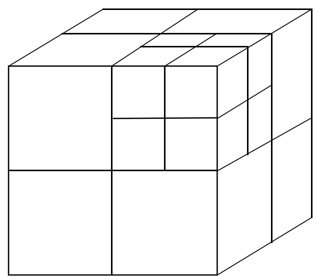
XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 1

Instruções:
- ♦ **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- ♦ **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- ♦ **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- ♦ **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Diga como dividir um cubo em 1999 cubinhos. A figura mostra uma maneira de dividir um cubo em 15 cubinhos.



PROBLEMA 2

Emanuela, Marta e Isabel são três nadadoras que gostam de competir e por isso resolveram organizar um desafio de natação entre elas. Ficou combinado o total de pontos para o primeiro, o segundo e o terceiro lugares em cada prova. A pontuação para primeiro lugar é maior que a para o segundo e esta é maior que a pontuação para o terceiro. As pontuações são números inteiros positivos. O desafio consistiu de várias provas e ao final observou−se que Emanuela fez 20 pontos, Marta 9 pontos e Isabel 10. A primeira prova foi vencida por Isabel.

(a) Quantas provas foram disputadas?
(b) Determine o total de pontos para o primeiro, segundo e terceiro lugares.

PROBLEMA 3

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade *A* para cidade *B*, que é a cidade do reino mais longe de *A*. Após um tempo, ele foi expulso da cidade *B* para a cidade *C* do reino mais longe de *B*. Sabe−se que a cidade *C* não é a mesma cidade *A*. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade *A*?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

PROBLEMA 4

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe−se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

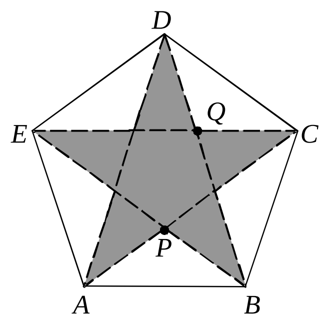
Terceira Fase − Nível 2

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de $APQD$.



PROBLEMA 2

Um reino é formado por dez cidades. Um cidadão muito chato foi exilado da cidade A para a cidade B, que é a cidade do reino mais longe de A. Após um tempo, ele foi expulso da cidade B para a cidade C do reino mais longe de B. Sabe−se que a cidade C não é a mesma cidade A. Se ele continuar sendo exilado dessa maneira, é possível que ele retorne à cidade A?

Nota: as distâncias entre as cidades são todas diferentes.

PROBLEMA 3

Adriano, Bruno e Carlos disputaram uma série de partidas de tênis de mesa. Cada vez que um jogador perdia, era substituído pelo que estava a esperar. A primeira partida foi disputada por Adriano e Bruno. Sabe−se que Adriano venceu 12 partidas e Bruno 21. Quantas vezes Adriano e Bruno se enfrentaram?

PROBLEMA 4

Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1.000.000ª. e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 3

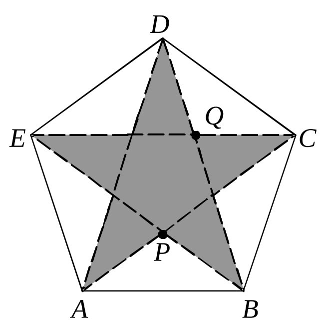
PRIMEIRO DIA

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Seja $ABCDE$ um pentágono regular tal que a estrela $ACEBD$ tem área 1. Sejam P interseção entre AC e BE e Q a interseção entre BD e CE. Determine a área de $APQD$.



PROBLEMA 2

Prove que há pelo menos um algarismo diferente de zero entre a 1.000.000ª. e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ após a vírgula.

PROBLEMA 3

Temos um tabuleiro quadrado 10×10.

Desejamos colocar n peças em casas do tabuleiro de tal forma que não existam 4 peças formando em retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Determine o maior valor de n para o qual é possível fazer esta construção.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Terceira Fase − Nível 3

SEGUNDO DIA

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 4

O planeta ***Zork*** é esférico e tem várias cidades. Dada qualquer cidade existe uma cidade antípoda (i.e., simétrica em relação ao centro do planeta).
Existem em ***Zork*** estradas ligando pares de cidades. Se existe uma estrada ligando as cidades P e Q então também existe uma estrada ligando as cidades P' e Q', onde P' é a antípoda de P e Q' é a antípoda de Q. Além disso, estradas não se cruzam e dadas duas cidades P e Q sempre é possível viajar de P a Q usando alguma seqüência de estradas.

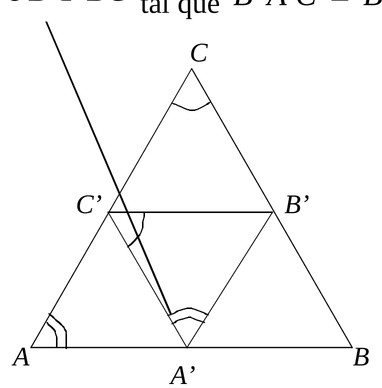
O preço da ***Kriptonita*** em ***Urghs*** (a moeda planetária) em duas cidades ligadas por uma estrada difere por no máximo 100 ***Urghs***. Prove que existem duas cidades antípodas onde o preço da ***Kriptonita*** difere por no máximo 100 ***Urghs***.

PROBLEMA 5

Em Tumbólia existem n times de futebol .
Deseja−se organizar um campeonato em que cada time joga exatamente uma vez com cada um dos outros. Todos os jogos ocorrem aos domingos, e um time não pode jogar mais de uma vez no mesmo dia. Determine o menor inteiro positivo m para o qual é possível realizar um tal campeonato em m domingos.

PROBLEMA 6

Dado triângulo ABC mostre como construir com régua e compasso um triângulo $A'B'C'$de área mínima com $C' \in AC, A' \in AB$ e $B' \in BC$ tal que $B'\hat{A}'C' = B\hat{A}C$ e $A'\hat{C}'B' = A\hat{C}B$.



XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Soluções da Terceira Fase − Nível 1

PROBLEMA 1
SOLUÇÃO DE MARIANA DE MORAES SILVEIRA (Belo Horizonte − MG)

O cubo deve ser dividido em 1000 cubinhos, ou seja $10 \times 10 \times 10$, depois, deve−se pegar um deles e dividí−lo novamente em 1000 cubinhos para que obtenhamos 1999 cubinhos. Assim teremos $1000 - 1$ (que será dividido) $+ 1000 = 1999$ cubinhos.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE DIOGO DOS SANTOS SUYAMA (Belo Horizonte − MG)

a) Foram disputadas 3 provas. Como $20 + 10 + 9 = 39$, o número de pontos distribuidos por prova só poderia ser 3 ou 13, pois estes são os únicos divisores de 39, a não ser o mesmo e o 1. Em consequências, o número de provas também será um desses números. Porém, se forem disputadas 13 provas, só há uma maneira de se distribuir os pontos: 2 para o primeiro, 1 para o segundo e 0 para o terceiro. Entretanto, 0 não é positivo, sendo assim descartada essa hipótese.

b) Já sabendo que são 3 provas, é impossível que a vencedora ganhe menos que 8 pontos, pois assim, Emanuela só conseguiria os 20 pontos fazendo 7, 7 e 6 pontos em cada prova. Para isso, seria preciso que a vencedora fizesse 7 pontos, a segunda colocada 6 e a última 0, mas como vimos, 0 não é positivo. É impossível, também que a vencedora faça mais de 10 pontos, pois não seria possível que a segunda fizesse mais pontos que a última, ou que esta não fizesse 0 pontos. Então, as únicas possibilidades são: 1ª. $\to$ 10, 2ª. $\to$ 2, 3ª. $\to$ 1; 1ª. $\to$ 9, 2ª. $\to$ 3, 3ª. $\to$ 1; 1ª. $\to$ 8, 2ª. $\to$ 4, 3ª. $\to$ 1; e 1ª. $\to$ 8, 2ª. $\to$ 3, 3ª. $\to$ 2. A primeira opção é incorreta, pois Isabel, que venceu uma das provas, não poderia ter feito pontos nas outras. A segunda opção também não é correta, pois Isabel teria que marcar apenas um ponto em duas provas. A última opção é incorreta também, pois Isabel teria que marcar 2 pontos em duas provas. Terceira opção: 1ª. $\to$ 8, 2ª. $\to$ 4, 3ª. $\to$ 1 é a correta. Veja o quadro abaixo:

	1ª. Prova	2ª. Prova	3ª. Prova	Total
Emanuela	4	8	8	20
Marta	1	4	4	9
Isabel	8	1	1	10

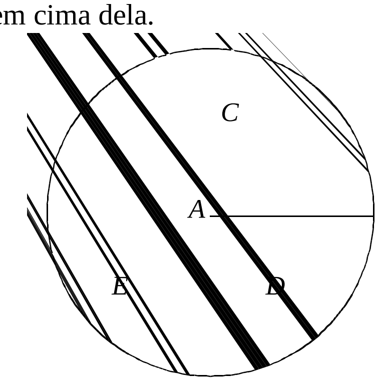
PROBLEMA 3
Veja solução do problema 2 do nível 2.

PROBLEMA 4
Veja solução do problema 3 do nível 2

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Soluções da Terceira Fase − Nível 2

PROBLEMA 1
Veja solução do problema 1 do nível 3.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE EINSTEIN DO NASCIMENTO JÚNIOR (Fortaleza − CE)
Há dez cidades A, B, C, D, E, F, G, H, I, J.
Um chato da cidade A foi exilado para a cidade mais longe de A, a cidade B.
Como B é a cidade mais longe de A, pode−se dizer que se tomarmos A como sendo o centro de uma circunferência de raio AB, todas as cidades estarão dentro dos limites da circunferência, exceto a cidade B que estará em cima dela.



Como as distâncias entre as cidades não são iguais e o chato foi exilado para a cidade C que é a mais longe de B então $BC > AB$.
Da cidade C ele será exilado para a cidade D que é a mais longe de C e assim sucessivamente até chegar na cidade J onde teremos a seguinte verdade:

$AB < BC < CD < . . . < HI < IJ$.

Ao chegar nesse ponto vemos que A com certeza não é a cidade mais longe de J pois

AB = raio
AJ < raio
$AJ < AB$
$AB < IJ$
$AJ < IJ$

Logo ele irá para uma cidade diferente de A, e nunca retornará à cidade A.

PROBLEMA 3
SOLUÇÃO DE FÁBIO DIAS MOREIRA (Rio de Janeiro − RJ)

Quando começa a série, já ocorre um encontro entre Adriano (A) e Bruno (B). Vamos chamar de V_A, V_B e V_C o número de vitórias de Adriano, Bruno e Carlos, respectivamente. Então ao final da série $V_A + V_B = 33$ e depois do 1º. jogo $V_A + V_B = 1$. Suponhamos que o segundo jogo seja $x \times C$. Chamemos de E o número de jogos $A \times B$.
Então no 2º. jogo $E = 1$. Enquanto C ganhar, $V_A + V_B$ e E permanecem constantes. Quando C perder, $V_A + V_B$ aumenta uma unidade. O próximo jogo será $A \times B$, aumentando $V_A + V_B$ e E em uma unidade. Após este jogo, o próximo será $x \times C$. Ou seja, para que E aumente uma unidade, $V_A + V_B$ aumenta duas, e o aumento de um em E. Como no 2º. jogo $E = 1$ e falta que $V_A + V_B$ aumente 32 unidades, ocorrem $1 + 16 = 17$ jogos $A \times B$.

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO ALTERNATIVA DE HENRIQUE CHOCIAY (Pinhais − PR)

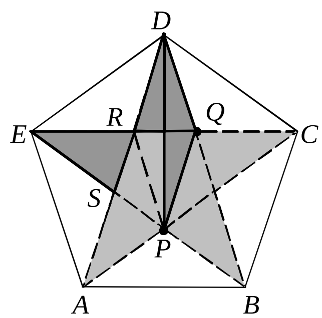
Para começar a desenvolver $\sqrt{2}$, utilizei o processo de extração que não utiliza tentativas (processo prático por aproximação).

$\sqrt{2}$	
− 1	1,414
1.00	
−96	1´ 2 = 2**4**´ **4** @100
4.00	96 ¿
281	
1.1900	14´ 2 = 28**1**´ **1** @400
1.1296	
0060400	141´ 2 = 282**4**´ **4** @11900
	11296 ¿
	Deste lado, o número de casas sempre aumenta em 1 casa, nunca mais.
	(mesmo se houvesse um caso de 99999´9 = 899991 (só aumenta 1 casa) (entre 1.000.000 e 3.000.000)

Quando estivermos no número 1.000.000 de casas no multiplicador, teremos 999.999 casas decimais. Supondo que haja só 1 casa no resto nesta situação, depois de 1.000.000 de operações, teremos 1.999.999 casas decimais (1 milhão de zeros), 2.000.000 no multiplicador e 2.000.001 no resto, podendo obter número diferente de zero.
Em geral
O fato de, não podendo haver divisão, com o aumento das casas divisoras em 1 e do resto em 2 e as casas decimais serem menores que as divisoras em 1 torna impossível a obtenção desta seqüência de zeros entre as casas de 1.000.000 e 3.000.000.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Soluções da Terceira Fase − Nível 3

PROBLEMA 1
SOLUÇÃO DE HUGO PINTO IWATA (São José do Rio Preto − SP)



Como o pentágono e a estrela são regulares, o quadrilátero *APQD* é um trapézio.
A área do trapézio *APQD* é igual à área do triângulo *APD* somada à do triângulo *PQD*. Como *BDRP* também é um trapézio, $\overline{RP} // QD$, então a área de *PQD* é igual à de *RQD*. Como a estrela é regular, a área de *RQD* é igual à de *ERS*, então, a área de *PQD* é igual à de *ERS*. Assim a área do trapézio *APQD* é igual à soma das áreas dos triângulos *APD* e *ERS*, que é igual à figura *APDRES*, que é exatamente metade da estrela toda.

Resposta: A área de *APQD* é 0,5.

PROBLEMA 2
SOLUÇÃO DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia − GO)

Suponhamos, por absurdo, que todos os algarismos das casas decimais entre a 1.000.000ª. casa decimal e a 3.000.000ª. casa decimal de $\sqrt{2}$ fossem zero, então:
$10^{2\cdot10^6}\lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor = \lfloor 10^{3\cdot10^6}\sqrt{2}\rfloor$ (onde $\lfloor x\rfloor \in \mathbb{Z}$ e $\lfloor x\rfloor \le x < \lfloor x\rfloor + 1$)
$10^{2\cdot10^6}\cdot K = \lfloor 10^{3\cdot10^6}\sqrt{2}\rfloor \Rightarrow$ (onde $K = \lfloor 10^{10^6}\sqrt{2}\rfloor$) $\Rightarrow 10^{2\cdot10^6}K \le 10^{3\cdot10^6}\sqrt{2} < 10^{2\cdot10^6}K + 1$,
mas como $10^{2\cdot10^6}K \ne 10^{3\cdot10^6}\sqrt{2}$, (pois se não fosse teríamos $\sqrt{2} = K/10^{10^6}$, um absurdo, pois $\sqrt{2}$ é irracional!) então:

$$10^{2\cdot10^6}K < 10^{3\cdot10^6}\sqrt{2} < 10^{2\cdot10^6}K + 1 \Rightarrow \frac{K}{10^{10^6}} < \sqrt{2} < \frac{K}{10^{10^6}} + \frac{1}{10^{3\cdot10^6}} \Rightarrow$$

$$\frac{K^2}{10^{2\cdot10^6}} < 2 < \frac{K^2}{10^{2\cdot10^6}} + \frac{2K}{10^{4\cdot10^6}} + \frac{1}{10^{6\cdot10^6}} \Rightarrow K^2 < 2\cdot10^{2\cdot10^6} < K^2 + \frac{2K}{10^{2\cdot10^6}} + \frac{1}{10^{4\cdot10^6}},$$

mas como $K = \lfloor 10^{10^6}\sqrt{2} \rfloor \in \mathbb{Z}$, temos (pela definição de $\lfloor x \rfloor$):

$K \le 10^{10^6}\sqrt{2} < K+1 \Rightarrow \dfrac{K}{10^{10^6}} \le \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{K}{10^{2\cdot 10^6}} \le \dfrac{\sqrt{2}}{10^{10^6}} < \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{2K}{10^{2\cdot 10^6}} \le \dfrac{1}{2}$, logo:

$K^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < K^2 + \dfrac{2K}{10^{2\cdot 10^6}} + \dfrac{1}{10^{4\cdot 10^6}} < K^2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10^{4\cdot 10^6}} < K^2 + 1 \Rightarrow$

$K^2 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} < K^2 + 1 \Rightarrow 0 < 2\cdot 10^{2\cdot 10^6} - K^2 < 1$, um absurdo, pois não existe nenhum inteiro maior que 0 e menor que 1, disto concluímos que há um algarismo diferente de 0 nestas casas decimais. (Poderíamos ter uma aproximação melhor pois 2K é bem menor que $10^{2\cdot 10^6}$).

Obs: $\lfloor x \rfloor$ denota a função do "maior inteiro".

PROBLEMA 3
SOLUÇÃO DA BANCA

O problema é equivalente a encontrar subconjuntos A_1, A_2, ?, A_{10} de {1, 2, 3, ?, 10} cuja soma do número de elementos seja a maior possível tais que a interseção de dois quaisquer deles tenha no máximo um elemento (A_i é o conjunto das posições das peças na $i-$ésima linha do tabuleiro). Se A_i tem k_i elementos então há $C_{k_i}^2 = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2}$ subconjuntos de 2 elementos não pode pertencer a dois dos conjuntos A_i, e há no total $C_{10}^2 = 45$ subconjuntos de 2 elementos de {1, 2,},?,10}. Assim, devemos ter $\sum_{i=1}^{10} = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45.$

Por outro lado, se existem i, j com $k_j > k_i + 1$, temos $C_{k_i+1}^2 + C_{k_j-1}^2 = \dfrac{k_i(k_i+1)}{2} + \dfrac{(k_j-1)(k_j-2)}{2} = \dfrac{k_i(k_i+1)}{2} + \dfrac{k_j(k_j-1)}{2} + k_i + 1 - k_j < C_{k_i}^2 + C_{k_j}^2.$

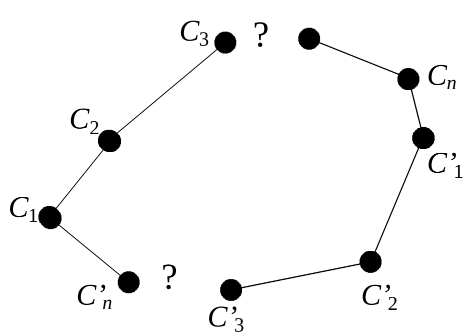
Assim para minimizar $\sum_{i=1}^{10} = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2}$ mantendo $\sum_{i=1}^{10} = k_i$ fixo devemos ter $|k_i - k_j| \le 1$ para todo i, j. Se observamos que $5C_4^2 + 5C_3^2 = 5\cdot 6 + 5\cdot 3 = 45$, concluímos que se $\sum_{i=1}^{10} = \dfrac{k_i(k_i-1)}{2} \le 45$ então $\sum_{i=1}^{10} \le 5\cdot 4 + 5\cdot 3 = 35,$ valendo a igualdade se e só se 5 dos k_i são iguais a 4 e os outros 5 iguais a 3. Para que a contrução seja possível nesse caso precisamos de que cada par de elementos apareça em exatamente um dos conjuntos A: . Nesse caso, cada elemento de {1, 2, 3?, 10} deve aparecer em 3 conjuntos com 4 elementos ou em um conjunto com 4 elementos e 2 conjuntos com 3 elementos (pois cada um dos outros 9 elementos aparece exatamante uma vez junto com ele). Como haveria 5 conjuntos com 4 elementos, o número médio de conjuntos com 4 elementos aos quais cada elemento pertence é 2, donde há elementos que pertencem a 3 conjuntos com 4 elementos (pois um elemento não pode pertencer a exatamente 2 conjuntos com 4 elemetos). Assim, podemos supor sem perda de generalidade que A_1 = {1, 2, 3, 4}, A_2 = {1, 5, 6, 7} e A_3 = { 1, 8, 9, 10}, mais então qualquer outro conjunto de 4 elementos deve estar contido em {2, 3, ?, 10}, e portanto deve intersectar um dos conjunto A_1, A_2,

A_3, A_4, em pelo menos 2 elementos. Assim, não é possível que $\sum_{i=1}^{10} k_i$ seja igual a 35. Por outro lado é possível construir exemplos com $\sum_{i=1}^{10} k_i = 34,$ como abaixo:
$A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $A_2 = \{1, 5, 6, 7\}$, $A_3 = \{2, 5, 8, 9\}$, $A_4 = \{3, 6, 8, 10\}$, $A_5 = \{1, 9, 10\}$,
$A_6 = \{2, 7, 10\}$, $A_7 = \{3, 7, 9\}$, $A_8 = \{4, 5, 10\}$, $A_9 = \{4, 6, 9\}$ e $A_{10} = \{4, 7, 8\}$.

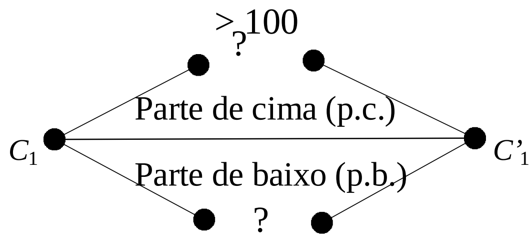
●	●	●	●						
●				●	●	●			
	●			●			●	●	
		●			●		●		●
●								●	●
	●					●			●
		●				●		●	
			●	●					●
			●		●			●	
			●			●	●		

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO DE GILBERTO SANTOS DO NASCIMENTO (São Paulo − SP)

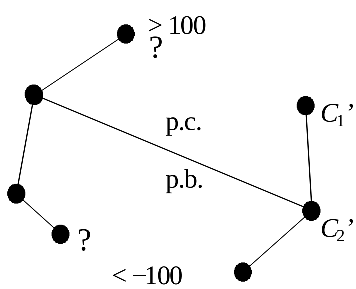
Seja C_1' o antípoda de C_1.
Vamos ligar C_1 a C_1' e vice−versa, formando uma linha fechada. Abaixo C_j' é o antípoda de C_j para todo j.

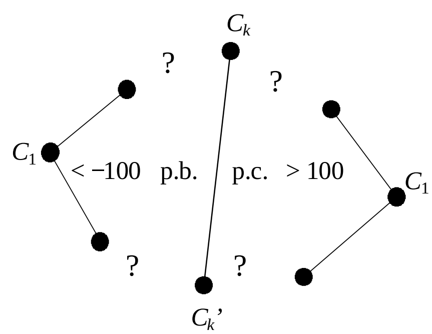


Agora, supondo que a diferença da Kriptonita de C_1' para C_1 seja maior que 100. Então, vamos supor que $(C_2 - C_1) + (C_3 - C_2) +?+ (C_1' - C_n) > 100$. Como ao percorrer o caminho, temos de ter uma diferença zero ao chegarmos em C_1 novamente, somando $(C_2' - C_1') + (C_3' - C_2') +?+ (C_1 - C_n') < -100$.
Agora, supondo que o **Superman** trace uma linha de C_1 a C_1' (esta linha não poderia ser uma estrada, pois $|C_1' - C_1| > 100$) a soma das diferenças na parte de cima da linha deve ser maior que 100 e embaixo menor que −100.



Agora, supondo que esta linha percorra a figura, ligando todas as cidades antípodas, na parte de cima, a soma deve continuar sendo maior que 100 e embaixo menor que 100. Em p.c. (parte de cima), a soma não pode passar bruscamente de > 100 para < −100, pois são somadas apenas duas diferenças de cada vez (menores que 200 no total!). Assim, para que p.c. fique negativo < −100 e p.b. fique positivo > 100, teríamos de ter duas cidades antípodas com diferença < 100 em módulo.





Continuando o percurso, ao chegarmos em C_1', teremos de ligá−lo a C_1. No entanto, p.c. estará em baixo e a soma das diferenças na direção de C_1' para C_1 terá de ser positivo > 100. Mas essa soma era negativa e < −100 quando começamos (⇒⇐) Contradição.
O mesmo ocorre analogamente com p.b. Logo, em algum par da cidades (uma cidade e sua antípoda), a diferença do preço da Kriptonita deverá ser menor ou igual a 100.
Viva o **Superman**!.

PROBLEMA 4
SOLUÇÃO ALTERNATIVA DE HUMBERTO SILVA NAVES (Goiânia − GO)
Suponhamos, por absurdo, que os preços diferem por mais de 100 Urghs em todas as cidades antípodas, então:

$|x_0 - y_0| > 100 \Rightarrow M_0 - m_0 > 100$ (onde x_n e y_n são antípodas e representam o preço da Kriptonita).
$|x_1 - y_1| > 100 \Rightarrow M_1 - m_1 > 100$

$| x_n - y_n| > 100 \Rightarrow M_n - m_n > 100$ (Onde M_n = máx (x_n, y_n) e m_n = min (x_n, y_n))

Como sabemos que existe um caminho de estradas que leva de M_0 até m_0, então deve existir uma estrada que liga (para certo $i, j \in$ N; $i, j \le n$) $M_i \longleftrightarrow m_j$.
Como existe uma estrada ligando $M_i \longleftrightarrow m_j$, também existe uma estrada ligando $m_j \longleftrightarrow M_i$ (antípodas). Pode acontecer $i = j$, caso em que se conclui facilmente que $M_i - m_i > 100$, um absurdo pois m_i e M_i são "vizinhas", logo o preço da Kriptonita difere por no máximo 100 Urghs.
Se $i = j$, então:
$| M_j - m_i | \le 100$ (são "vizinhas")
$| M_i - m_j | \le 100$, mas como
$M_i - m_i > 100$ e $M_j - m_j > 100$, então:
$M_i + M_j - m_i - m_j > 200$
$M_i - m_j + M_j - m_i > 200 \Rightarrow | M_i - m_j + M_j - m_i| > 200 \Rightarrow | M_i - m_j| + | M_j - m_i| > 200 \Rightarrow 200 \ge$
$\ge | M_i - m_j| + | M_j - m_i| > 200$, um absurdo, logo existem cidades antípodas cujo preço difere no máximo em 100 Urghs.

PROBLEMA 5
SOLUÇÃO DE FABRÍCIO SIQUEIRA BENEVIDES (Fortaleza − CE)

Façamos 2 casos, n par e n ímpar.

i) n par.

Cada time tem que jogar com cada um dos outros. Se os times são: T_1, T_2, ?, T_n; temos que um time T_i tem que jogar $(n - 1)$ vezes e para isso precisará de pelo menos $(n - 1)$ domingos. (pois só pode jogar 1 vez por domingo). Mostraremos que é possível realizar o campeonato em $(n - 1)$ domingos. Para isso basta que o jogo entre T_i e T_j $(i \ne j)$ ocorra no seguinte domingo.

1) $d_{ij} \equiv i + j \ (mod\ n - 1)$, $1 \le d_{ij} \le n - 1$ para $\forall\ i \ne n, j \ne n$
2) $d_{in} \equiv 2i \ (mod\ n - 1)$, $1 \le d_{in} \le n - 1$ para todo $i \ne n, j \ne n$
(se um dos times for T_n).

Podemos observar isso numa tabela que indique o dia entre T_i e T_j
Exemplo: para $n = 6$

d_{ij}	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
T_1		**3**	**4**	**5**	**1**	**2**
T_2	**3**		**5**	**1**	**2**	**4**
T_3	**4**	**5**		**2**	**3**	**1**
T_4	**5**	**1**	**2**		**4**	**3**
T_5	**1**	**2**	**3**	**4**		**5**
T_6	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	

O campeonato organizado assim satisfaz o problema pois: é fácil ver que um time I joga com cada um dos outros times (no domingo d_{ij}, $j \ne i$). E cada time só joga uma vez num mesmo dia, caso contrário teríamos: um time T_i que joga contra T_j e T_k no mesmo domingo, ou seja $d_{ij} = d_{ki}$

1) Se $i = n$: $d_{jn} = d_{kn} \therefore 2j \equiv 2k \ (mod\ n - 1)$ como $(2, n - 1) = 1$ teriamos
$j \equiv k \ (mod\ n - 1)$, $\{j, k\} \subset \{1, 2, ?, n - 1\} \therefore j = k$, uma contradição.

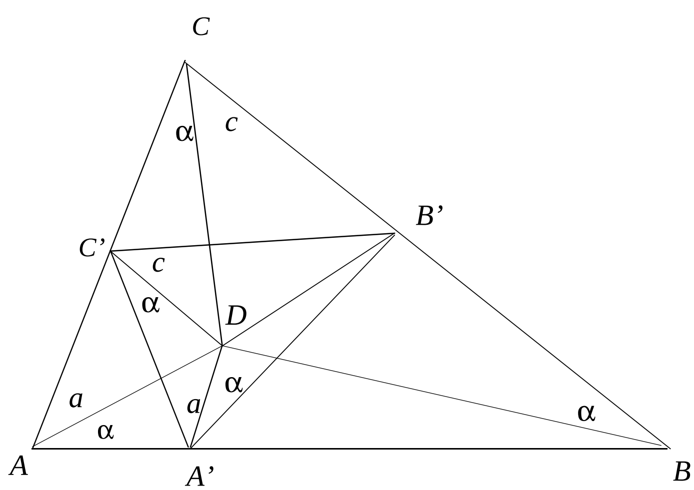
2) Se $i \neq n$.

2.1) j e $k \neq n$: $d_{ik} = d_{ij}$ $\therefore$ $i + k \equiv i + j$ $(mod\ n - 1)$ $\therefore$ $j \equiv k$ $(mod\ n - 1)$ e $k = j$. uma contradição.
2.2) $j = n$, $k \neq n$ sem perda de generalidade: $d_{in} = d_{ik}$ $\therefore$ $i + i \equiv i + k$ $(mod\ n - 1)$
2.3) $i \equiv k$ $(mod\ n - 1)$ $\{i, j\} \leq \{1, 2, ?, n - 1\} \Rightarrow i = j$ uma contradição.

Agora se n for ímpar, como cada time tem que jogar com todos os outros seria necessário pelo menos $(n - 1)$ domingos.
Só que $(n - 1)$ domingos não são suficientes pois em cada dia há um time que fica sem jogar. Assim, se no primeiro dia T_i foi o time que não jogou, ele ainda precisará de mais $(n - 1)$ domingos para jogar contra os outros. De modo que são necessários pelo menos n domingos.
n domingos são suficientes, basta que o campeonato se organize assim: Sejam T_1, T_2, ?, T_n os times. Criamos um time virtual chamado T_{n+1} onde jogar contra T_{n+1} um certo dia, significa não jogar naquele dia.
Temos então $n + 1 = x$ times, organizamos então como no caso anterior o campeonato. Como x é par isso pode ser feito em $x - 1 = n$ dias.
Obs: O exemplo para $(2k - 1)$ times é obtido do de $(2k)$ times esquecendo−se um dos times.

Resposta: Se n é par $m = n - 1$.
Se n é ímpar $m = n$.

PROBLEMA 6
SOLUÇÃO DA BANCA



Sejam $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ os ângulos internos do triângulo ABC, sejam $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$ os ângulos internos do triângulo $A'B'C'$ e consideremos $\angle A' = \angle A$ e $\angle C' = \angle C$.
Seja D o ponto de interseção das circunferências circuscritas aos triângulos $AA'C'$ e $CC'B'$. Nos quadriláteros inscritíveis $AA'DC'$ e $CC'DB'$ temos $\angle A'DC' = ? - \angle A$ e $\angle C'DB' = ? - \angle C$. Logo, $\angle A'DB' = 2? - (? - \angle A) - (? - \angle C) = ? - \angle B$, e portanto, a circunferência circunscrita ao triângulo $BB'A'$ passa por D.

No quadrilátero inscritível $AA'DC'$, $\angle DAA' = \angle DC'A' = \alpha$ e $\angle DA'C' = \angle DAC'$ = a. Como $\angle A = \angle A'$ concluimos que $\angle DA'B' = \alpha$. Logo, no quadrilátero inscritível $BB'DA'$ temos que $\angle DBB' = \alpha$. No quadrilátero inscritível $CC'DB'$ temos que $\angle DCB' = \angle DC'B'$ = c, e como $\angle C = C'$ concluímos que $\angle DCC' = \alpha$.

O ponto D está então associado ao triângulo ABC pela propriedade:

$$\angle DAB = \angle DBC = \angle CDA$$

e portanto não depende da posição de A', B' e C'. O ponto D é fixo e sua construção será mostrada no final da solução.

Como os ângulos $A'DB'$, $B'DC'$ e $C'DA'$ são constantes, a menor área possível do triângulo A'B'C' é obtida quando os segmentos DA', DB' e DC' forem os menores possíveis. Logo, DA', DB' e DC' são respectivamente perpendiculares aos lados AB, BC e CA.

Construção do ponto *D*

Seja E a interseção da mediatriz de AB com a perpendicular a BC traçada por B. A circunferência de centro E e raio $EA = EB$ é tangente em B à reta BC. Logo, para qualquer ponto X do menor arco AB tem−se que $\angle XAB = \angle XBC$.

Seja F a interseção da mediatriz de BC com a perpendicular a CA traçada por C. A circunferência de centro F e raio $FB = FC$ é tangente em C à reta CA. Logo, para qualquer ponto X do menor arco BC tem−se que $\angle XBC = \angle XCA$.

O ponto D, interseção desses dois arcos é tal que $\angle DAB = \angle DBC = \angle CDA$.