

Nível  $\triangle$  – 5ª e 6ª SÉRIES – ENSINO FUNDAMENTAL

FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - No bloco de resoluções você deve colocar: *Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.*
  - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

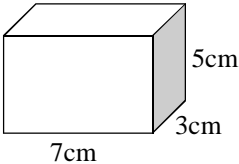
**Questão 1** – Francisca compra produtos em grande quantidade para uma rede de restaurantes. No momento ela deve comprar detergente líquido, escolhendo entre as marcas A, B e C, que são vendidas em frascos com volumes diferentes. As três têm a mesma qualidade e um galão com 80 litros do detergente B custa R\$ 50,00, mas...

- o detergente A é 40% mais caro que o B e contém 20% menos líquido que o C;
- o detergente C custa 50% a mais que A e contém 50% mais líquido que o B.

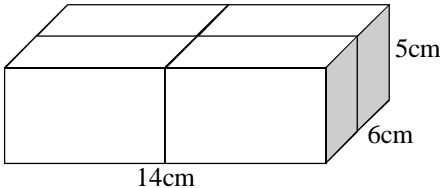
Francisca pensou e comprou a marca mais econômica. Qual é a mais econômica? Justifique sua resposta!

**Questão 2** – Um dos elefantes de um zoológico está de dieta e a cada dia deve comer uma porção de cenouras igual à que um coelho come em um ano (365 dias). Em um dia, um elefante e um coelho comem juntos 183 quilogramas de cenoura. Quantos quilogramas de cenoura o elefante come em um dia? Justifique sua resposta!

**Questão 3** – Sobre uma mesa tenho quatro paralelepípedos reto-retângulos, todos iguais ao da figura seguinte:



Vamos então construir outros paralelepípedos juntando todos os quatro, como por exemplo:



Nas condições acima apresentadas, quantos paralelepípedos diferentes podemos construir? Justifique sua resposta com desenhos, especificando as medidas de cada paralelepípedo construído.

**Questão 4** – Este é um jogo para dois participantes, A e B, que funciona assim:

- A diz um número escolhido dentre os números 1, 2, 3, ..., 11;
- B diz um número nas mesmas condições que é então somado ao escolhido por A;
- A diz um novo número escolhido dentre 1, 2, 3, ..., 11 que é então somado ao total acumulado;
- e continua assim, até que um dos jogadores diga um número que resulte em um total igual a 56; esse jogador vence.

Nesse jogo eu enfrentei um amigo. Comecei o jogo e ganhei, sem dar chance ao adversário. Como foi que ganhei?

Dica: o primeiro número que eu disse foi importante para decidir o jogo!

**Questão 5** – O Homem sempre foi fascinado por números gigantes. Na antigüidade, Arquimedes inventou um método para escrever um número que excedesse a quantidade de grãos de areia necessários para preencher o universo. O número de

Arquimedes é aproximadamente  $10^{(10^{16902})}$ .

Há uma maneira simples para se escrever números gigantes. Utilizando o símbolo , podemos representar potências da seguinte maneira:

- $AB = A^B$ , como por exemplo,  $23 = 2^3 = 8$ ;
- $AB = A^{(A^A)}$ , onde A aparece B vezes, como por exemplo,  $23 = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16$ .

Deste modo  $10^{(10^{16902})}$  pode ser representado assim: 10(1016902).

- a) Determine o valor numérico de 52 e 52.
- b) Na expressão 2 (2 (2 (... (2))), qual é o menor número de que devemos colocar a fim de obtermos um número maior do que 109? Justifique sua resposta!

XXIV OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA – 2000 – PROVA DA SEGUNDA FASE

Nível B – 7ª e 8ª SÉRIES – ENSINO FUNDAMENTAL

FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - No bloco de resoluções você deve colocar: *Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.*
  - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

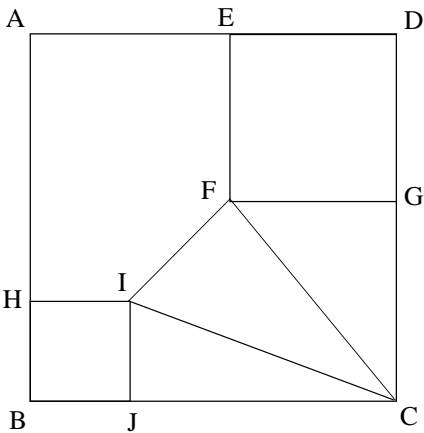
**Questão 1** – Os elefantes de um zoológico estão de dieta e juntos, num período de 10 dias, devem comer uma quantidade de cenouras igual ao quadrado da quantidade que um coelho come em 30 dias. Em um dia, os elefantes e o coelho comem juntos 1444 quilogramas de cenoura. Quantos quilogramas de cenoura os elefantes comem em um dia? Justifique sua resposta!

**Questão 2** – Antônio e Bento, dois gêmeos, seguiam o leito de uma ferrovia e começaram a atravessar uma ponte estreita na qual havia espaço apenas para o trem. No momento em que completavam  $\frac{2}{5}$  do percurso da ponte, ouviram o trem que se aproximava por trás deles. Antônio começou a correr de encontro ao trem, saindo da ponte praticamente no instante em que o trem entrava. Bento correu no sentido oposto a Antônio, conseguindo sair da ponte praticamente no instante em que o trem saía. Quando os irmãos se reencontraram, passado o sufoco, o irmão que gostava de Matemática (o outro amava) observou:

– *Corremos à velocidade de 15km por hora e portanto já sei calcular a velocidade do trem!*

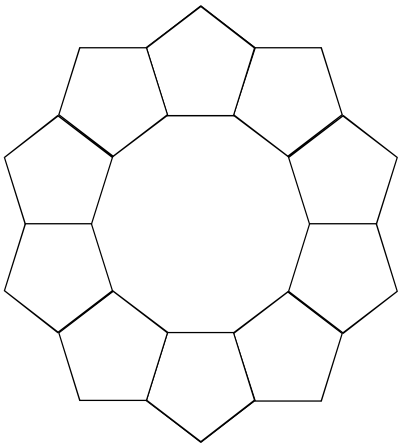
Calcule a velocidade do trem. Justifique sua resposta!

- Questão 3** – Na figura, ABCD, EFGD e HBJI são quadrados, de lados 5cm, 2cm e 1cm respectivamente.
- a) Mostre que os pontos I e F pertencem à diagonal  $\overline{BD}$  do quadrado ABCD.
- b) Calcule a área do triângulo CFI. Justifique sua resposta!



**Questão 4** – Dados 17 números inteiros positivos quaisquer, sempre é possível escolher cinco deles de modo que a soma dos cinco seja divisível por 5. Justifique este fato.

- Questão 5** – Dizemos que um polígono regular está "cercado" quando é possível construir um outro polígono regular sobre cada um de seus lados, de modo que estes polígonos construídos sejam todos congruentes entre si e os adjacentes tenham um lado comum. Exemplo: um decágono regular pode ser cercado por pentágonos regulares congruentes, como mostra a figura.



Determine todos os polígonos regulares que podem ser cercados e os respectivos polígonos que formam a cerca. Justifique sua resposta!

XXIV OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA – 2000 – PROVA DA SEGUNDA FASE

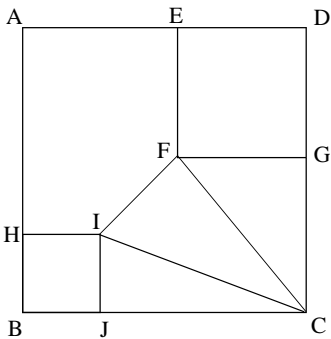
Nível G – 1ª e 2ª SÉRIES – ENSINO MÉDIO

FOLHA DE PERGUNTAS

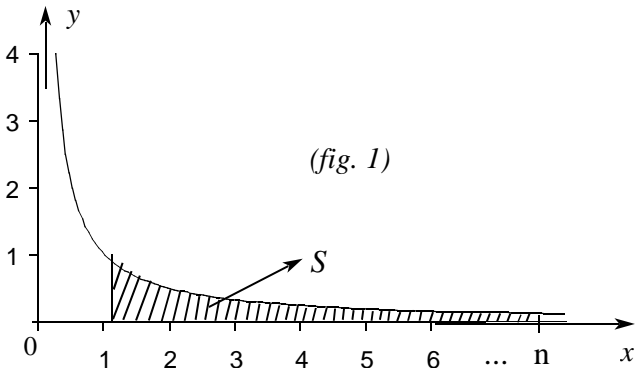
- Instruções:
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h30min. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - No bloco de resoluções você deve colocar: Nome completo, Nível, Escola (dizendo se é pública ou particular) e Cidade.
  - Todas as respostas devem ser justificadas. Entregue apenas o bloco de resoluções e leve a folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

Questão 1 – Na figura, ABCD, EFGD e HBJI são quadrados, de lados 5cm, 2cm e 1cm respectivamente.

- a) Mostre que os pontos I e F pertencem à diagonal  $\overline{BD}$  do quadrado ABCD.  
b) Calcule a área do triângulo CFI. Justifique sua resposta!



Questão 2 – Ao lado (fig. 1), temos o gráfico de  $y = \frac{1}{x}$ , para  $x \in R^*_+$ . A área S da região hachurada sob o gráfico (fig. 1), compreendida entre  $x = 1$  e  $x = n$ , é dada pelo logaritmo Neperiano de n, ou seja,  $1n n = \log_e n$  onde  $e \cong 2,718282$ .



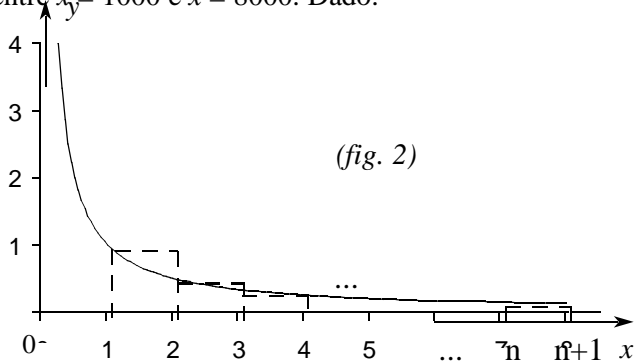
Pede-se:

- a) Calcule a área  $S_1$ , sob o gráfico de  $y = \frac{1}{x}$  dado, compreendida entre  $x_1 = 1000$  e  $x = 8000$ . Dado:  $1n 2 \cong 0,69$

- b) Comparando a área sob o gráfico de  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \in R^*_+$ , com as áreas dos retângulos representados no gráfico ao lado (fig. 2), verificamos que

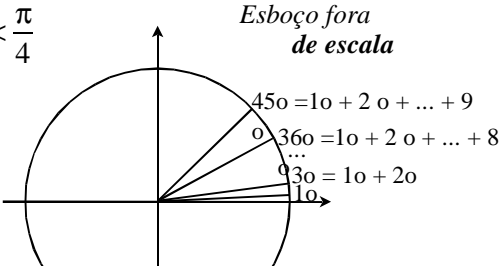
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} > 1n (n+1).$$

Prove que  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + 1n n.$



- Questão 3 – a) Escreva o termo geral do desenvolvimento de  $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{13})^n$ .  
b) Determine os termos racionais no desenvolvimento do binômio anterior.

Questão 4 – Observando a figura a seguir, mostre que:  $\text{sen } 1^\circ + \text{sen } 2^\circ + \dots + \text{sen } 9^\circ < \frac{\pi}{4}$



---

**Questão 5** – Numa festa, há 100 garotas e alguns garotos. Cada garota conhece exatamente 4 garotos e 11 garotos conhecem 5 garotas cada, 16 garotos conhecem 4 garotas cada, 25 garotos conhecem 3 garotas cada, e os demais conhecem 2 garotas cada. Quantos garotos há na festa?