

# XXIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

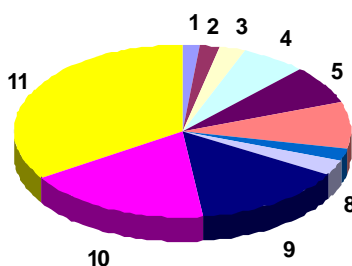
## 1999 – PROVA DA FASE FINAL

### **6ª SÉRIE – ENSINO FUNDAMENTAL**

#### FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
  - Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
  - Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
  - Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

**Questão 1** – A superfície da Terra tem uma área total de aproximadamente 510 milhões de quilômetros quadrados. O gráfico de setores abaixo mostra, em porcentagem, a área ocupada pelos continentes e oceanos.



#### LEGENDA

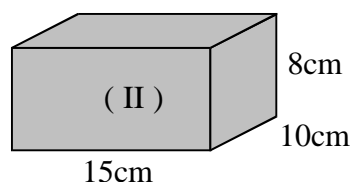
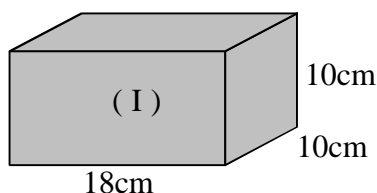
- 1 – Oceania (1,8%)
- 2 – Europa (1,9%)
- 3 – Antártida (2,5%)
- 4 – África (5,9%)
- 5 – América (7,5%)
- 6 – Ásia (8,6%)
- 7 – Oceano Glacial Ártico (2,3%)
- 8 – Oceano Glacial Antártico (2,9%)
- 9 – Oceano Índico (14,7%)
- 10 – Oceano Atlântico (17,6%)
- 11 – Oceano Pacífico (34,3%)

- a) Qual é a área do Oceano Atlântico?  
b) Quanto mede, em graus, o ângulo do setor relativo à África?

**Questão 2** – Um frasco do medicamento A tem 153 comprimidos e um do B tem 102 comprimidos. O Encha deve tomar 4 comprimidos por dia do medicamento A e 3 por dia do B, ou seja, ele tomará 4 comprimidos do A no primeiro dia, 3 do B no segundo dia, e assim sucessivamente.

- a) Após quantos dias do início do tratamento terminará o primeiro frasco de medicamento B?  
b) Um frasco destes medicamentos, tanto A quanto B, demora 2 dias para chegar à casa de José. A partir do início do tratamento, depois de quantos dias, no máximo, ele deverá solicitar um novo frasco de medicamento, para não correr o risco de ficar sem?

**Questão 3** – Um fabricante deve embalar um volume de  $2,16\text{m}^3$  de chocolate. Ele está em dúvida entre dois tipos de caixas de papelão, com tampas, ambas com a forma de um bloco de faces retangulares, como nas figuras a seguir.



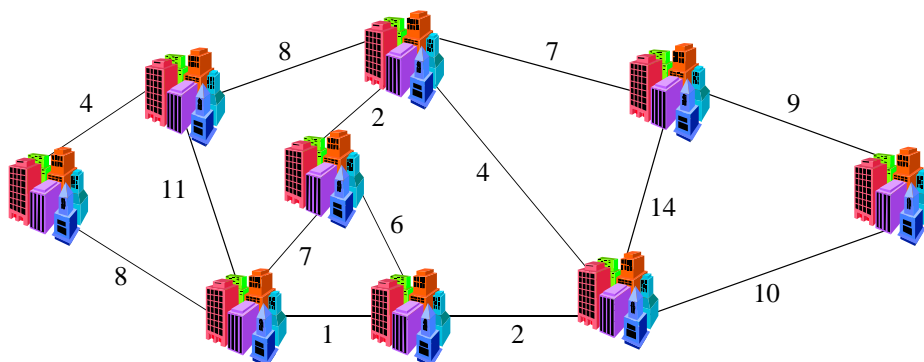
O custo de cada caixa é igual ao custo do papelão usado, acrescido de 50% (custos da cola, mão de obra, etc.).

- a) Desenhe estas duas caixas, substituindo as medidas em centímetros por equivalentes em metros.  
b) Calcule o volume, em metros cúbicos, de cada caixa.  
c) Calcule o custo de cada caixa, sabendo que o valor de  $1\text{m}^2$  de papelão é R\$ 10,00.

d) Será mais econômico utilizar caixas do tipo ( I ) ou ( II ) para embalar o chocolate? Quanto se pode economizar escolhendo a caixa correta?

**XXIII OPM – 6ª SÉRIE – ENSINO FUNDAMENTAL**

**Questão 4** – No reino da *Kruskalândia*, há estradas ligando as cidades, como mostra o mapa a seguir. Todas as estradas são de terra e por uma estrada pode-se transitar em ambos os sentidos. O comprimento de cada estrada, em quilômetros, está indicado, fora de escala, no mapa a seguir.

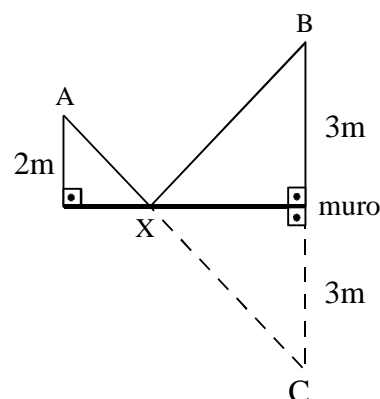


O rei da *Kruskalândia* resolveu pavimentar algumas estradas do reino de modo que, a partir de qualquer cidade, fosse possível atingir qualquer outra viajando somente por estradas pavimentadas. Como os cofres do reino andavam meio vazios, resolveu economizar o máximo possível. Chamou, então, o matemático da corte, que prontamente resolveu o problema. Agora é a sua vez.

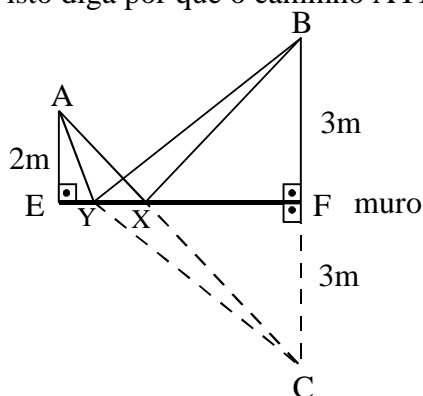
- Qual é o menor número de estradas que o rei precisa pavimentar?
- Qual é o menor número de quilômetros de estrada que ele precisa pavimentar? Indique, na folha de respostas, uma possível escolha de estradas para isto.

**Questão 5** – O Papa-légua está inicialmente no ponto A, a 2 metros de um muro. Ele quer ir até o ponto B, a 3 metros do muro, onde há uma árvore, para descansar sob sua sombra. Porém o Papa-légua quer passar antes pelo muro, junto ao qual há alpiste espalhado.

O Papa-légua é muito esperto e escolhe sempre o menor caminho: ele vai de A até o ponto X do muro, seguindo a direção da reta AC, onde C é um ponto à mesma distância que B do muro, só que do outro lado. Após comer o alpiste, ele segue em linha reta até B, chegando à árvore.



- Justifique por que AXB é realmente o menor caminho. Para isto diga por que o caminho AYB, desenhado a seguir, é maior que AXB.



- Determine o ângulo agudo que a reta AX faz com o muro, sabendo que o comprimento EF do muro é 5m.

# XXIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

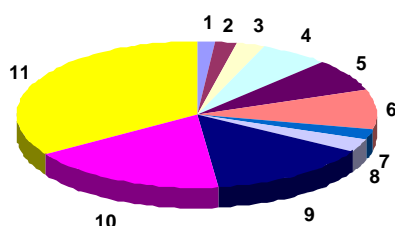
## 1999 – PROVA DA FASE FINAL

### **8ª SÉRIE – ENSINO FUNDAMENTAL**

#### FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3 horas. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
  - Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
  - Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
  - Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

**Questão 1** – A superfície da Terra tem uma área total de aproximadamente 510 milhões de quilômetros quadrados. O gráfico de setores abaixo mostra, em porcentagem, a área ocupada pelos continentes e oceanos.



#### LEGENDA

- 1 – Oceania (1,8%)
- 2 – Europa (1,9%)
- 3 – Antártida (2,5%)
- 4 – África (5,9%)
- 5 – América (7,5%)
- 6 – Ásia (8,6%)
- 7 – Oceano Glacial Ártico (2,3%)
- 8 – Oceano Glacial Antártico (2,9%)
- 9 – Oceano Índico (14,7%)
- 10 – Oceano Atlântico (17,6%)
- 11 – Oceano Pacífico (34,3%)

- Qual é a área do Oceano Atlântico?
- Quanto mede, em graus, o ângulo do setor relativo à África?
- A área do Oceano Pacífico corresponde a que porcentagem da área dos oceanos?

**Questão 2** – Seja  $n$  um número inteiro estritamente maior do que 1. Considere a soma dos inversos dos inteiros  $n - 1$  e  $n + 1$ . Por exemplo, para  $n = 8$ ,

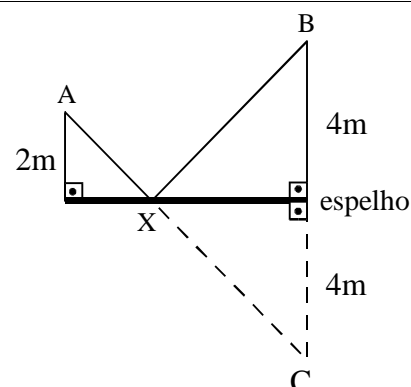
$$\frac{1}{7} + \frac{1}{9} = \frac{16}{63}$$

Vemos que  $16^2 + 63^2 = 65^2$ , ou seja, o numerador e o denominador da fração obtida são as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico (triângulo retângulo com lados inteiros).

- Seguindo os passos acima, obteremos, para todo  $n$  inteiro maior do que 1, as medidas dos catetos de um triângulo pitagórico? Justifique.
- Podemos obter as medidas dos catetos de todos os triângulos pitagóricos seguindo estes passos? Justifique.

**Questão 3** – Um raio de luz fino é emitido por uma lanterna laser no ponto A, refletido por um espelho de 5m de comprimento no ponto X, e vai parar no ponto B de uma parede. Na figura ao lado, você tem uma vista superior (vista de cima) dessa situação. Os raios de luz sempre fazem o caminho mais curto. Por isso, o raio de luz caminha na direção da reta AC, sendo C o ponto simétrico de B (C é um ponto “dentro” do espelho), como na figura ao lado.

- Mostre que AXB é o caminho mais curto de A até B, passando pelo espelho. (Sugestão: compare o caminho AXB com um outro caminho, digamos AYB, com Y também no espelho)
- Determine a medida do caminho AXB, mostrado na figura ao



**Questão 4** – Dispõe-se de um tabuleiro como mostra a figura 1 a seguir. Uma peça está inicialmente na casinha A. Cada movimento da peça pode ser um dos mostrados na figura 2.

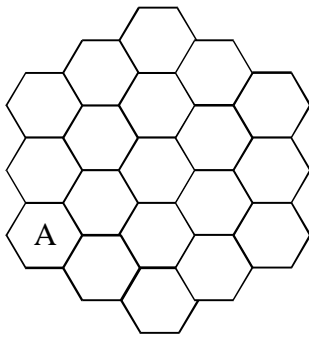


figura 1

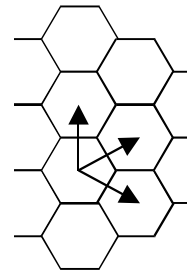
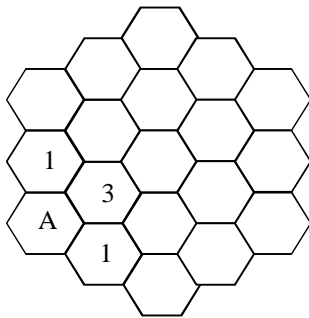
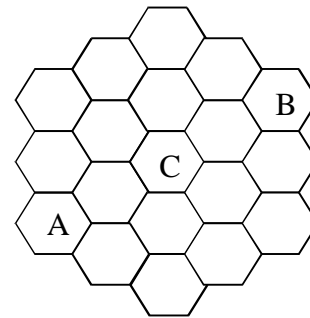


figura 2

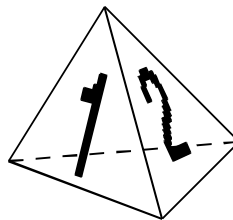
a) Copie o tabuleiro abaixo na folha de respostas e anote o número de maneiras de se mover a peça a partir de A até cada uma das demais casinhas. Alguns valores já foram preenchidos para você.



b) No seguinte tabuleiro, de quantas maneiras a peça pode ir de A até B sem passar por C?



**Questão 5** – Num jogo, pontos são ganhos somando-se os valores obtidos ao se jogarem dois dados em forma de tetraedro regular, cujas faces são numeradas 1, 2, 3 e 4. O valor obtido é aquele que está na face voltada para baixo. Observe a figura a seguir.



a) Desenvolva:  $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$

b) Mostre que o número de maneiras de se obter  $n$  pontos utilizando estes dados é igual ao coeficiente de  $x^n$  no desenvolvimento de  $(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)(x^1 + x^2 + x^3 + x^4)$ . Por exemplo, o coeficiente de  $x^6$  é 3 e há três maneiras distintas de se obter 6 pontos:  $2 + 4$ ;  $3 + 3$  e  $4 + 2$ .

c) Por defeito de fabricação, um jogo veio com um dado numerado 1, 2, 2 e 3 e o outro, 1, 3, 3 e 5. Ao receber o jogo para substituição, o dono da fábrica, que era matemático, argumentou que o jogo não mudaria mesmo utilizando os dados defeituosos, isto é, que o número de maneiras de se obter  $n$  pontos,  $2 \leq n \leq 8$ , com os dados defeituosos e com os dados normais era o mesmo. Ele tinha razão? Explique.

# XXIII OLIMPIÁDA PAULISTA DE MATEMÁTICA

## 1999 – PROVA DA FASE FINAL

### **2ª SÉRIE – ENSINO MÉDIO**

#### FOLHA DE PERGUNTAS

- Instruções:**
- A duração desta prova é de 3h 30min. O tempo mínimo de permanência é de 1h 30min.
  - Nesta prova há 5 questões. Cada questão vale 2,0 pontos.
  - Preencha todos os dados pessoais solicitados no bloco de resoluções.
  - Todas as respostas devem ser justificadas e apresentadas no bloco de resoluções, nos espaços indicados.
  - Entregue apenas o bloco de resoluções e leve esta folha de perguntas com você.
  - É permitido o uso de calculadora. Resoluções a tinta ou a lápis.

---

**Questão 1** – Considere a seguinte afirmação sobre o crescimento populacional da Terra:

"Após períodos de mesma duração, a população da Terra fica multiplicada pelo mesmo fator".

- a) Sabendo-se que essa população era de 2,5 bilhões em 1950 e de 5,0 bilhões em 1987, e supondo que a afirmação dada esteja correta, mostre que a população mundial estimada, decorridos  $x$  anos após 1987, é  $5 \cdot 2^{\frac{x}{37}}$  bilhões de habitantes.
- b) Diga em que ano a população da Terra atingiria 6,0 bilhões de habitantes. (Adote  $\log 2 \cong 0,30$  e  $\log 3 \cong 0,48$ )

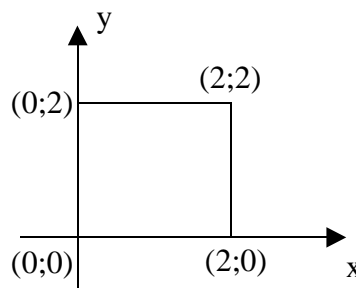
---

**Questão 2** – Considere a função  $T$  que leva o ponto  $(x; y)$  no ponto  $(2x + 3y; -x + 2y)$ , por exemplo, o ponto  $(1; -2)$  é levado no ponto  $(2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2); -1 + 2 \cdot (-2)) = (-4; -5)$

Podemos apresentar esta função por um produto de matrizes

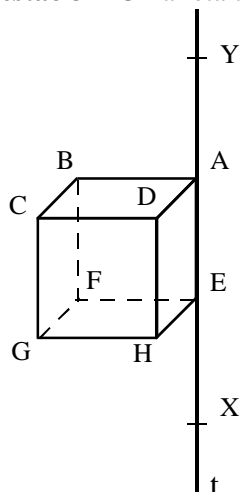
$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ -x + 2y \end{pmatrix} \text{ onde } A \text{ é uma matriz } 2 \times 2.$$

- a) Determine a matriz  $A$  e calcule seu determinante.
- b) Aplicando  $T$  aos vértices do quadrado a seguir, obtemos os vértices de um quadrilátero. Desenhe-o, indicando seus vértices.



- c) Verifique que, no item anterior, a área do quadrilátero obtido é igual a  $|\det A|$  vezes a área do quadrado.

**Questão 3** – Uma reta  $t$  contém a aresta  $AE$ , do cubo  $ABCDEFGH$ , cujas arestas medem  $a$  cm.



Sejam  $X$  um ponto da reta  $t$ , diferente de  $A$ , distando  $a$  cm de  $E$ , e seja  $Y$  um ponto da reta  $t$ , diferente de  $E$ , distando  $a$  cm de  $A$ .

a) Determine a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos de intersecção das arestas  $YE$ ,  $YF$ ,  $YG$  e  $YH$  com a face  $ABCD$  e a área do quadrilátero cujos vértices são os pontos de intersecção das arestas  $YE$ ,  $YF$ ,  $YG$  e  $YH$  com o plano que passa pelo centro do cubo e é paralelo à face  $ABCD$ .

b) Considere o sólido obtido da intersecção das pirâmides  $YEFGH$  e  $XABCD$ .

i) Faça um esboço deste sólido.

ii) Calcule o volume deste sólido em função de  $a$ .

**Questão 4** – Em *Terra Brasilis* ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes.

Cada equipe enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo

- 5 pontos por vitória quando esta for por diferença superior a dois gols;
- 3 pontos por vitória quando esta for por diferença de um ou dois gols;
- 1 ponto por empate;
- 0 ponto por derrota.

a) De quantas maneiras distintas uma equipe pode pontuar em seus 21 jogos?

Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.

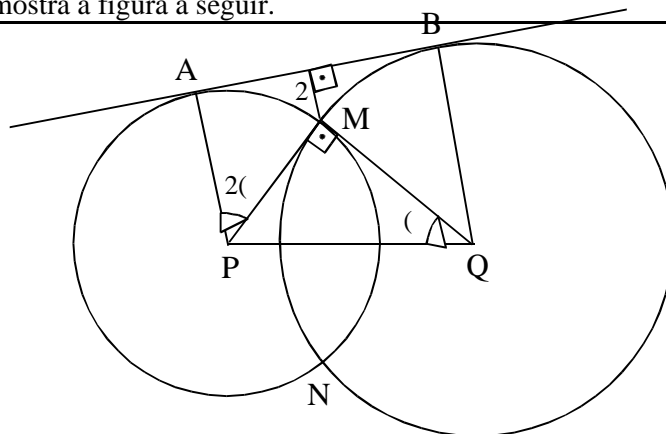
b) Mostre que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar  $k$  pontos,  $k \in \mathbb{N}$

, é igual ao coeficiente de  $x^k$  no desenvolvimento de  $(x^0 + x^1 + x^3 + x^5)^{21}$ .

c) Calcule a diferença entre o total de maneiras de um clube obter um número par de pontos e o total de maneiras de obter um número ímpar de pontos.

d) Encontre o total de maneiras de um clube obter um número ímpar de pontos.

**Questão 5** – Duas circunferências, de centros  $P$  e  $Q$ , interceptam-se nos pontos  $M$  e  $N$ , de modo que  $MP$  e  $MQ$  sejam perpendiculares. Uma reta tangencia as duas circunferências nos pontos  $A$  e  $B$ , respectivamente, como mostra a figura a seguir.



Sabe-se que a distância de  $M$  à reta  $AB$  é 2, e que o ângulo  $\widehat{APM}$  tem medida igual ao dobro da medida do ângulo  $\widehat{MQN}$ , que é igual a  $\alpha$ .

a) Mostre que as circunferências têm raios  $\frac{2}{1 - \cos 2\alpha}$  e  $\frac{2}{1 - \sin 2\alpha}$ , respectivamente.

b) Determine o valor de  $\tan \alpha$ .

c) Calcule a medida de PQ.

\* Você pode querer utilizar o fato de que  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  e  $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$