km/h, exceto na zona de engarrafamento, onde a velocidade é 6 km/h?

A) 10h43min **B)** 10h17min **C)** 10h48min **D)** 10h53min **E)** 11h01min

20. Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2000º número da nossa lista?

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

A) 3931 **B)** 3933 **C)** 3935 **D)** 3937 **E)** 3939

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 3

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − SC − SP

10 de junho de 2000

− A duração da prova é de 3 horas.
− Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
− Você pode solicitar papel para rascunho.
− Entregue apenas a folha de respostas.

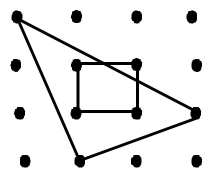
1. Se x e y são números reais positivos, qual dos números a seguir é o maior?

A) xy **B)** $x^2 + y^2$ **C)** $(x + y)^2$ **D)** $x^2 + y(x + y)$ **E)** $\frac{x^3 + y^3}{x + y}$

2. $DEFG$ é um quadrado no exterior do pentágono regular $ABCDE$. Quanto mede o ângulo
$E\hat{A}F$?

A) 9º **B)** 12º **C)** 15º **D)** 18º **E)** 21º

3. Na figura, as distâncias entre dois pontos horizontais consecutivos e as distâncias entre
dois pontos verticais consecutivos são iguais a 1. A região comum ao triângulo e ao quadrado tem área:



A) $\frac{9}{10}$ **B)** $\frac{15}{16}$ **C)** $\frac{8}{9}$ **D)** $\frac{11}{12}$ **E)** $\frac{14}{15}$

4. Escrevemos uma lista com todos os números inteiros de 1 a 30, inclusive. Em seguida,
eliminamos alguns destes números de forma que não sobrem dois números tais que um seja o dobro do outro. Qual é a quantidade máxima de inteiros que podem permanecer na lista?

A) 15 **B)** 18 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

5. Sejam a e b números reais positivos tais que $\frac{a}{b} < 1$. Então $\frac{a+1}{b+1}$

A) é igual a $\frac{a}{b} + 1$. **B)** é igual a $\frac{a}{b}$. **C)** é menor que $\frac{a}{b}$.

D) é maior que $\frac{a}{b}$ mas menor que 1. **E)** pode ser maior que 1.

6. Seja f uma função real que tem as seguintes propriedades:

i) Para todos x, y reais, $f(x + y) = x + f(y)$;
ii) $f(0) = 2$.

Quanto vale $f(2000)$?

A) 0 **B)** 2 **C)** 1998 **D)** 2000 **E)** 2002

7. Há três cartas viradas sobre uma mesa. Sabe−se que em cada uma delas está escrito um
número inteiro positivo. São dadas a Carlos, Samuel e Tomás as seguintes informações:

i) todos os números escritos nas cartas são diferentes;
ii) a soma dos números é 13;
iii) os números estão em ordem crescente, da esquerda para a direita.

Primeiro, Carlos olha o número na carta da esquerda e diz: "Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números." Em seguida, Tomás olha o número na carta da direita e diz: "Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números." Por fim, Samuel olha o número na carta do meio e diz: "Não tenho informações suficientes para determinar os outros dois números." Sabendo que cada um deles sabe que os outros dois são inteligentes e escuta os comentários dos outros, qual é o número da carta do meio?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5
E) Não há informações suficientes para determinar o número.

8. Em um jogo de duas pessoas, os jogadores tiram, alternadamente, 1, 2, 3, 4 ou 5 palitos de
uma pilha que inicialmente tem 1000 palitos. Ganha o jogador que tirar o último palito da pilha. Quantos palitos o jogador que começa deve tirar na sua jogada inicial de modo a assegurar sua vitória?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

9. Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram−se ao acaso (sem
reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?

A) 51 **B)** 52 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 55

10. A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3{,}5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor - \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é:

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 15

11. Colocamos em ordem crescente os números escritos nas casas brancas do tabuleiro a seguir (estamos mostrando apenas as suas quatro primeiras linhas). Assim, por exemplo, o nono número da nossa lista é 14. Qual é o 2000º número da nossa lista?

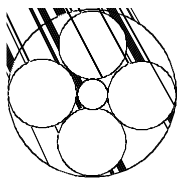
			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

A) 3931 **B)** 3933 **C)** 3935 **D)** 3937 **E)** 3939

12. Os 61 aprovados em um concurso, cujas notas foram todas distintas, foram distribuídos em duas turmas, de acordo com a nota obtida no concurso: os 31 primeiros foram colocados na Turma A e os 30 seguintes na Turma B. As médias das duas turmas no concurso foram calculadas. Depois, no entanto, decidiu−se passar o último colocado da Turma A para a Turma B. Com isso:

A) A média da turma A melhorou, mas a da B piorou.
B) A média da turma A piorou, mas a da B melhorou.
C) As médias de ambas as turmas melhoraram.
D) As médias de ambas as turmas pioraram.
E) As médias das turmas podem melhorar ou piorar, dependendo das notas dos candidatos.

13. A figura abaixo mostra o logotipo de uma empresa, formado por dois círculos concêntricos e por quatro círculos de mesmo raio, cada um deles tangente a dois dos outros e aos dois círculos concêntricos. O raio do círculo interno mede 1 cm. Então o raio do círculo externo deverá medir, em cm:



A) $2\sqrt{2} + 3$ **B)** $\sqrt{2} + 2$ **C)** $4\sqrt{2} + 1$ **D)** $3\sqrt{2}$ **E)** $\sqrt{2} + 1$

14. Alberto, Beatriz e Carlos correm numa pista circular. Todos saem ao mesmo tempo e do mesmo lugar, cada um desenvolvendo velocidade constante. Alberto e Beatriz correm no mesmo sentido. Correndo no sentido oposto, Carlos encontra Alberto, pela primeira vez, exatamente 90 segundos após o início da corrida e encontra Beatriz exatamente 15 segundos depois. Quantos segundos são necessários para que Alberto ultrapasse Beatriz pela primeira vez?

A) 105 **B)** 630 **C)** 900 **D)** 1050 **E)** não pode ser determinado

15. Quantos são os números inteiros de dois algarismos que são o dobro do produto de seus algarismos?

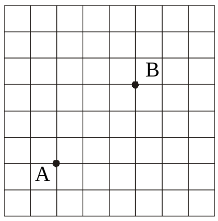
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

16. Dois nadadores, inicialmente em lados opostos de uma piscina, começam simultanea−
−mente a nadar um em direção ao outro. Um deles vai de um lado a outro da piscina em 45 segundos e o outro em 30 segundos. Eles nadam de um lado para outro por 12 minutos, sem perder qualquer tempo nas viradas. Quantas vezes eles passam um pelo outro (indo no mesmo sentido ou em sentidos opostos) durante este tempo, contando as vezes em que se encontram nos extremos da piscina.
A) 10 **B)** 12 **C)** 15 **D)** 18 **E)** 20

17. A soma de dois números naturais é 29. O mínimo valor para a soma de seus quadrados é:
A) 785 **B)** 733 **C)** 647 **D)** 421 **E)** 334

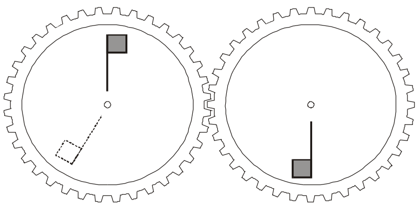
18. Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos
terminam em 1?
A) 1.000 **B)** 10.000 **C)** 50.000 **D)** 100.000 **E)** 500.000

19. Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices
estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?

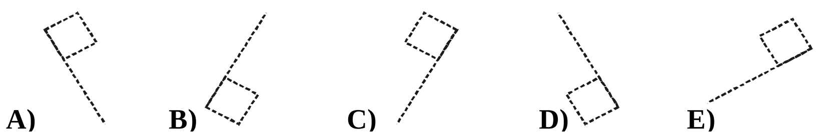


A) 3 **B)** 4 **C)** 7 **D)** 2 **E)** 5

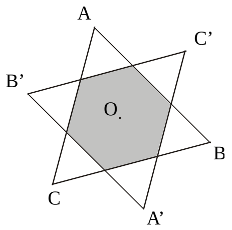
20. Juliano colou uma bandeirinha cinza em cada engrenagem, como mostra a figura abaixo:



As engrenagens são iguais e quando a engrenagem da esquerda girou um pouco, a sua bandeirinha ficou na posição indicada com a bandeirinha branca pontilhada. Nesta condição, podemos afirmar que a posição da bandeirinha na engrenagem da direita é:



21. Na figura temos que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são equiláteros e a região destacada é um hexágono regular. A razão entre a área da região destacada e a área do triângulo ABC é igual a:



A) 1 **B)** $\frac{2}{3}$ **C)** $\frac{4}{5}$ **D)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **E)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

22. O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos,
incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma, num de seus escritos, que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O número de filhos do emir é:

A) 75 **B)** 48 **C)** 51 **D)** 78 **E)** 111

23. De Itacimirim a Salvador, pela estrada do Coco, são 60 km. Às 11 horas, a 15 km de
Salvador, dá−se um acidente que provoca um engarrafamento, que cresce à velocidade de 4 km/h, no sentido de Itacimirim. A que horas, aproximadamente, devemos sair de Itacimirim para chegar a Salvador ao meio−dia, sabendo que viajamos a 60 km/h, exceto na zona de engarrafamento, onde a velocidade é 6 km/h?

A) 10h43min **B)** 10h17min **C)** 10h48min **D)** 10h53min **E)** 11h01min

24. Seja $P(x) = a_{2000}x^{2000} + a_{1999}x^{1999} + a_{1998}x^{1998} + \quad + a_1x + a_0$. Então $a_{2000} + a_{1998} + a_{1996} +$
$+ a_0$ é igual a

A) $\frac{P(1) - P(-1)}{2}$ **B)** $\frac{P(1) + P(-1)}{2}$ **C)** $P(2000) + P(1998) + \quad + P(0)$

D) $P(0) \cdot P(1)$ **E)** $P(-1) \cdot P(1)$

25. Quantos números de três algarismos (que não começam com 0) possuem um algarismo que é a média aritmética dos outros dois?

A) 121 **B)** 117 **C)** 112 **D)** 115 **E)** 105

GABARITO

Primeiro Nível (5ª. e 6ª. séries)

1) E	**6) D**	**11) A**	**16) D**
2) C	**7) B**	**12) A**	**17) D**
3) B	**8) A**	**13) C**	**18) C**
4) D	**9) D**	**14) C**	**19) E**
5) E	**10) A**	**15) B**	**20) B**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. E − Os exemplos dados mostram que 12 345 679 $\times$ 9k = *kkk kkk kkk.* Assim, para obter 999 999 999 devemos
multiplicar 12 345 679 por 9 $\times$ 9 = 81.

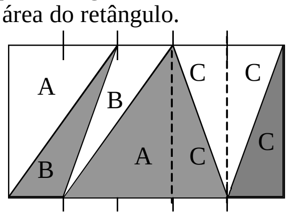
2. C.− Salário + horas extras = 250; salário − horas extras = 200. Logo o dobro do salário é igual a 450, portanto o salário é $\frac{450}{2} = 225$ reais.

3. B.− Os algarismos são iguais nos seguintes instantes: 0:00, 1:11, 2:22, 3:33, 4:44, 5:55, 11:11, 22:22.

4. D.− Ele separa 40 garrafas vazias e as troca por 10 garrafas de 1 litro cheias de leite. Esvaziadas as 10 garrafas, ele pode juntá−las com as 3 vazias que restaram e trocá−las por 3 garrafas cheias, sobrando ainda 1 garrafa vazia. Esvaziando as 3 cheias e juntando com a garrafa vazia ele ainda pode obter em troca mais uma garrafa cheia. Ao todo ele pode obter, por sucessivas trocas, 10 + 3 + 1 = 14 garrafas cheias de leite, todas elas a partir das 43 vazias que ele possuía.

5. E.− As três bolas retiradas são brancas ou vermelhas. Como há somente duas bolas brancas, haverá pelo menos uma vermelha dentre as retiradas.

6. D.− Os três triângulos sombreados têm altura igual à altura do retângulo. Como a soma de suas bases é igual à base do retângulo, a soma de suas áreas é igual à metade da área do retângulo. Alternativamente, pode−se observar que as partes sombreadas e não sombreadas podem ser subdivididas de tal modo que a cada parte sombreada corresponde exatamente uma parte congruente não sombreada, como mostra a figura abaixo. Logo, a área sombreada corresponde à metade da área do retângulo.



7. B.− Como um desses primos é par e o outro é ímpar, temos apenas $25 = 2 + 23$.

8. A.− $600km \cdot \frac{3l}{25km} \cdot \frac{R\$0,75}{1l} = R\$54,00$.

9. D.− Seja *N* = 10*a* + *b*. O número 10*b* + *a* (obtido invertendo−se os algarismos de *N*) é ímpar, logo *a* é ímpar. Portanto *N* = 16 ou *N* = 36. Mas 61 − 16 = 45, que não é um cubo perfeito, e 63 − 36 = 27 = 3^3 . Então *N* = 36 e 3 + 6 = 9.

10. A.− Considerando que a engrenagem da esquerda girou um certo ângulo *x* em um sentido (horário ou anti−horário), a engrenagem da direita girou o mesmo ângulo *x* no sentido oposto, e portanto a bandeirinha ficou na posição mostrada na alternativa A.

11. A.− Em cada caixote de madeira cabem $\frac{60}{20} \cdot \frac{80}{20} \cdot \frac{120}{20} = 72$ caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Logo em cada caixote cabem $72 \times 8 = 576$ latas de palmito.

12. A.− Sendo *x* a idade atual do filho, 2*x* é a idade atual de Hélio; há 18 anos, as idades de Hélio e do filho, eram, respectivamente, $2x - 18$ e $x - 18$; assim
$2x - 18 = 3(x - 18) \Leftrightarrow 2x - 18 = 3x - 54 \Leftrightarrow x = 36$, logo $2x = 72$.

13. C.− As colunas reúnem números que deixam mesmo resto na divisão por 9; como 2000 dividido por 9 deixa resto 2, está na mesma coluna que o 2, ou seja, coluna C.

14. C.− Número de gêmeos = número de trigêmeos = número de quadrigêmeos = *n*; logo *n* é um múltiplo positivo de 12. Mas $39 - 2n > 0$, logo $n = 12$. Conseqüentemente, o número de filhos é $12 + 39 = 51$.

15. B.− Mário e Carlos não podem ter ambos dito a verdade, pois somente um entrou sem pagar. Se Mário não falou a verdade, então o que Carlos disse é verdadeiro, o que Pedro disse é verdadeiro e o que Benjamim disse é verdadeiro. Disso se conclui que Pedro entrou sem pagar (Se Mário disse a verdade, Carlos não disse e Pedro disse, o que é contraditório).

16. D.− Uma estratégia que o jogador que começa pode adotar é tirar 6 − *k* palitos, se o outro jogador tirou *k* palitos na jogada anterior. Como o resto da divisão de 1000 por 6 é 4, temos que o jogador que começa deve tirar no começo 4 palitos para garantir a vitória (nas outras jogadas, basta seguir a estratégia anterior).

17. D.− Para que o cubo de um número termine em 1, o número deve terminar em 1 (note que ele não pode ser par e que $3^3 = 27,\ 5^3 = 125,\ 7^3 = 343$ e $9^3 = 729$). Assim, os números menores que 1.000.000 que têm cubos terminados em 1 são $\frac{1.000.000}{10} = 100.000$.

18. C.− Como o aluno que saiu da turma *A* é o que tinha a menor nota, a média das notas desta turma aumentou; como, todavia, este aluno tem nota maior que a de qualquer outro aluno da turma *B*, temos que a média da turma *B* aumentou.

19. E.− O mínimo múltiplo comum de 7 e 8 é 56. Entre dois múltiplos consecutivos de 56 há sete múltiplos de 7 e seis múltiplos de 8. Assim, os múltiplos de 56 são os elementos de ordem 14, 28, 42, da seqüência. Portanto, o 98° elemento da sequência é igual a $56 \times 7 = 392$ e o 100° é $392 + 8 = 400$.

20. B.−

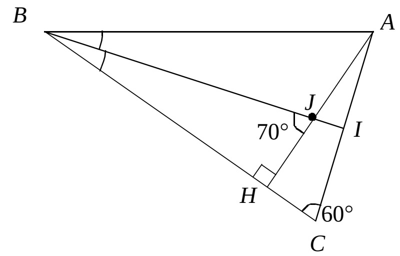
Segundo Nível (7ª. e 8ª. séries)

1) D	**6) D**	**11) E**	**16) D**
2) A	**7) D**	**12) C**	**17) E**
3) A	**8) B**	**13) C**	**18) C**
4) B	**9) A**	**14) D**	**19) A**
5) C	**10) B**	**15) D**	**20) D**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. D.−Veja a solução do problema 17 do Nível 1.
2. A.− Veja a solução do problema 11 do Nível 1.
3. A.− Veja a solução do problema 10 do Nível 1.
4. B.− Veja a solução do problema 15 do Nível 1.
5. C.− Veja a solução do problema 18 do Nível 1.

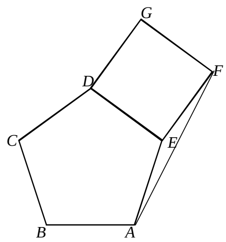
6. D.− Temos $A\hat{B}J = H\hat{B}J = 90^0 - 70^0 = 20^0$. Logo, $\hat{A} = 180^0 - (60^0 + 40^0) = 80^0$.



7. D.− Veja a solução do problema 6 do Nível 1.

8. B.− Sejam v_A, v_B e v_C as velocidades de Alberto, Beatriz e Carlos, respectivamente, e seja d o comprimento da pista. O tempo necessário para que Alberto alcance Beatriz é $t = \dfrac{d}{v_A - v_B}$. Por outro lado, temos $\dfrac{d}{v_A + v_C} = 90$ e $\dfrac{d}{v_B + v_C} = 105$. Assim, $v_A + v_C = \dfrac{d}{90}$, $v_B + v_C = \dfrac{d}{105}$ e, portanto, $v_A - v_B = \dfrac{d}{90} - \dfrac{d}{105} = \dfrac{d}{630}$. Logo, o tempo pedido é $t = \dfrac{d}{\frac{d}{630}} = 630$ segundos.

9. A.−



Lembrando que o ângulo interno de um pentágono regular é igual a $\dfrac{(5-2)180^o}{5}$ = 108º, temos que $A\hat{E}F$ = 360º − 108º − 90º = 162º. Como o triângulo AEF é isósceles com $AE = EF$, temos $E\hat{A}F = \dfrac{180^o - 162^o}{2}$ = 9º

10.− B Seja $(ab)_{10}$ um inteiro de dois algarismos. Devemos ter $10a + b = 2ab \Leftrightarrow (2a - 1)(b - 5) = 5$. Como a e b são inteiros com $a > 0$ e $0 \le b \le 9$, temos que $2a - 1 > 0$ e assim, $2a - 1 = 5$ e $b - 5 = 1 \Leftrightarrow a = 3$ e $b = 6$. Logo o único inteiro satisfazendo as condições do enunciado é 36.

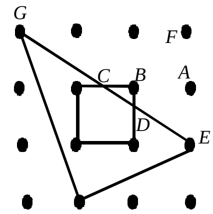
11. E.− Veja a solução do problema 19 do Nível 1.

12. C.− Existem 27 possíveis resultados para a soma dos algarismos (1 a 27). As somas 1 e 27 só podem ser obtidas de um modo cada (100 e 999, respectivamente). Assim, no caso mais desfavorável, retiraríamos 27 + 25 cartões, e uma das somas aparecerá pela terceira vez no próximo cartão. Portanto precisamos de no mínimo 53 cartões.

13. C.− Temos $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow xy \le x^2 - xy + y^2 = \dfrac{x^3 + y^3}{x + y}$. Assim, como $xy > 0$,

$$xy \le \frac{x^3 + y^3}{x + y} = x^2 - xy + y^2 < x^2 + y^2 < x^2 + xy + y^2 = x^2 + y(x + y) < x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

14. D.−



Temos que $\Delta ACE \sim \Delta FGE \Rightarrow \dfrac{AC}{3} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow AC = \dfrac{3}{2}$. Logo $BC = \dfrac{3}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. Temos também que $\Delta BCD \sim \Delta ACE \Rightarrow \dfrac{BD}{1} = \dfrac{1/2}{3/2} \Leftrightarrow BD = \dfrac{1}{3}$. Logo a área do triângulo *BCD* é $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$ e portanto a área desejada é $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$.

15. D.− Como $a, b > 0$, temos $\dfrac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$. Portanto, como $a < b \Leftrightarrow a + 1 < b + 1 \Leftrightarrow \dfrac{a+1}{b+1} < 1$ e $a < b \Leftrightarrow a + ab < b + ab \Leftrightarrow \dfrac{a}{b} < \dfrac{a+1}{b+1}$, temos que $\dfrac{a+1}{b+1}$ é maior que $\dfrac{a}{b}$ mas menor que 1.

16. D.− Veja a solução do problema 16 do Nível 1.

17. E.− O segmento *AB* pode ser um dos lados do retângulo. Há 4 retângulos que podem ser construídos com essa propriedade. Se o segmento *AB* for uma diagonal do retângulo podemos construir apenas um retângulo, totalizando 5 possibilidades.

18. C.− Veja a solução do problema 14 do Nível 1.

19. A.− Seja t o número de horas que devemos sair antes das 11h para chegar em Salvador ao meio−dia e T o tempo passado, em horas, até entrarmos no congestionamento. Assim, antes de chegar ao congestionamento andamos $60(t + T)$ km. Em seguida, devemos passar por um congestionamento de extensão $4T$ para depois de 15 km chegarmos a Salvador. Assim, $60(t + T) + 4T + 15 = 60 \Leftrightarrow 60t + 64T = 45$.
Assim, passamos $t + T$ horas antes do congestionamento, demoramos $4T/6 = 2T/3$ horas no congestionamento e passamos mais 15/60 = ¼ de hora até chegarmos a Salvador. Devemos ter $1 + t = t + T + 2T/3 + ¼ \Leftrightarrow T = 9/20$ h.
Logo $60t = 45 - 64 \cdot 9/20 = 16{,}2$ min e portanto devemos sair aproximadamente às 10h43min.

20. D.− Nas n primeiras linhas, temos $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ números, dos quais $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ estão em casas brancas. Como $\dfrac{62\cdot 63}{2} < 2000 \leq \dfrac{63\cdot 64}{2}$, temos que o 2000º número está na 63ª linha. Como $\dfrac{62\cdot 63}{2} = 1953$, concluímos que o número procurado é o (2(2000 − 1953) − 1)º = 93º número desta linha. Enfim, como o último termo da 62ª linha é $62^2 = 3844$, temos que o número procurado é 3844 + 93 = 3937.

Terceiro Nível (Ensino Médio)

1) C	**6) E**	**11) D**	**16) E**	**21) B**

2) A	**7) C**	**12) C**	**17) D**	**22) C**
3) D	**8) D**	**13) A**	**18) D**	**23) A**
4) D	**9) C**	**14) B**	**19) E**	**24) B**
5) D	**10) E**	**15) B**	**20) A**	**25) A**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1. C.− Veja a solução do problema 13 do Nível 2.
2. A.− Veja a solução do problema 9 do Nível 2.
3. D.− Veja a solução do problema 14 do Nível 2.

4. D.− Considere os seguintes conjuntos:
$A_1 = \{1; 2; 4; 8; 16\}$ $A_2 = \{3; 6; 12\}$ $A_3 = \{5; 10; 20\}$ $A_4 = \{7; 14; 28\}$ $A_5 = \{9; 18\}$
$A_6 = \{11; 22\}$ $A_7 = \{13; 26\}$ $A_8 = \{15; 30\}$ $A_9 = \{17\}$; $A_{10} = \{19\}$;
$A_{11} = \{21\}$; $A_{12} = \{23\}$; $A_{13} = \{25\}$; $A_{14} = \{27\}$; $A_{15} = \{29\}$.
Cada conjunto contém números que são o dobro de algum número do mesmo conjunto. Observemos que podemos tomar todos os números dos conjuntos de A_9 a A_{15}, somente um dos dois elementos dos conjuntos A_5 a A_8, dois elementos dos conjuntos de A_2 a A_4, e três elementos do conjunto A_1. Portanto podemos tomar no máximo $7 + 4 + 3 \cdot 2 + 3 = 20$ elementos.

5. D.− Veja a solução do problema 15 do Nível 2.

6. E.− Fazendo $x = 2000$ e $y = 0$, temos $f(2000 + 0) = 2000 + f(0) = 2000 + 2 = 2002$.

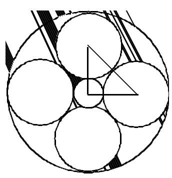
7. C.− Sejam x, y e z os números das cartas da esquerda, do meio e da direita, respectivamente. Temos que $x < y < z$ e $x + y + z = 13$. Assim, $x + x + x < x + y + z \Leftrightarrow x \le 4$. Observemos que $x \ne 4$ (se $x = 4$, teríamos $y = x$). Se $x = 3$, Carlos concluiria que $y = 4$ e $z = 6$, portanto, $x \ne 3$. Assim, $x = 1$ ou $x = 2$ e portanto $y + z \ge 11$. Como $2 < y < z$, conclui−se que $6 \le z \le 9$. Se $z = 6$, Tomás concluiria que $y = 5$ e $x = 2$, portanto $z \ne 6$. Se $z = 9$, Tomás concluiria que $x = 1$ e $y = 3$. Assim, $z = 7$ ou $z = 8$.
Neste momento, Samuel poderia achar todas as possíveis soluções. Se $x = 1$ e $z = 7$, teríamos $y = 5$; se $x = 1$ e $z = 8$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 7$, teríamos $y = 4$; se $x = 2$ e $z = 8$, teríamos $y = 3$. Assim, Samuel saberia que os possíveis valores de y são 3, 4 e 5. Ora, se $y = 3$ ou $y = 5$, Samuel descobriria os números (se $y = 3$, Samuel concluiria que $x = 2$ e $z = 8$; se $y = 5$, Samuel concluiria que $x = 1$ e $z = 7$). Logo o número da carta do meio é 4.

8. D.− Veja a solução do problema 16 do Nível 2.
9. C.− Veja a solução do problema 12 do Nível 2.

10. E.− Para $x \le 48$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \le 6$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \le 3$. Para $49 \le x \le 63$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor = 7$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor = 3$. Para $x \ge 64$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \ge 8$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \ge 4$. Assim, as soluções são todos os inteiros entre 49 e 63, que são 15 ao todo.

11. D.− Veja a solução do problema 20 do Nível 2.
12. C.− Veja a solução do problema 18 do Nível 1.

13. A.−



Observando a figura acima, sendo r o raio das quatro circunferências congruentes, temos $(2r)^2 = (r + 1)^2 + (r + 1)^2 \Leftrightarrow r = 1 + \sqrt{2}$. Assim, $R = 1 + 2r = 3 + 2\sqrt{2}$.

14. B.− Veja a solução do problema 8 do Nível 2.
15. B.− Veja a solução do problema 10 do Nível 2.

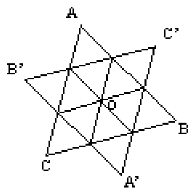
16. E.− Temos que os dois nadadores estarão novamente em lados opostos da piscina após mmc(90,60) = 180 s = 3 min. Contemos assim o número de encontros neste intervalo de tempo.
Quando ocorrer o primeiro encontro, os dois nadadores terão nadado juntos uma piscina. A cada próximo encontro eles terão nadado juntos duas piscinas. Como em 3 minutos eles nadarão juntos 180/45 + 180/30 = 10 piscinas e $10 = 1 + 4 \cdot 2 + 1$, temos no total 4 + 1 = 5 encontros.

Assim, como há 5 encontros em 3 min, temos um total de $5 \cdot (12/3) = 20$ encontros.

17. D.− Sejam x e $29 - x$ os números. Temos então que o valor mínimo de $f(x) = x^2 + (29 - x)^2 = 2x^2 - 58x + 841$ ocorre quando $x = -\dfrac{-58}{2 \cdot 2} = 14{,}5$. Como x é inteiro, devemos ter $x = 14$ ou $x = 15$. Como $14^2 + (29 - 14)^2 = 421$, o valor mínimo desejado é 421.

18. D.− Veja a solução do problema 1 do Nível 2.
19. E.− Veja a solução do problema 17 do Nível 2.
20. A. Veja a solução do problema 10 do Nível 1.

21. B.− Ao dividir a figura em triângulos equiláteros congruentes vemos que a razão entre a área da região destacada e a área do triângulo ABC é $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.



22. C.− Veja a solução do problema 14 do Nível 1.
23. A.− Veja a solução do problema 19 do Nível 2.

24. B.− Temos $P(1) = a_{2000} + a_{1999} + a_{1998} + \ + a_0$ e $P(-1) = a_{2000} - a_{1999} + a_{1998} - \ + a_0$. Portanto $P(1) + P(-1) = 2(a_{2000} + a_{1998} + \ + a_0) \Leftrightarrow a_{2000} + a_{1998} + \ + a_0 = \dfrac{P(1) + P(-1)}{2}$.

25. A.− Observemos primeiro que existem 9 números nos quais os três algarismos são iguais, a saber, 111, 222, 333, , 999. Consideremos agora os possíveis números nos quais os três algarismos são distintos. Para que 8 seja a média, existe somente a combinação 897. Para que 7 seja a média, temos as combinações 786 e 795. Para que 6 seja a média, temos as combinações 675, 684 e 693. Para que 5 seja a média, temos as combinações 564, 573, 582 e 591. Com média 4 temos 453, 462, 471 e 480, com média 3 temos 342, 351 e 360, com média 2 temos 231 e 240 e com média 1 temos somente 120. Temos no total 20 combinações com algarismos distintos. Todas podem ser escritas de 6 maneiras distintas (permutando os algarismos), exceto as 4 que têm um zero, excluindo 2 possibilidades. Assim, o total desejado é $9 + 6 \cdot 16 + 4 \cdot 4 = 121$.