XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase − Nível 1

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

João comprou um livro e reparou que ele tinha 200 páginas. Seu irmão mais novo arrancou ao acaso 25 folhas e somou os números das 50 páginas.
Explique porque o resultado desta soma não pode ser igual a 1998.
Atenção: cada folha tem duas páginas. A primeira folha tem as páginas 1 e 2, a segunda folha tem as páginas 3 e 4, e assim por diante.

PROBLEMA 2

Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1?

PROBLEMA 3

Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

PROBLEMA 4

Existem casas em volta de uma praça. João e Pedro dão uma volta na praça, caminhando no mesmo sentido e contando as casas. Como não começaram a contar da mesma casa, a 5ª. casa de João é a 12ª. de Pedro e a 5ª. casa de Pedro é a 30ª. de João. Quantas casas existem em volta da praça?

PROBLEMA 5

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê−las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 6

Pintam−se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem 10 centímetros. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em 1000 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Determine:
a) o número de cubos que não possuem nenhuma face pintada de preto.
b) o número de cubos que possuem uma única face pintada de preto.
c) o número de cubos que possuem exatamente duas faces pintadas de preto.
d) o número de cubos que possuem três faces pintadas de preto.

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase − Nível 2

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Que frações devem ser retiradas da soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}$ para que a soma das restantes seja igual a 1? Dê todas as soluções.

PROBLEMA 2

Encontre dois números de três algarismos cada um, usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez, de forma que a diferença entre eles (o maior menos o menor) seja a menor possível.

PROBLEMA 3

Cinco cartões numerados com 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, são colocados em uma caixa. Os cartões são retirados da caixa, um de cada vez e colocados sobre a mesa. Se o número de um cartão retirado é menor do que o número do cartão imediatamente anterior, então este cartão imediatamente anterior é colocado de volta na caixa. O procedimento continua até que todos os cartões estejam sobre a mesa. Qual é o número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa?

PROBLEMA 4

Em um triângulo acutângulo ABC o ângulo interno de vértice A mede 30^0. Os pontos B_1 e C_1 são os pés das alturas traçadas por B e C, respectivamente e os pontos B_2 e C_2 são médios dos lados AC e AB, respectivamente. Mostre que os segmentos B_1C_2 e B_2C_1 são perpendiculares.

PROBLEMA 5

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê−las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 6

Pintam−se de preto todas as faces de um cubo de madeira cujas arestas medem n centímetros onde $n \geq 3$. Por cortes paralelos às faces, o cubo é dividido em n^3 cubos pequenos, cada um com arestas medindo 1 centímetro. Sabendo que o número total de cubos pequenos com exatamente uma face pintada de preto é igual ao número de cubos pequenos apresentando todas as faces sem pintura, determine o valor de n.

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Segunda Fase − Nível 3

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Cinco cartões numerados com 3, 4, 5, 6 e 7, respectivamente, são colocados em uma caixa. Os cartões são retirados da caixa, um de cada vez e colocados sobre a mesa. Se o número de um cartão retirado é menor do que o número do cartão imediatamente anterior, então este cartão imediatamente anterior é colocado de volta na caixa. O procedimento continua até que todos os cartões estejam sobre a mesa. Qual é o número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa?

PROBLEMA 2

Existem 20 balas sobre uma mesa e duas crianças começam a comê−las, uma criança de cada vez. Em cada vez, cada criança deve comer pelo menos uma bala e está proibida de comer mais que a metade das balas que existem sobre a mesa. Nesta brincadeira, ganha a criança que deixar apenas uma bala sobre a mesa. Qual das duas crianças pode sempre ganhar na brincadeira: a primeira ou a segunda a jogar? Como deve fazer para ganhar?

PROBLEMA 3

Uma reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de um quadrilátero convexo forma ângulos iguais com ambas as diagonais. Mostre que as duas diagonais têm o mesmo comprimento.

PROBLEMA 4

Sobre os lados AB e AC de um triângulo acutângulo ABC são construídos, exteriormente ao triângulo, semicírculos tendo estes lados como diâmetros. As retas contendo as alturas relativas aos lados AB e AC cortam esses semicírculos nos pontos P e Q. Prove que $AP = AQ$.

PROBLEMA 5

Seja $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$ uma função tal que

$f(1) = 999$ e $f(1) + f(2) + ... + f(n) = n^2 \cdot f(n)$ para todo n inteiro positivo.

Determine o valor de $f(1998)$.

PROBLEMA 6

O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMATICA
NÍVEL 1

Solução Problema 1

Como cada folha contém duas páginas tais que a soma dos seus respectivos números é ímpar, ao adicionarmos todos esses 25 números, obteremos necessariamente uma soma ímpar que, portanto, não pode ser igual a 1998.

Solução Problema 2

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120} \quad (*)$$

Uma vez que 60 + 30 + 20 + 10 = 120, é claro que podemos remover $\frac{15}{120}=\frac{1}{8}$ e $\frac{12}{120}=\frac{1}{10}$. (além disso, vê−se claramente no lado direito da igualdade (*) que não existem outros termos cuja soma seja igual a $\frac{27}{120}$)

Assim, devemos remover $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.

Solução Problema 3

Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

Solução Problema 4

Sejam J_n e P_n respectivamente as n−ésimas casas de João e Pedro. De J_5 a J_{30} exclusive, existem 30 − 5 − 1 = 24 casas. De P_5 a P_{12} exclusive existem 12 − 5 − 1 = 6. Logo, no total existem 24 + 6 + 2 = 32 casas.

Solução Problema 5

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo. De um modo mais geral, a estratégia ganhadora consiste em deixar o adversário com $2^k - 1$ balas, para algum $k \in$ N. O adversário é obrigado a comer de 1 a $(2^{k-1} - 1)$ balas, deixando sobre a mesa um número de balas que está sempre entre 2^{k-1} e $2^k - 2$. O primeiro jogador pode, então, jogar novamente de modo a deixar o adversário com $2^{k-1} - 1$ balas. O processo prossegue até o adversário ser reduzido a $2^1 - 1 = 1$ bala.

Solução Problema 6

a) Estão sem nenhuma face pintada, os cubos interiores ao cubo maior. Portanto devem ser retiradas uma fila de cima e uma fila de baixo, uma da frente e outra de trás, e uma de cada lado, ficando assim com um cubo de aresta 8 que contém $8^3 = 512$ cubos pequenos.

b) Estão com uma face pintada aqueles que pertencem a uma face mas não possuem lado comum com a aresta do cubo maior, isto é, $8^2 = 64$ em cada face. Como são seis faces, temos $6 \times 64 = 384$ cubos pequenos.

c) Estão com duas faces pintadas aqueles que estão ao longo de uma aresta mas não no vértice do cubo maior, isto é, 8 cubos em cada aresta. Como são 12 arestas, temos $8 \times 12 = 96$ cubos pequenos.

d) Estão com 3 faces pintadas aqueles que estão nos vértices do cubo maior, ou seja, 8 cubos pequenos.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
NÍVEL 2

Solução Problema 1

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}=\frac{60}{120}+\frac{40}{120}+\frac{30}{120}+\frac{20}{120}+\frac{15}{120}+\frac{12}{120}+\frac{10}{120}\ (*)$$

Devemos escrever 120 como soma de algumas parcelas 60, 40, 30, 20, 15, 12, 10. As soluções possíveis são
60 + 40 + 20 = 120
60 + 30 + 20 + 10 = 120.

Assim, podemos remover $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{10}$ e $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{3},\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{10}$.
Evidentemente 15 e 12 não podem aparecer, pois a soma não seria múltipla de 10 nesse caso.

Solução Problema 2

Para que a diferença seja a menor possível, os números devem ser os mais próximos possíveis. Assim, os algarismos das centenas devem ser consecutivos. A melhor escolha é aquela em que as dezenas formadas pelos algarismos restantes tenham a maior diferença possível, o que ocorre para as dezenas 65 e 12. Assim, os algarismos das centenas devem ser 3 e 4. O menor número começado por 4 é 412 e o maior começado por 3 é 365, cuja diferença é 47.

Solução Problema 3

O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, o que corresponde à seqüência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6, 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que portanto não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes, depois para pelo menos um dentre os 3 seguintes, depois para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

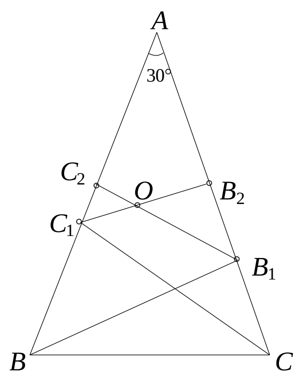
Solução Problema 4

O segmento B_1C_2 é uma mediana do triângulo AB_1B e portanto $AC_2 = B_1C_2$ e $C_2\hat{B}_1A = B\hat{A}C = 30°$.

Daí $B\hat{C}_2B_1 = C_2\hat{B}_1A + B\hat{A}C = 60°$.

Analogamente, $A\hat{C}_1B_2 = 30°$. Finalmente

$C_1\hat{O}C_2 = 180° - B\hat{C}_2B_1 - A\hat{C}_1B_2 = 90°$



Solução Problema 5

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

Solução Problema 6

Um cubo pequeno que não possui qualquer face pintada provém do interior do cubo grande. Isto significa que esse cubo pequeno é parte de um cubo de lado $n - 2$, obtido quando retiramos uma unidade de cada face do cubo original. Assim, existem $(n - 2)^3$ cubos pequenos não pintados. Por outro lado, um cubo pequeno com uma face pintada provém da face do cubo original, mas não tendo qualquer parte da aresta deste cubo. Assim, existem $6(n - 2)^2$ cubos pequenos com face pintada. Portanto, $(n - 2)^3 = 6(n - 2)^2$, com $n > 2$. Logo, $n - 2 = 6$, ou seja, $n = 8$.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
NÍVEL 3

Solução Problema 1

O número máximo de vezes que retiramos cartões da caixa é 15, o que corresponde à seqüência de cartões retirados 7, 6, 5, 4, 3, 7, 6, 5, 4, 7, 6, 5, 7, 6, 7. De fato, dentre os primeiros 5 cartões há necessariamente um que é menor que o cartão seguinte, e que portanto não voltará mais para a caixa, o mesmo acontecendo para pelo menos um cartão dentre os 4 seguintes, depois para pelo menos um dentre os 3 seguintes, depois para pelo menos um dentre os dois seguintes, sobrando no máximo um cartão, que será o último a ser retirado da caixa.

Solução Problema 2

Ganha a primeira criança. No início ele deve comer 5 balas, deixando 15 balas sobre a mesa. A segunda criança deve comer no mínimo uma e no máximo 7 balas, sobrando entre 8 e 14 balas sobre a mesa. Em qualquer caso a primeira criança pode comer algumas balas, deixando exatamente 7 sobre a mesa. A segunda criança agora deve comer entre uma e três balas, deixando de 4 a 6 balas sobre a mesa. A primeira criança agora come algumas delas, deixando exatamente 3 balas, forçando a segunda criança a comer uma. Comendo mais uma após isso, a primeira criança acaba deixando apenas uma bala no final e ganhando o jogo.

Solução Problema 3

Sejam *ABCD* o quadrilátero, *M*,*N*,*P* e *Q* os pontos médios dos lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, respectivamente. *MN* e *PQ* são paralelos à diagonal *AC* e medem a metade de seu comprimento, enquanto *NP* e *QM* são paralelos à diagonal *BD* e medem a metade de seu comprimento. Assim, *MNPQ* é um paralelogramo. As condições do problema dizem que a reta que passa pelos pontos médios de dois lados opostos de *ABCD* (digamos $\overline{MP}$, sem perda de generalidade) formam ângulos iguais com $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, portanto com $\overline{PQ}$ e $\overline{NP}$, donde *MP* é bissetriz de $N\hat{P}Q$. Logo *MNPQ* deve ser um losango, donde $\overline{MN} = \overline{NP}$, e portanto $\overline{AC} = \overline{BD}$ (pois $\overline{MN} = \overline{AC}/2$ e $\overline{NP} = \overline{BD}/2$).

Solução Problema 4

Sejam *M* o pé da altura relativa ao lado *AB*. Como o triângulo *APB* é retângulo em *P*, e *PM* é a altura de *P* em relação a *AB* temos

$$\overline{AP}^2 = \overline{AB}\cdot\overline{AM} = \overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos B\hat{A}C.$$

Analogamente mostra−se que $\overline{AQ}^2 = \overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\cos B\hat{A}C.$ Portanto, $\overline{AP} = \overline{AQ}.$

Solução Problema 5

Calculemos alguns valores de *f*(*n*):

$$f(1) = 999;\ f(1) + f(2) = 2^2 \cdot f(2) \Rightarrow 3f(2) = 999 \Rightarrow f(2) = 333$$

$$f(1) + f(2) + f(3) = 3^2 \cdot f(3) \Rightarrow 8f(3) = 999 + 333 \Rightarrow f(3) = \frac{333}{2}$$

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4^2 \cdot f(4) \Rightarrow 15f(4) = 999 + 333 + \frac{333}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{999}{10}$$

Assim, temos $f(1) = \frac{999}{1}$, $f(2) = \frac{999}{3}$, $f(3) = \frac{999}{6}$, $f(4) = \frac{999}{10}$, e é razoável conjecturar que $f(n) = \frac{999}{1+2+\ldots+n} = \frac{1998}{n(n+1)}$ Para todo $n \in$ N. Vamos provar esse fato: Para $n \geq 2$ temos

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n) \Rightarrow (n^2 - 1) f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) \Rightarrow f(n) = \frac{f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1)}{n^2 - 1}.$$

Por hipótese de indução,

$f(k) = \frac{1998}{k(k+1)} = \frac{1998}{k} - \frac{1998}{k+1}$, para k = 1, 2, ?, n − 1, e portanto

$$f(1) + f(2) + \ldots f(n-1) = \frac{1998}{1} - \frac{1998}{2} + \frac{1998}{2} - \frac{1998}{3} + \ldots + \frac{1998}{n-1} - \frac{1998}{n} = \frac{1998}{1} - \frac{1998}{n} =$$

$\frac{1998(n-1)}{n} \Rightarrow f(n) = \frac{1998(n-1)}{n(n^2-1)} = \frac{1998}{n(n+1)}$ pois $n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$),

como queríamos demonstrar.

Fazendo n = 1998 temos $f(1998) = \frac{1998}{1998 \cdot 1999} = \frac{1}{1999}$.

Solução Problema 6

1998 = 2 × 999 = 2 × 3^3 × 37. Um número formado apenas pelos algarismos 0 e 3 é múltiplo de 3^3 se e somente se o número de algarismos 3 é múltiplo de 9 (pois ao dividi−lo por 3 obtemos um número que possui apenas os algarismos 0 e 1 que deve ser múltiplo de 9, o que ocorre se e só se o número de algarismos 1 é múltiplo de 9). Assim, o número desejado deve ter pelo menos 9 algarismos 3, e deve terminar por 0, por ser par. O menor número com essas propriedades é 3333333330, que é múltiplo de 1998 pois é par, é múltiplo de 3^3 e é múltiplo de 37 por ser múltiplo de 111 (é igual a 111 × 30030030)).