XLI OLIMPÍADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

13 a 25 de julho, Taejon − Coreia do Sul

Primeiro dia
Tempo: 4horas e 30 minutos.

PROBLEMA 1

Duas circunferências Γ_1 e Γ_2 intersectam−se em M e N.
Seja l a tangente comum a Γ_1 e Γ_2 tal que M que está mais próxima de M do que de N. . A reta l é tangente a Γ_1 em A e a Γ_2 em B. A reta paralela a l que passa por M intersecta novamente a circunferência Γ_1 em C e novamente a circunferência Γ_2 em D.
As retas CA e DB intersectam−se em E; as retas AN e CD intersectam−se em P; as retas BN e CD intersectam−se em Q.
Mostre que $EP = EQ$.

PROBLEMA 2

Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc = 1$. Prove que

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1.$$

PROBLEMA 3

Seja $n \geq 2$ um número inteiro positivo. No início existem n pulgas numa reta horizontal, nem todas no mesmo ponto.
Para um número real positivo $\lambda,$ define−se um *salto* da seguinte maneira:

- Escolhem−se duas pulgas quaisquer nos pontos A e B com o ponto A à esquerda do ponto B;
- A pulga que está em A salta até o ponto C da reta, à direita de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda.$

Determine todos os valores de λ para os quais, para qualquer ponto M na reta e quaisquer posições iniciais das n pulgas, existe uma sucessão finita de saltos que levam todas as pulgas para pontos à direita de M.

Segundo dia
Tempo: 4horas e 30 minutos.

PROBLEMA 4

Um mágico tem cem carões numerados de 1 a 100. Coloca−os em três caixas, uma vermelha, uma branca e uma azul, de modo que cada caixa contém pelo menos um cartão.
Uma pessoa da platéia escolhe duas das três caixas, seleciona um cartão de cada caixa e anuncia a soma dos números dos dois cartões que escolheu. Ao saber esta soma, o mágico identifica a caixa da qual não se retirou nenhum cartão.
De quantas maneiras podem ser colocados todos os cartões nas caixas de modo de que este truque sempre funcione? (Duas maneiras consideram−se diferentes se pelo menos um cartão é colocado numa caixa diferente).

PROBLEMA 5

Verifique se existe um inteiro positivo *n* tal que *n* é divisível exatamente por 2000 números primos diferentes e $2^n + 1$ é divisível por *n*.

PROBLEMA 6

Sejam AH_1, BH_2, CH_3 as alturas de um triângulo acutângulo *ABC*. A circunferência inscrita no triângulo *ABC* é tangente aos lados *BC*, *CA*, *AB* em $T_1, T_2, T_{3,}$ respectivamente. Seja l_1 a reta simétrica da reta H_2H_3 relativamente à reta T_2T_3 l_2 a reta simétrica da reta H_3H_1 relativamente à reta T_3T_1 e l_3 a reta simétrica da reta H_1H_2 relativamente à reta T_1T_2 .

Prove que l_1, l_2, l_3 determinam um triângulo cujos vértices pertencem à circunferência inscrita no triângulo *ABC*.