XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 1 (5ª. e 6ª. séries)

PROBLEMA 1

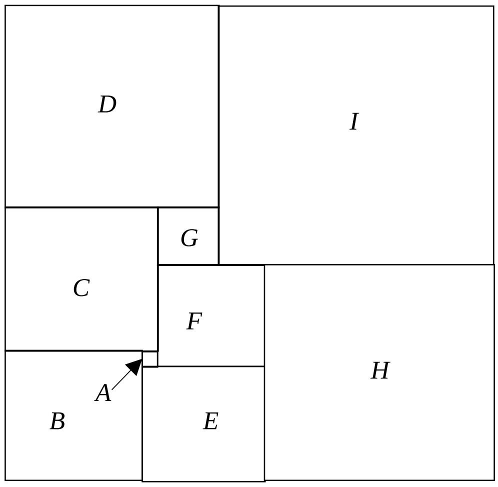
De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 24 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?

Obs: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 4$ e $2 \times 4 \times 3$ devem ser considerados iguais.

PROBLEMA 2

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1 e o quadrado *B* tem lado 9.

Qual é o lado do quadrado *I*?



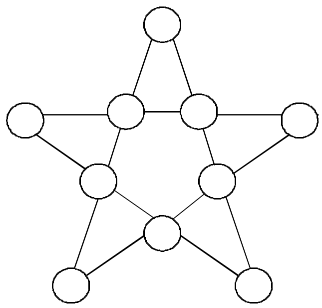
PROBLEMA 3

Pintamos de vermelho ou azul 100 pontos em uma reta. Se dois pontos vizinhos são vermelhos, pintamos o segmento que os une de vermelho. Se dois pontos vizinhos são azuis, pintamos o segmento de azul. Finalmente, se dois pontos vizinhos têm cores distintas, pintamos o segmento de verde. Feito isto, existem exatamente 20 segmentos verdes.
O ponto na ponta esquerda é vermelho.
É possível determinar com estes dados a cor do ponto na ponta direita?
Em caso afirmativo, qual a cor deste ponto?

PROBLEMA 4

Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho ao lado de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente.

a) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições.
b) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?
c) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?



PROBLEMA 5

Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 6

Qual é o maior inteiro positivo *n* tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por *n* são iguais?

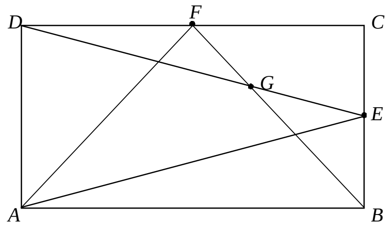
XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase − Nível 2 (7ª. e 8ª. séries)

PROBLEMA 1
Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 2
De quantas maneiras diferentes podemos construir um paralelepípedo usando exatamente 216 blocos cúbicos de medidas $1 \times 1 \times 1$?
Obs: Blocos de dimensões $2 \times 3 \times 36$ e $2 \times 36 \times 3$ devem ser considerados iguais.

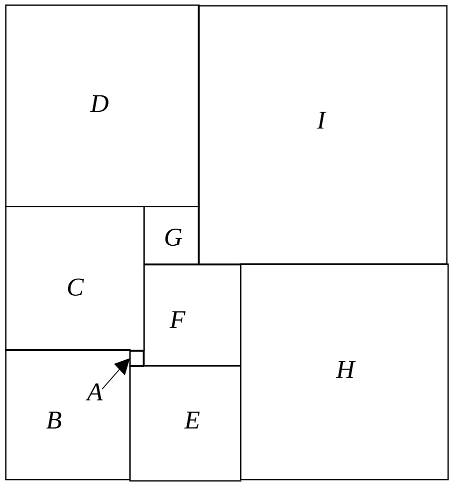
PROBLEMA 3
No retângulo *ABCD*, *E* é o ponto médio do lado *BC* e *F* é o ponto médio do lado *CD*. A interseção de *DE* com *FB* é *G*.

O ângulo $E\hat{A}F$ mede 20º. Quanto vale o ângulo $E\hat{G}B$?



PROBLEMA 4
O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 5
Listamos os inteiros de 1 a *n*. Desta lista apagamos o inteiro *m*. A média dos $n - 1$ números restantes é $\frac{134}{11}$. Determine *n* e *m*.

PROBLEMA 6
O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

a) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **exatamente** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

b) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **pelo menos** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

XXII OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase − Nível 3 (Ensino Médio)

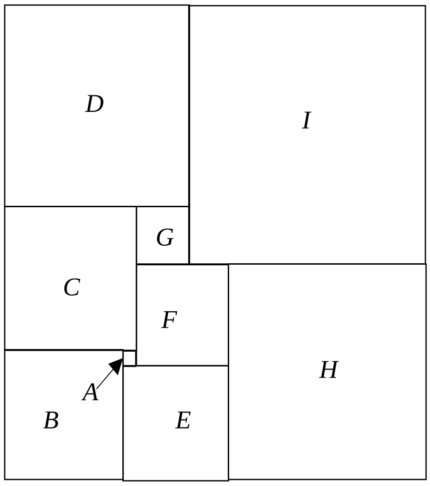
PROBLEMA 1

Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

PROBLEMA 2

O retângulo ao lado está dividido em 9 quadrados, *A, B, C, D, E, F, G, H* e *I*. O quadrado *A* tem lado 1.

Qual é o lado do quadrado *I*?



PROBLEMA 3

O trapézio *ABCD* tem bases *AB* e *CD*. O lado *DA* mede *x* e o lado *BC* mede 2*x*. A soma dos ângulos $D\hat{A}B$ e $A\hat{B}C$ é 120º. Determine o ângulo $D\hat{A}B$.

PROBLEMA 4

O campeonato *Venusiano* de futebol é disputado por 10 times, em dois turnos. Em cada turno cada equipe joga uma vez contra cada uma das outras. Suponha que o *Vulcano FC* vença todas as partidas do 1º. turno. Caso não vença o 2º. turno, o *Vulcano FC* jogará uma final contra o vencedor do 2º. turno, na qual terá vantagem caso faça mais pontos que o adversário durante todo o campeonato (vitória vale 3 pontos, empate vale 1 ponto e derrota 0 pontos).

a) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **exatamente** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

b) Determine o menor *n* tal que, se o *Vulcano FC* fizer **pelo menos** *n* pontos no segundo turno, garantirá pelo menos a vantagem na final (independente de contra quem e com que placares conquiste os *n* pontos).

PROBLEMA 5

O número $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\dots+\sqrt{1+\frac{1}{2000^2}+\frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva−o na forma $\frac{p}{q}$, *p* e *q* inteiros.

PROBLEMA 6

Para efetuar um sorteio entre os *n* alunos de uma escola ($n > 1$) se adota o seguinte procedimento. Os alunos são colocados em roda e inicia−se uma contagem da forma "um, DOIS, um, DOIS,...". Cada vez que se diz DOIS o aluno correspondente é eliminado e sai da roda. A contagem prossegue até que sobre um único aluno, que é o escolhido.

a) Para que valores de *n* o aluno escolhido é aquele por quem começou o sorteio?

b) Se há 192 alunos na roda inicial, qual é a posição na roda do aluno escolhido?

SOLUÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL

Solução do Problema 1:

Sejam $a \le b \le c$ as dimensões do paralelepípedo. Temos que $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ e $abc = 24.$ Como $abc \ge a.a.a \Leftrightarrow a^2 \le 24,$ temos $a \le 2,$ ou seja $a = 1$ ou $a = 2$.
Se $a = 1,$ $bc = 24.$ As possibilidades para b e c são $b = 1$ e $c = 24;$ $b = 2$ e $c = 12;$ $b = 3$ e $c = 8;$ $b = 4$ e $c = 6.$
Se $a = 2,$ $bc = 12.$ As possibilidades para *b* e *c* com $b \ge 2$ são $b = 2$ e $c = 6;$ $b = 3$ e $c = 4.$
Assim, há 6 maneiras de construirmos o paralelepípedo.

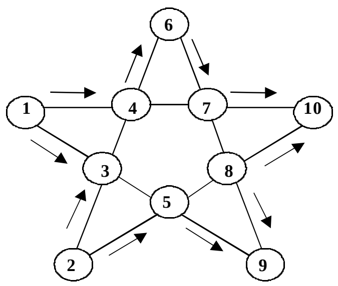
Solução do Problema 2:

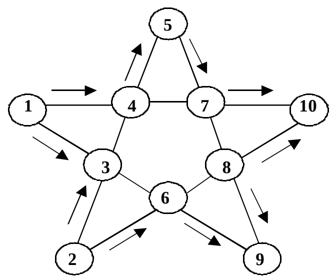
O quadrado *A* medida de lado 1cm enquanto que o quadrado *B* tem medida de lado 9cm. Daí que as longitudes dos lados dos quadrados restantes são:
C = 10cm *G* = 4cm.
F = 7cm *E* = 8cm.
D = 14cm. *I* = 18cm.

Solução do Problema 3:

Temos que os segmentos verdes dividem os pontos da reta em conjuntos de pontos com cores iguais, sendo que o primeiro conjunto à esquerda contém pontos vermelhos, o segundo conjunto contém pontos azuis, o terceiro conjunto contém pontos vermelhos, e assim por diante. Como há 20 segmentos verdes, temos 21 conjuntos de pontos.
Assim, como o 21º conjunto contém pontos vermelhos, o ponto na ponta direita é vermelho.

Solução do Problema 4:





1) **1 e 2 ocupam pontas vizinhas.** É fácil ver que colocando o 2 no meio ou em uma ponta "oposta"a 1 o problema não tem solução.
2) **9 e 10 ocupam pontas vizinhas**. Pelo mesmo raciocinio anterior.
3) Uma vez que 1 e 2 estão colocados o **3 está no meio, entre o 1 e o 2**. Observe que colocar o 3 em qualquer outra posição leva a um absurdo.
4) Uma vez que 1, 2 e 3 estão colocados, fica claro que o **4 é vizinho ao 3**.
5) Se 1, 2, 3 e 4 já estão colocados, **5 pode estar no meio ou em uma ponta, e o mesmo ocorre com o 6**. (ver figuras) Quando um deles está numa ponta, o outro está no meio.
6) **O 7 está no meio**.

Respostas:
a) Ver figuras
b) 1, 2, 9 e 10 obrigatórios mais 5 ou 6.
c) 3, 4, 7, 8 obrigatórios mais 5 ou 6.

Solução do Problema 5:

Decomponha N em primos = $2^{a_2}3^{a_3}\ldots$
Dobro de um cubo quer dizer que todos os a_i são múltiplos de 3 exceto a_2 que deixa resto 1 na divisão por 3.
Quíntuplo de um quadrado quer dizer que todos são pares exceto a_5.
Os menores expoentes possíveis são então $a_2 = 4$; $a_5 = 3$ e os outros $a_3 = a_7 = \ldots = 0$.
Resposta: $N = 2^4\, 5^3 = 2000$.

Solução do Problema 6:

Dois números deixam o mesmo resto quando divididos por n se e só se sua diferença é múltipla de n. Logo, as diferenças $238 - 154 = 84$ e $334 - 238 = 96$ são ambas múltiplas de n. Como n é o maior possível, concluímos que n deve ser o maior divisor comum de 84 e 96, que é 12.

SOLUÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

Solução do Problema 1

Decomponha N em primos = $2^{a_2}3^{a_3}\ldots$
Dobro de um cubo quer dizer que todos os a_i são múltiplos de 3 exceto a_2 que deixa resto 1 na divisão por 3.
Quíntuplo de um quadrado quer dizer que todos são pares exceto a_5.
Os menores exponentes possíveis são então $a_2 = 4$; $a_5 = 3$ e os outros $a_3 = a_7 = \ldots = 0$.
Resposta: $N = 2^4\, 5^3 = 2000$.

Solução do Problema 2

Sejam $a \le b \le c$ as medidas do paralelepípedo. Temos então que a, b e c são inteiros positivos e $abc = 216$.

Como $a \cdot b \cdot c \ge a \cdot a \cdot a \Leftrightarrow a \le 6$ e $a \mid 216$, temos $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ ou $a = 6$.

Se $a = 1$, temos $b \cdot c = 216$. As possibilidades neste caso são $b = 1$ e $c = 216$; $b = 2$ e $c = 108$; $b = 3$ e $c = 72$; $b = 4$ e $c = 54$; $b = 6$ e $c = 36$; $b = 8$ e $c = 27$; $b = 9$ e $c = 24$; $b = 12$ e $c = 18$.

Se $a = 2$, temos $b \cdot c = 108$, com $b \ge 2$. Temos então as possibilidades $b = 2$ e $c = 54$; $b = 3$ e $c = 36$;
$b = 4$ e $c = 27$; $b = 6$ e $c = 18$; $b = 9$ e $c = 12$.

Se $a = 3$, temos $b \cdot c = 72$, com $b \ge 3$. Temos então as possibilidades $b = 3$ e $c = 24$; $b = 4$ e $c = 18$;
$b = 6$ e $c = 12$; $b = 8$ e $c = 9$.

Se $a = 3$, temos $b \cdot c = 72$, com $b \ge 3$. Temos então as possibilidades $b = 3$ e $c = 24$; $b = 4$ e $c = 18$;
$b = 6$ e $c = 12$; $b = 8$ e $c = 9$.

Se $a = 4$, temos $b \cdot c = 54$, com $b \ge 4$. Neste caso, temos uma só solução, que é $b = 6$ e $c = 9$.

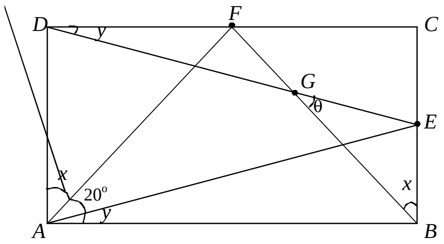
Se $a = 6$, a única solução é $b = c = 6$.

Temos, assim, 19 maneiras de construirmos o paralelepípedo.

Observação: pode−se verificar que o número de soluções de $b.c = r$, com $b \le c$ naturais, é $\left\lceil \frac{d(n)}{2} \right\rceil$, onde $\lceil x \rceil$ denota o menor número inteiro maior ou igual a x e $d(n)$ é o número de divisores de n. Assim, $b \cdot c = 216$ tem $\left\lceil \frac{d(216)}{2} \right\rceil = 8$ soluções; $b \cdot c = 108$ com $b \ge 2$ tem

$\left[\dfrac{d(108)}{2}\right]-1=5$ soluções (descontamos aqui a solução $b=1$ e $c=108$); $b\cdot c=72$ com $b\geq 3$ tem $\left[\dfrac{d(72)}{2}\right]-2=4$ soluções (eliminamos $b=5$ e $c=72$ e $b=2$ e $c=36$); $b\cdot c=54$ com $b\geq 4$ tem $\left[\dfrac{d(54)}{2}\right]-3=1$ solução (eliminamos $b=1,\ b=2$ e $b=3$) e $b\cdot c=36$ com $b\geq 6$ tem $\left[\dfrac{d(36)}{2}\right]-4=1$ solução (elimina−se b = 1, 2 ,3 ou 4).

Solução do Problema 3:



1) $F\hat{A}D=F\hat{B}C=x$

2) $E\hat{A}B=E\hat{D}C=y \Rightarrow x+y=70°$

$D\hat{E}C=90°-y=\theta+x$

$90°-(x+y)=\theta \Rightarrow \theta=20°$

Solução do Problema 4

Seja x o lado de B. O lado de
$C=x-1$, $D=x+5$, $E=x-1$, $F=x-2$, $G=4$, $H=2x-3$,
$I=x+9$ (=$D+G$) mas também é $3x-9$ (=$F+H-G$).
Assim $x+9=3x-9$ e $x=9$. Donde, o lado de I é 18.

Solução do Problema 5:

A média aritmética dos inteiros de 1 a n é $(n+1)/2$. Quando se apaga um destes números, a menor média possível é a dos números de 1 a (n−1), que é n/2, e a maior é a dos números de 2 a n, que é $n/2+1$.

Logo, deve−se ter $\dfrac{n}{2}<12\dfrac{2}{11}<\dfrac{n}{2}+1$ o que fornece $22\dfrac{4}{11}\leq n\leq 24\dfrac{4}{11}$ e, portanto, n é igual a 23 ou 24. Mas a média dos números restantes é uma fração de denominador 11. Logo, a quantidade de números que restam no quadro deve ser múltipla de 11. Portanto, n só pode ser igual a 23.
Finalmente, a soma dos números que restam é 22 x 12 2/11 = 268.
A soma dos números de 1 a 23 é 23 x 12 = 276.
Logo, o número apagado foi m = 276 − 268 = 8.

Solução do Problema 6:

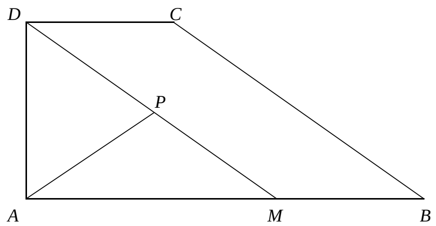
No pior caso, o 2º. colocado do 1º. turno faz 24 pontos no 1º. turno. Se o *Vulcano FC* fizer 23 pontos no 2º. turno, ele ganhará 7 jogos e empatará 2, e o 2º. colocado no 1º. turno chegará a um máximo de 25 pontos (pois no máximo empatará com o *Vulcano FC*) no segundo turno. Assim, o *Vulcano FC* terá vantagem na decisão, nesse caso.
Note que se o *Vulcano FC* fizer 24 pontos no 2º. turno perdendo para o 2º. colocado do 1º. turno, este pode fazer 27 pontos no 2º. turno e ganhar a vantagem para a decisão.
Se o *Vulcano FC* fizer 22 pontos ou menos e o *Klingon FC* tiver feito 24 pontos no 1o. turno poderá fazer 27 pontos no 2o. turno, somando 51 pontos, mais que os 49 (ou menos) pontos do *Vulcano FC*.
Assim, a resposta da segunda pergunta é n = 25, enquanto a resposta da 1ª. pergunta é n = 23.

SOLUÇÕES DO TERCEIRO NÍVEL

Solução do Problema 1:
Veja Solução do problema 1 do nível 2.

Solução do Problema 2:
Veja Solução do problema 4 do nível 2.

Solução do Problema 3:
Tracemos $DM \, // \, BC$ (vide figura abaixo). Como $\angle AMD = \angle ABC$ e $\angle DAM + \angle AMD = \angle DAM + \angle ABC = 120°$ tem−se que $\angle ADM = 60°$. Como $AD = x$ e $BC = 2x$, sendo P o ponto médio de DM, então, $AD = DP = x$ e ADP é um triângulo equilátero, isto é, $AP = a$. Portanto APM é um triângulo isósceles com então $\angle PAM = \angle AMP$ e como $\angle DPA$ é um ângulo externo do triângulo APM temos $60° = \angle DPA = \angle PAM + \angle AMP = 2. \angle AMP = 2. \angle ABC$. Portanto, $\angle ABC = 30°$ e $\angle DAB = 120° - \angle ABC = 90°$.



Solução do Problema 4:
Veja Solução do problema 6 do nível 2.

Solução do Problema 5:

$$S = \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{1 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2}}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \sqrt{\frac{a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1}{a^2 (a+1)^2}}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a}$$

$$= \sum_{a=1}^{2000} \left(1 + \frac{1}{a^2 + a}\right)$$

$$= 2000 + \sum_{a=1}^{2000} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}\right) = 2000 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2000} - \frac{1}{2001}\right)$$

$$= 2000 + 1 - \frac{1}{2001}$$

$$= 2000 + \frac{2000}{2001}$$

Solução do Problema 6:

a) Para que o primeiro da fila seja o escolhido é preciso, antes de mais nada, que haja um número par de alunos (caso contrário, ele será eliminado quando começar a segunda rodada). Mais precisamente, o primeiro da fila é o escolhido se e só se, a cada rodada, a fila tem um número par de alunos. Portanto, o primeiro da fila é escolhido se e só se o número de alunos é uma potência de 2.

b) Como $192 = 2^6 . 3$, nas primeiras 6 rodadas a fila tem um número par de alunos. Após estas 6 rodadas, a fila se reduz a três alunos e é fácil verificar que o escolhido é o terceiro deles. Resta, portanto, determinar quem são os alunos que restam após as primeiras 6 rodadas. Na primeira rodada, sobrevivem 1, 5, 9, ..., 189. De um modo geral, sobrevivem à rodada de ordem n (n = 1, 2, ..., 6) os números da forma $2^n + 1$. Portanto, após 6 rodadas os sobreviventes são 1, 65 e 129 e o aluno escolhido é o de número 129.