XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 1

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − RS − SC − SP

- *A duração da prova é de 3 horas.*
- *Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.*
- *Você pode solicitar papel para rascunho.*
- *Entregue apenas a folha de respostas.*

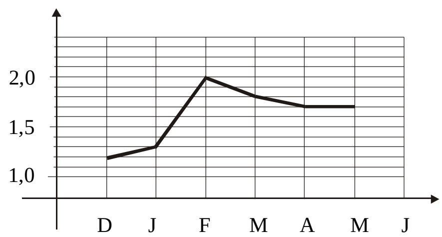
01. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

02. A calculadora de Juliana é bem diferente. Ela tem uma tecla **D**, que duplica o número escrito no visor e a tecla **T**, que apaga o algarismo das unidades do número escrito no visor.Assim, por exemplo, se estiver escrito 123 no visor e apertarmos **D**, teremos 246; depois, apertando **T**, teremos 24. Suponha que esteja escrito 1999. Se apertamos **D** depois **T**, em seguida **D**, depois **T**, teremos o número:

A) 96 B) 98 C) 123 D) 79 E) 99

3. O gráfico abaixo mostra o valor *aproximado* do dólar em reais no dia 15 dos últimos 6 meses.



Marcelo comprou um carro usando um sistema de financiamento chamado *leasing corrigido pela variação do dólar* e suas prestações vencem exatamente no dia 15 de cada mês. Em dezembro, Marcelo pagou R$ 600,00 de prestação. Com base na tabela, podemos dizer que em maio a prestação foi de:

A) R$ 700,00 B) R$ 850,00 C) R$ 650,00 D) R$ 900,00 E) R$ 800,00

4. Numa certa cidade, o metrô tem todas suas 12 estações em linha reta. A distância entre duas estações vizinhas é sempre a mesma. Sabe−se que a distância entre a terceira e a sexta estações é igual a 3 300 metros. Qual é o comprimento dessa linha?

A) 8,4 km B) 12,1 km C) 9,9 km D) 13,2 km E) 9,075 km

5. A metade do número $2^{11} + 4^{8}$ é igual a:

A) $2^{5} + 4^{4}$ B) $2^{5} + 2^{8}$ C) $1^{10} + 2^{8}$ D) $2^{15} + 4^{5}$ E) $2^{9} + 4^{7}$

6. Quantos números de dois algarismos são primos e têm como antecessor um quadrado perfeito ?

A) 2 B) nenhum C) 1 D) 3 E) 6

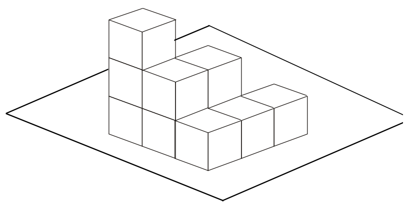
07. Quantas vezes num dia (24 horas) os ponteiros de um relógio formam ângulo reto ?

A) 48 B) 44 C) 24 D) 22 E) 23

8. Dona Zizi comprou 2 balas para cada aluno de uma 5ª série. Mas como os meninos andavam meio barulhentos, ela resolveu redistribuir essas balas, dando 5 para cada menina e apenas 1 para cada menino. Podemos concluir que na 5ª série

A) 20% são meninos B) 30% são meninas C) 75% são meninos D) 50% são meninas
E) 66,6...% são meninos

9. Vários caixotes cúbicos de plástico azul ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura ao lado, na qual apenas um dos caixotes não é visível. Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando−se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:

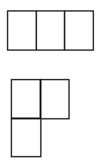


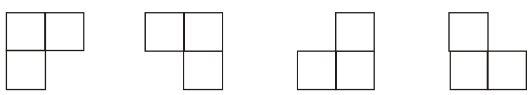
A) 4 B) 5 C) 3 D) 2
E) 1

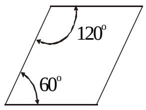
10. Ronaldo, sempre que pode, guarda moedas de 50 centavos ou 1 real. Atualmente, ele tem 100 moedas, num total de 76 reais. Quantas moedas de um valor ele tem a mais do que a de outro valor ?

A) 48 B) 4 C) 8 D) 52 E) 96

11. Juntando três quadrados congruentes e fazendo coincidir lados comuns, Sem superposição, podemos formar duas figuras diferentes, como mostra a figura ao lado. Observe que uma figura obtida de outra por rotação, deslocamento ou reflexão, é congruente à mesma figura (muda apenas a posição). Por exemplo, temos abaixo figura iguais em 4 posições diferentes:







Vamos agora pegar três losangos congruentes, um deles representado ao lado.
Quantas figuras diferentes podemos formar com os três losangos, fazendo coincidir lados comuns ?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 9

12. Renata digitou um trabalho de 100 páginas numerados de 1 a 100 e o imprimiu. Ao folhear o trabalho, percebeu que sua impressora estava com defeito, pois trocava o zero pelo um e o um pelo zero na numeração das páginas. Depois de consertar a impressora, quantas páginas teve que reimprimir, no mínimo ?

A) 18 B) 20 C) 22 D) 30 E) 28

13. Letícia vendeu todos seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R$ 240,00, R$ 180,00 e R$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia no mínimo?

A) 20 B) 37 C) 28 D) 21 E) 25

14. 6 cartões com números somente numa das faces são colocados sobre uma mesa conforme a ilustração. Os cartões X e Y estão com a face numerada voltada para baixo. A média aritmética dos números de todos os cartões é 5. A média aritmética dos números do cartão Y e seus três vizinhos é 3. Qual é o número escrito no cartão X ?

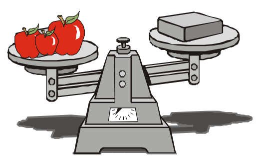
8	2	4
X	6	Y

A) − 4 B) 12 C) 0 D) 15 E) 10

15. Rafael tem $\frac{2}{3}$ da idade de Roberto e é 2 anos mais jovem que Reinaldo. A idade de Roberto representa $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo. Em anos, a soma das idades dos três é:

A) 48 B) 72 C) 58 D) 60 E) 34

16. Marcos quer pesar três maças numa balança de dois pratos,
Mas ele dispõe de apenas um bloco de 200 gramas. Observando o equilíbrio na balança, ele observa que a maçã maior tem o mesmo peso que as outras duas maçãs juntas; o bloco e a maçã menor pesam tanto quanto as outras duas maçãs juntas; a maçã maior junto com a menor pesam tanto quanto bloco. O peso total das três maçãs é:

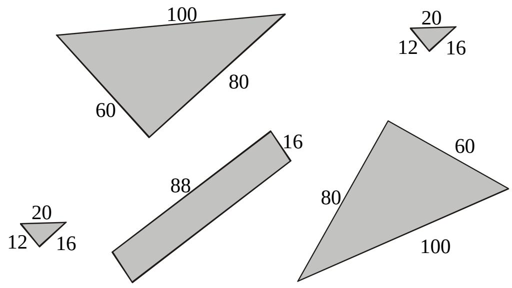


A) 250 g B) 300 g C) 350 g D) 400 g E) 450 g

17. No desenho ao lado estão representados
Quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas.

Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. O lado desse quadrado irá medir:

A) 88 cm B) 100 cm C) 60 cm
D) 96 cm E) 80 cm



18. Numa certa cidade, foi adotado o seguinte sistema de rodízio de carros: duas vezes por
semana, de segunda a sexta, cada carro fica proibido de circular, de acordo com o final de sua placa (algarismo das unidades). O número mêdio de finais de placa proibidos diferentes para cada dia de proibição é:

A) 4 B) 1 C) 3 D) 2 E) indefinido

19. Alexandre, consultando a programação de filmes, decidiu gravar *Contato*, cuja duração é de 150 minutos. Para gravar numa única fita, ele começou com velocidade menor (modo EP, que permite gravar 6 horas) e, num dado momento, mudou para a velocidade maior (modo SP, que permite gravar 2 horas), de forma que a fita acabou exatamente no fim do filme. Do início do filme até o momento da mudança do modo de gravação, quantos minutos se passaram?

A) 60 B) 30 C) 15 D) 45 E) 105

20. Você sabe que existem 9 números de um algarismo, 90 números de dois algarismos,
900 números de três algarismos, etc. Considere agora cada número cujo último algarismo à direita representa o número de algarismos desse número. Por exemplo, o número 9 074 é um deles, pois 4 é o número de seus algarismos. Quantos números desse tipo existem ?

A) 99 999 999 B) 99 999 992 C) 100 000 000 D) 10 000 000 E) 1 000 000 000

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 2

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − RS − SC − SP

− A duração da prova é de 3 horas.
− Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
− Você pode solicitar papel para rascunho.
− Entregue apenas a folha de respostas.

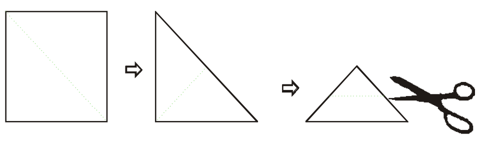
01. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 132 D) 140 E) 148

02. Em um hotel há 100 pessoas. 30 comem porco, 60 comem galinha e 80 comem alface. Qual é o maior número possível de pessoas que não comem nenhum desses dois tipos de carne?

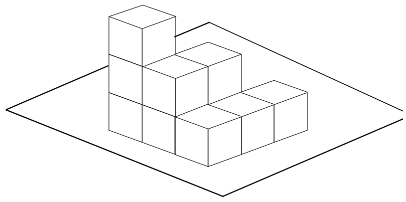
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

3. Uma folha quadrada foi dobrada duas vezes ao longo de suas diagonais conforme ilustração ao lado, obtendo−se um triângulo isósceles. Foi feito um corte na folha dobrada, paralelo à base desse triângulo, pelos pontos médios dos outros lados. A área do buraco na folha corresponde a que fração da área da folha original ?



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{1}{4}$

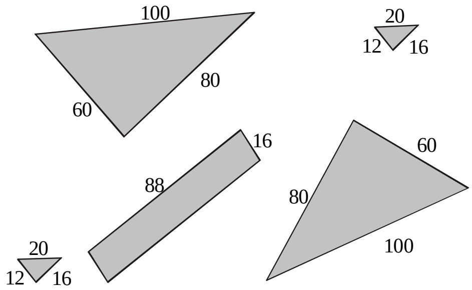
4. Vários caixotes cúbicos de plástico azul Ficaram armazenados ao ar livre, na posição indicada na figura ao lado, na qual apenas um dos caixotes não é visível. Com o tempo, o plástico exposto ao ar perdeu sua cor, tornando−se cinza. Ao desfazer a pilha, verificaremos que o número de caixotes com três faces azuis e três cinzentas será:



A) 4 B) 5 C) 3 D) 2 E) 1

5. No desenho ao lado estão representados quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas.

Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. O lado desse quadrado irá medir



A) 88 cm B) 100 cm C) 60 cm D) 96 cm E) 80 cm

06. Contando−se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2 e contando−se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo−se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é igual a :

A) 7 B) 8 C) 9 D) 10 E) 11

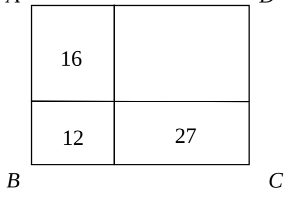
07. O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a :

A) 25^{25} B) 10^{25} C) 100^{25} D) 2^{25} E) 2×25^{25}

08. Qual o 1999º algarismo após a vírgula na representação decimal de $\frac{4}{37}$?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 7 E) 8

09. Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

10. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum

vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou−se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?
A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

11. Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e a seguir, ainda pagou R$ 2,00 de estacionamento. Se no final ainda tinha R$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?

A) R$ 220,00 B) R$ 204,00 C) R$ 196,00 D) R$ 188,00 E) R$ 180,00

12. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?
A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

13. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x-45)^2-(x-21)^2=0$ é:
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

14. Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças.
Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

15. Hoje, 12/6/1999, Pedro e Maria fazem aniversário. No mesmo dia em 1996, a idade de Pedro era 3/4 da idade de Maria. No mesmo dia em 2002, a idade de Pedro será igual à de Maria quando ele tinha 20 anos. Quantos anos Maria está fazendo hoje?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

16. Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver *pelo menos* 10 bolas da mesma cor é:

A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

17. Quantos são os triângulos que possuem medidas dos seus lados expressas por números inteiros e tais que a medida do maior lado seja igual a 11 ?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 24 E) 36

18. Os pontos *S*, *T* e *U* são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo *PQR* sobre os lados *RQ*, *RP* e PQ respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos *TU*, *ST* e *US* estão na razão *TU* : *ST* : *US* = 5 : 8 : 11, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :
A) 7 : 4 : 1 B) 8 : 5 : 2 C) 7 : 3 : 2 D) 11 : 8 : 5 E) 9 : 5 : 1

19. Aos vértices de um cubo são atribuídos os números de 1 a 8 de modo que os conjuntos dos números correspondentes aos vértices das seis faces são {1, 2, 6, 7}, {1, 4, 6, 8},
{1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7}, {3, 4, 6, 7} e {3, 4, 5, 8}. O vértice atribuído ao número 6 está mais longe do vértice de número

A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 7

20. Com os 5 números ímpares entre −5 e 4 e com os 5 números pares entre −5 e 4 são formados 5 pares de números. Se N é a soma dos produtos, obtidos em cada par de números, o valor mínimo possível de N é igual a :

A) − 41 B) − 40 C) − 28 D) −10 E) 0

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Primeira Fase − Nível 3

1ª. Fase Olimpíada Regional
BA − ES − GO − RJ − RN − RS − SC − SP

− A duração da prova é de 3 horas.
− Não é permitido o uso de calculadoras nem consulta a notas ou livros.
− Você pode solicitar papel para rascunho.
− Entregue apenas a folha de respostas.

1. Um pequeno caminhão pode carregar 50 sacos de areia ou 400 tijolos. Se foram colocados no caminhão 32 sacos de areia, quantos tijolos pode ainda ele carregar?

A) 132 B) 144 C) 146 D) 148 E) 152

02. Em um hotel há 100 pessoas. 30 comem porco, 60 comem galinha e 80 comem alface. Qual é o maior número possível de pessoas que não comem nenhum desses dois tipos de carne?

A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50

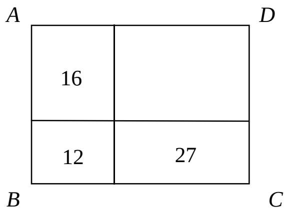
03. Um gafanhoto pula exatamente 1 metro. Ele está em um ponto A de uma reta, só pula sobre ela, e deseja atingir um ponto B dessa mesma reta que está a 5 metros de distância de A com exatamente 9 pulos. De quantas maneiras ele pode fazer isso?

A) 16 B) 18 C) 24 D) 36 E) 48

4. Sendo $a \neq b$ e $b \neq 0$, sabe−se que as raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são exatamente a e b. Então, $a - b$ é igual a:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

05. Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

06. Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. 12 delas são pentágonos regulares e as outras 20 são hexágonos também regulares. Os lados dos pentágonos são iguais aos dos hexágonos de forma que possam ser costurados. Cada costura une dois lados de duas dessas peças. Quantas são as costuras feitas na fabricação de uma bola de futebol?

A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

07. A diferença entre a maior raiz e a menor raiz da equação $(2x - 45)^2 - (x - 21)^2 = 0$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

08. Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

A) 5 B) 10 C) 20 D) 30 E) 40

09. Se $0^0 < x < 90^0$ e $\cos x = \frac{1}{4}$ então x está entre:

A) 0^0 e 30^0 B) 30^0 e 45^0 C) 45^0 e 60^0 D) 60^0 e 75^0 E) 75^0 e 90^0

10. Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e a seguir, ainda pagou R$ 2,00 de estacionamento. Se no final ainda tinha R$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?
A) R$ 220,00 B) R$ 204,00 C) R$ 196,00 D) R$ 188,00 E) R$ 180,00

11. Para todo n natural definimos a função f por:

$f(n) = \frac{n}{2}$ se n é par,

$f(n) = 3n + 1$ se n é ímpar.

O número de soluções da equação $f(f(f(n))) = 16$ é:

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

12. O número N = 11111 . . . 11 possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é:

A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 6

13. Um quadrado *ABCD* possui lado 40cm. Uma circunferência contém os vértices *A* e *B* e é tangente ao lado *CD*. O raio desta circunferência é:

A) 20cm B) 22cm C) 24cm D) 25cm E) 28cm

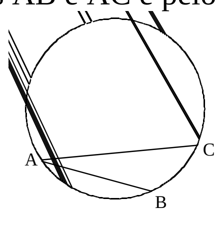
14. Os pontos *S*, *T* e *U* são os pontos de tangência do círculo inscrito no triângulo *PQR* sobre os lados *RQ*, *RP* e *PQ* respectivamente. Sabendo que os comprimentos dos arcos *TU*, *ST* e *US* estão na razão *TU* : *ST* : *US* = 5 : 8 : 11, a razão $\angle TPU : \angle SRT : \angle UQS$ é igual a :

A) 7 : 4 : 1 B) 8 : 5 : 2 C) 7 : 3 : 2 D) 11 : 8 : 5 E) 9 : 5 : 1

15. Para quantos valores inteiros de *x* existe um triângulo acutângulo de lados 12, 10 e *x*?

A) 9 B) 10 C) 12 D) 16 E) 18

16. A circunferência abaixo tem raio 1, o arco AB mede 70^0 e o arco BC mede 40^0. A área da região limitada pelas cordas AB e AC e pelo arco BC mede:



A) $\pi/8$ B) $\pi/9$ C) $\pi/10$ D) $\pi/12$ E) $\pi/14$

17. A reta *r* contém os pontos (0, 4) e (7, 7). Dos pontos abaixo, qual é o mais próximo da reta *r*?

A) (1999, 858) B) (1999, 859) C) (1999, 860)
D) (1999, 861)
E) (1999, 862)

18. Quantos são os pares (*x*, *y*) de inteiros positivos que satisfazem a equação
2*x* +3*y* = 101 ?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

19. Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).

A) 90 B) 98 C) 112 D) 118 E) 120

20. Em um aquário há peixes amarelos e vermelhos: 90% são amarelos e 10% são vermelhos. Uma misteriosa doença matou muitos peixes amarelos, mas nenhum vermelho. Depois que a doença foi controlada verificou−se que no aquário, 75% dos peixes vivos eram amarelos. Aproximadamente, que porcentagem dos peixes amarelos morreram?

A) 15% B) 37% C) 50% D) 67% E) 84%

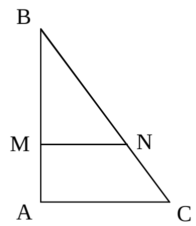
21. Hoje, 12/6/1999, Pedro e Maria fazem aniversário. No mesmo dia em 1996, a idade de Pedro era 3/4 da idade de Maria. No mesmo dia em 2002, a idade de Pedro será igual à de Maria quando ele tinha 20 anos. Quantos anos Maria está fazendo hoje?

A) 30 B) 31 C) 32 D) 33 E) 34

22. No quadrado *ABCD* o ponto *E* é médio de *BC* e o ponto *F* do lado *CD* é tal que o ângulo *AEF* é reto. Aproximadamente, que porcentagem a área do triângulo *AEF* representa da área do quadrado?

A) 28% B) 31% C) 34% D) 36% E) 39%

23. Dois irmãos herdaram o terreno *ABC* com a forma de um triângulo retângulo em *A*, e com o cateto *AB* de 84m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro *MN* paralelo a *AC* como mostra a figura abaixo. Assinale a opção que contém o valor mais aproximado do segmento *BM*.



A) 55m B) 57m C) 59m D) 61m E) 63m

24. As representações decimais dos números 2^{1999} e 5^{1999} são escritas lado a lado. O número de algarismos escritos é igual a :

A) 1999 B) 2000 C) 2001 D) 3998 E) 3999

25. Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver *pelo menos* 10 bolas da mesma cor é :

A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

GABARITO

Primeiro Nível (5ª. e 6ª. séries)

1) B	**6) A**	**11) E**	**16) B**
2) D	**7) B**	**12) E**	**17) E**
3) B	**8) C**	**13) B**	**18) A**
4) B	**9) A**	**14) E**	**19) D**
5) D	**10) B**	**15) C**	**20) C**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1) 1 saco de areia = 8 tijolos. Se o caminhão pode carregar ainda 18 sacos então pode carregar $18 \times 8 = 144$ tijolos.

2) 1999 D→ 3 998 T→399 D→798 T→79.

3) Em dezembro, 1 dólar = 1,2 reais, logo a prestação era $\frac{600}{1,2} = 500$ dólares. Em maio 1 dólar = 1,7 reais, logo a prestação foi $500 \times 1,7 = 850$ reais.

4) $\frac{3300}{3} \times 11 = 12100\ m = 12{,}1\ km$

$\frac{2^{11} + 2^{16}}{2} = 2^{10} + 2^{15} = 2^{15} + 4^{5}$

5)

6) Como os primos de dois algarismos são ímpares, devemos considerar somente os quadrados perfeitos pares: 16, 36, 64, cujos sucessores são 17, 37 e 65, dos quais apenas 65 não é primo.

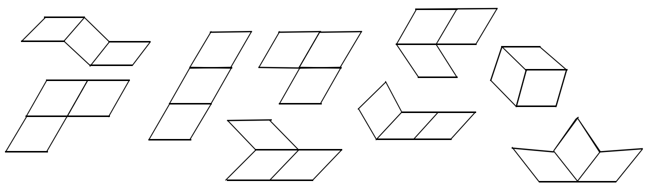
7) A cada hora os ponteiros formam ângulos retos em dois momentos distintos, exceto entre 2 e 3horas e entre 8 e 9horas (extremos direitos exclusive).

8) Com uma bala a menos para cada menino pode−se dar 3 balas a mais para cada menina. Logo o número de meninos é o triplo do número de meninas, igual a $\frac{3}{4}$ do total. Ou seja, 75%.

9) Observando a figura, vemos 4 cubos com exatamente 3 faces livres de contato.

10) Se todas moedas fossem de 1 real teria 100 reais. Como 100 − 76 = 24 e a diferença entre o valor de 1 real e 50 centavos é 0,5, então o número de moedas de 50 centavos é $\frac{24}{0{,}5} = 48$, de 1 real é 52 e a diferença entre o número de moedas é 4.

11)



12) Números com algarismo um 1: 1, 10, 11, ..., 19, 21, 31, ..., 91, 100 (total = 20); números com algarismo zero: 10, 20, ..., 100 (total = 10); números contados duas vezes:10, 100 (total = 2). Número de páginas com numeração defeituosa: 28.

13) mdc(240,180,320) = 20; número de CDs $= \frac{240}{20} + \frac{180}{20} + \frac{320}{20} = 37$.

14) $\frac{20 + X + Y}{6} = 5 \Leftrightarrow X + Y = 10$ e $\frac{12 + Y}{4} = 3 \Leftrightarrow Y = 0$. Logo $X = 10$

15) A idade de Rafael é $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{3}$ da idade de Reinaldo, ou seja $\frac{8}{9}$ da mesma. A diferença de 2 anos corresponde a $\frac{1}{9}$ da idade de Reinaldo, que tem então 18 anos. Logo Rafael tem 16 e Roberto 24. A soma é 58.

16) Se grande é igual a média mais pequena e pequena mais 200 é igual a grande mais média, então pequena mais 200 é igual a duas médias mais pequena, ou seja, a média pesa 100 g.Se grande mais pequena pesa 200 e grande é igual a 100 mais pequena, então o dobro da pequena é 100, ou seja, a pequena pesa 50 g. Então a grande pesa 150 g e a soma é 300 g.

17) A soma das áreas das partes é 6 400. Portanto, o quadrado tem lado $\sqrt{6400} = 80$.

18) Há 10 finais diferentes e cada um aparece 2 vezes, totalizando 20 ocorrências. Dividindo por 5 dias, temos 4 finais diferentes por dia.

19) A fração da fita gravada no modo mais lento é $\frac{t}{360}$; restam 150 − t minutos da fita para gravar no modo mais rápido, correspondendo a $\frac{150-t}{120}$ da fita. Somando as frações e igualando a 1, temos $t = 45$ min.

20) Os números são 1, ⑧2, ⑧⑧3, ⑧⑧⑧4,..., ⑧⑧⑧⑧⑧⑧⑧⑧9, num total de 1 + 9 + 90 + 900 + ...+ 90 000 000 = 100 000 000

Segundo Nível (7ª. e 8ª. séries)

1) B	**6) E**	**11) D**	**16) E**
2) D	**7) C**	**12) C**	**17) E**
3) E	**8) B**	**13) A**	**18) A**
4) A	**9) E**	**14) C**	**19) D**
5) E	**10) D**	**15) B**	**20) B**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1) 1 saco = 8 tijolos. Se o caminhão pode carregar ainda 18 sacos então pode carregar 18 × 8 = 144 tijolos.
2) Supondo que todos os que comem galinha tambem comem porco então 40 pessoas, no máximo não comem nenhum desses dois tipos de carne.
3) O triângulo retirado tem um quarto da área do triângulo isósceles. Abrindo a folha,
vemos essa situação reproduzida, logo o buraco em forma de quadrado tem um quarto da área do quadrado original.
4) Observando a figura, vemos 4 cubos com exatamente 3 faces livres de contato.
5) A soma das áreas das partes é 6 400. Portanto, o quadrado tem lado $\sqrt{6400} = 80$.
6) O número de alunos é pelo menos 15 e não mais que 29. Os únicos números neste intervalo que deixam resto igual a 2 quando divididos por 4 são 18, 22 e 26. Destes, o único que deixa resto igual a 1 quando dividido por 5 é 26 e o número de meninos é 26 – 15 = 11.
7) $\frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{(2\times 5^2)^{50}}{(5^2)^{25}} = \frac{2^{50}\times 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50}\times 5^{50} = (2^2\times 5^2)^{25} = 100^{25}$
8) A fração dada é equivalente a 0,108108108? assim, o 1999º algarismo é 1.
9) Se dois retângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas. Isto permite concluir que o retângulo grande tem base 4 + 9 = 13, e altura 3 + 4 = 7. Sua área é, portanto, 13 × 7 = 91.
10) Imagine um aquário com 100 peixes sendo A = 90 e V = 10. Se *x* peixes amarelos morreram e depois ainda havia 75% de peixes amarelos no aquário, temos que
$90 - x = \frac{75}{100}(100 - x)$, o que dá x = 60. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de 2/3, ou seja, aproximadamente 67%.
11) Faça as contas de trás para frente: (8 + 2).2 = 20, (20 + 2).2 = 44, (44 + 2).2 = 92 e (92 + 2).2 = 188.
12) $\frac{x+99}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Este número é inteiro se, e somente se, x + 19 for divisor de 80. Como 80 tem 20 divisores inteiros, então existem 20 valores de *x*.
13) Fatorando, obtemos $y = (3x - 66)(x - 24)$. As raízes são 22 e 24.
14) As figuras possuem um total de 12 × 5 + 20 × 6 = 180 lados. As costuras são 90.
15) Sejam: p a idade de Pedro e $p + d$ a de Maria. A primeira fornece a equação $p - 3 = \frac{3}{4}(p + d - 3)$ e a segunda, $p + 3 = 20 + d$. Resolvendo o sistema, obtemos $d = 7$, $p = 24$ e $p + d = 31$.
16) Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3\cdot 9 + 1$ pelo Princípio da Casa dos Pombos temos certamente 10 bolas da mesma cor.

17) Sejam *a*, *b* e *c* as medidas dos três lados tais que $a \le b \le c \le 11$. Então $6 \le b \le 11$ e $c - b \le a \le b$. A medida em que o valor de b decresce de 1, o conjunto dos valores possíveis de a diminui 2 unidades. Quando $b = 11$, temos $1 \le a \le 11$. Daí o número total de triângulos é $11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 36$.
18) Seja *O* o centro do círculo, e observemos que 5+ 8 + 11 = 24, 360 : 24 = 15, e daí, $\angle TOU$ = 5 x 15° = 75°, $\angle SOT$ = 8 x 15° = 120° e $\angle UOS$ = 11 x 15° = 165°. Como $OU \perp PQ$, $OS \perp QR$ e $OT \perp RP$, segue−se que $\angle TPU + \angle TOU = \angle SRT + \angle SOT = \angle UQS + \angle UOS$ = 180° e portanto, $\angle TPU$ =105°, $\angle SRT$ = 60° e $\angle UQS$ = 15° e estes estão na razão 7 : 4 : 1.

19) Dos três conjuntos {1, 2, 5, 8}, {2, 3, 5, 7} e {3, 4, 5, 8} vê−se que o vértice de número 5 é adjacente a 2, 3 e 8. Os três vértices opostos a 5 sobre as faces que convergem neste vértice são 1, 7 e 4. Portanto o vértice diagonalmente oposto a 5 é 6.

20) O menor produto será obtido ao formarmos os pares utilizando−se os *menores números ímpares* com os *maiores números pares*, a saber (–5, 4), (–3, 2), (−1, 0), (1, –2) e (3, –4) então :

$N = (-20) + (-6) + 0 + (-2) + (-12) = -40$

Terceiro Nível (Ensino Médio)

1) B	**6) C**	**11) C**	**16) B**	**21) B**
2) D	**7) A**	**12) A**	**17) D**	**22) B**
3) D	**8) C**	**13) D**	**18) E**	**23) C**
4) D	**9) E**	**14) A**	**19) E**	**24) B**
5) E	**10) D**	**15) A**	**20) D**	**25) E**

RESUMO DAS SOLUÇÕES

1) 1 saco = 8 tijolos. Se o caminhão pode carregar ainda 18 sacos então pode carregar 18×8 = 144 tijolos.
2) Supondo que todos os que comem galinha também comem porco então 40 pessoas, no máximo, não comem nenhum desses dois tipos de carne.
3) Imagine que B esteja a direita de A. O gafanhoto deve, em alguma ordem, dar 7 pulos para a Direita e 2 para a Esquerda. Uma trajetória possível é, por exempo,

DDDEDDEDD. O número de listas deste tipo é $C_9^2 = 36$.
4) Sendo $a + b = -a$ e $ab = b$ conclui−se que $a = 1$ e $b = -2$.
5) Se dois retângulos possuem mesma altura então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas. Isto permite concluir que o retângulo grande tem base 4 + 9 = 13 e altura 3 + 4 = 7. Sua área é, portanto, $13 \times 7 = 91$.
6) As figuras possuem um total de $12 \times 5 + 20 \times 6 = 180$ lados. As costuras são 90.
7) Fatorando, obtemos $y = (3x - 66)(x - 24)$. As raízes são 22 e 24.
8) $\dfrac{x+99}{x+19} = 1 + \dfrac{80}{x+19}$. Este número é inteiro se, e somente se, $x + 19$ for divisor de 80. Como 80 tem 20 divisores inteiros, então existem 20 valores de x.
9) Considere um quadrante *AOB* de raio 1 (ponha *OA* horizontal). Sobre *OA* considere os pontos *M* e *N* tais que *OM* = 1/2 e *ON* = 1/4. Trace *MC* e *NX* perpendiculares a *OA* (*C* e *X* no arco *AB*). Assim, arc*AC* = 60º, arc*AX* = x e cos x = 1/4. *NX* encontra a corda *BC* no seu ponto médio *P*. Considere o ponto *Q* do arco *BC* tal que *PQ* seja perpendicular à corda *BC*. Assim, *Q* é médio do arco *BC* e, portanto, arc*AQ* = 75º. Logo x > 75º.
10) Faça as contas de trás para frente: (8 + 2).2 = 20, (20 + 2).2 = 44, (44 + 2).2 = 92 e (92 + 2).2 = 188.
11) $f(32) = 16$ e $f(5) = 16$. Na etapa anterior temos apenas $f(64) = 32$ e $f(10) = 5$. Na etapa anterior a esta temos $f(128) = 64$, $f(21) = 64$, $f(20) = 10$ e $f(3) = 10$. Há 4 soluções.
12) Os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 por 7 são respectivamente 1, 4, 6, 5, 2, 0, e isto se repete em ciclos de 6. Como o resto da divisão de 1999 por 6 é 1, então o resto da divisão de N por 7 é também 1.
13) Sejam: *O* o centro da circunferência e *M* o ponto médio de *AB*. No triângulo retângulo *OMA* temos *OA* = *R*, *MA* = 20 e *OM* = 40 − *R*. O teorema de Pitágoras fornece *R* = 25.
14) Seja *O* o centro do círculo, e observemos que 5 + 8 + 11 = 24, 360 : 24 = 15, e daí, $\angle TOU = 5 \times 15° = 75°$, $\angle SOT = 8 \times 15° = 120°$ e $\angle UOS = 11 \times 15° = 165°$. Como $OU \perp PQ$, $OS \perp QR$ e $OT \perp RP$, segue−se que $\angle TPU + \angle TOU = \angle SRT + \angle SOT = \angle UQS + \angle UOS = 180°$ e portanto, $\angle TPU = 105°$, $\angle SRT = 60°$ e $\angle UQS = 15°$ e estes estão na razão 7 : 4 : 1.
15) Se x é o maior lado, devemos ter $x^2 < 10^2 + 12^2$, ou seja, $x < \sqrt{244} \cong 15{,}6$. Se $10 < x < 12$ o triângulo é acutângulo. Se x é o menor lado, devemos ter $x^2 > 12^2 - 10^2$, ou seja, $x > \sqrt{44} \cong 6{,}6$. Assim, x = 7, 8, 9, ?, 15. Existem 9 valores possíveis de x.
16) Seja *O* o centro da circunferência. Trace o diâmetro *AD*. Como o arco *CD* mede 70º temos que *BC* é paralelo a *AD*. Assim, a área do triângulo *ABC* é igual à área do triângulo *OBC*. Logo a área da região solicitada é igual à área do setor OBC de ângulo central 40º. Como 40 = 360/9, a área da região é $\pi/9$.
17) A reta que contém (0, 4) e (7, 7) tem equação $y = \dfrac{3}{7}x + 4$. Para $x = 1999$ obtemos $y \cong 860{,}7$. Logo, o ponto mais próximo é (1999, 861).
18) Como $x = \dfrac{101 - 3y}{2}$, temos que y é ímpar. Assim, y = 1, 3, 5, ?, 33. Como esta sequência possui 17 elementos concluimos que existem 17 pares (x, y) nas condições do enunciado.

19) Cada sub−conjunto de {1, 2, 3, ?, 9} com dois ou três elementos fornece apenas um número cujos dígitos estão em ordem estritamente crescente. Assim, temos entre 10 e 1000, $C_9^2 + C_9^3 = 120$ números.

20) Imagine um aquário com 100 peixes sendo A = 90 e V = 10. Se *x* peixes amarelos morreram e depois ainda havia 75% de peixes amarelos no aquário, temos que $90 - x = \frac{75}{100}(100 - x)$, o que dá *x* = 60. Se morreram 60 dos 90 peixes amarelos, a mortandade foi de 2/3, ou seja, aproximadamente 67%.

21) Sejam: *p* a idade de Pedro e *p* + *d* a de Maria. A primeira fornece a equação $p - 3 = \frac{3}{4}(p + d - 3)$ e a segunda, $p + 3 = 20 + d$. Resolvendo o sistema, obtemos *d* = 7, *p* = 24 e *p* + *d* = 31.

22) Considere AB = 4. Como os triângulos ABE e ECF são semelhantes temos que CF = 1 e DF = 3. Calculando as áreas dos triângulos temos: (ADF) = 6, (ECF) = 1, (ABE) = 4 e, consequentemente, (AEF) = 5. A área de AEF representa $\frac{5}{16} \cong 31\%$ da área do quadrado.

23) Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança temos $\frac{(AMN)}{(ABC)} = \frac{1}{2} = \frac{AM^2}{AB^2}$. Daí, $AM = 42\sqrt{2} \cong 59$.

24) Usaremos o fato de que $2^{1999} \times 5^{1999} = 10^{1999}$. Suponhamos que 2^{1999} possua *m* algarismos e que 5^{1999} possua *n* algarismos. Então :

$$10^{m-1} < 2^{1999} < 10^m,\ 10^{n-1} < 5^{1999} < 10^n$$

e assim

$$10^{m+n-2} < 10^{1999} < 10^{m+n}$$

Daí $1999 = m + n - 1$ e assim $m + n = 2000$.

25) Claramente, 37 bolas não são suficientes uma vez que entre elas podem estar as 10 bolas brancas e pretas e 9 de cada uma das outras. Por outro lado, 38 bolas garantem que temos pelo menos 28 bolas que não são nem brancas e nem pretas e uma vez que $28 = 3 \cdot 9 + 1$ pelo Princípio da Casa dos Pombos temos certamente 10 bolas da mesma cor.