OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 1998
2ª FASE − 7 de Novembro de 1998 NÍVEL 1 − 5ª e 6ª Séries

Instruções
- *A Prova tem uma duração de 4 horas.*
- *A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.*
- *Todas as soluções devem ser justificadas.*
- *Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.*

PROBLEMA 1
Cinco pontos sobre uma circunferência estão numerados consecutivamente 1, 2, 3, 4 e 5, no sentido dos ponteiros do relógio. Uma pulga pula de um ponto a outro da seguinte forma: se ela estiver sobre um ponto de número ímpar, move−se um ponto; e se ela estiver sobre um ponto de número par, move−se dois pontos (sempre no sentido dos ponteiros do relógio). Se a pulga estiver inicialmente no número 1, onde ela estará após 1998 pulos?

PROBLEMA 2
Alice, Beatriz, Célia e Dora apostaram uma corrida.
Alice disse: Célia ganhou e Beatriz chegou em segundo lugar.
Beatriz disse: Célia chegou em segundo lugar e Dora em terceiro.
Célia disse: Dora foi a última e Alice a segunda.
Cada uma das quatro meninas disse uma verdade e uma mentira (não necessariamente nessa ordem). Determine a ordem de chegada das meninas nessa corrida.

PROBLEMA 3
Em um condomínio serão construídas 6 casas de uma mesmo lado de uma rua. As casas podem ser de tijolo ou de madeira, mas como medida de segurança contra incêndio, duas casas de madeira não podem ser vizinhas. De quantas maneiras se pode planejar a construção das casas desse condomínio?

PROBLEMA 4
100 pessoas jogam a seguinte variação do jogo de bingo: Inicialmente, cada jogador escreve os números de 1 a 100 na ordem que desejar. Em seguida, o diretor do jogo sorteia sucessivamente os números de 1 a 100 em qualquer ordem. Cada jogador ganha 1 real por cada número de sua seqüência que apareça na mesma posição na seqüência sorteada. Sabendo que todos os participantes receberam quantias diferentes, prove que algum deles recebeu exatamente 100 reais.

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 1998
2ª FASE − 7 de Novembro de 1998 NÍVEL 2 − 7ª e 8ª Séries

Instruções
- *A Prova tem uma duração de 4 horas.*
- *A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.*
- *Todas as soluções devem ser justificadas.*
- *Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.*

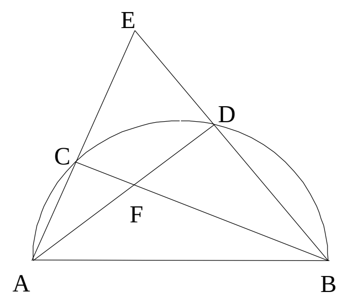
PROBLEMA 1
100 pessoas jogam a seguinte variação do jogo de bingo: Inicialmente, cada jogador escreve os números de 1 a 100, na ordem que desejar. Em seguida, o diretor do jogo sorteia sucessivamente os números de 1 a 100, em qualquer ordem. Cada jogador ganha 1 real por cada número de sua seqüência que apareça na mesma posição na seqüência sorteada. Sabendo que todos os participantes receberam quantias diferentes, prove que algum deles recebeu exatamente 100 reais.

PROBLEMA 2
Um dragão tem 3996 cabeças. Um cavaleiro tem uma espada capaz de cortar 300 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 84 cabeças; e tem uma outra espada capaz de cortar 100 cabeças, mas quando ele a usa, surgem imediatamente outras 370 cabeças. Pode o cavaleiro, através de uma sucessão de golpes de suas espadas, reduzir o número de cabeças do dragão a 1998? Como?

PROBLEMA 3
Um quadrado multiplicativo tem como propriedade que qualquer linha, qualquer coluna e as duas diagonais têm o mesmo produto. Isto é, pela figura abaixo : ABC = DEF = GHI = ADG = BEH = CFI = AEI = CEG = K Mostre que se os números colocados no quadrado forem inteiros, então K (o produto comum) deve ser um cubo perfeito.

A	B	C
D	E	F
G	H	I

PROBLEMA 4
Os pontos C e D estão em um semi−circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo:



Os pontos C e D podem mover−se sobre a semi−circunferência, mas o arco CD é sempre constante e igual a 70°.
a) Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB.
b) Calcule os ângulos AEB e AFB.
c) Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi−circunferência.

OLIMPÍADA ESTADUAL DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 1998

2ª FASE − 7 de Novembro de 1998 NÍVEL 3 − Ensino Médio

Instruções

- *A Prova tem uma duração de 4 horas.*
- *A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.*
- *Todas as soluções devem ser justificadas.*
- *Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.*
- *Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.*

PROBLEMA 1

A Diretoria de um Banco é composta por um Diretor, um Vice−Diretor e quatro Chefes de Setor. O Diretor resolve instalar um novo cofre. Manda fazer várias fechaduras e distribui as chaves de modo que:

- Cada chave abre exatamente uma fechadura.
- O cofre só é aberto se forem abertas todas as suas fechaduras.
- O Diretor possa abrir sozinho o cofre.
- O Vice−Diretor só possa abrir o cofre juntamente com um dos Chefes de Setor.
- Os Chefes de Setor só possam abrir o cofre em grupos de três.

a) Qual o número mínimo de fechaduras que se devem colocar no cofre para que este esquema seja possível?
b) Nesse caso, quantas chaves cada um deve ter?

PROBLEMA 2

a) Encontre todas as soluções inteiras e positivas de $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$, onde *p* é um número primo [cada solução é um par ordenado $(x;y)$].

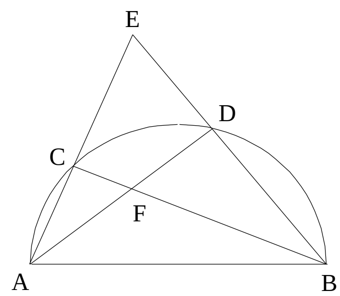
b) Encontre pelo menos 5 soluções inteiras e positivas de $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{1998}$.

PROBLEMA 3

Mostre que o número $N=760^{1998}-20^{1998}+1910^{1998}-652^{1998}$ é divisível por 1998.

PROBLEMA 4

Os pontos C e D estão em um semi−circunferência de diâmetro AB como mostra a figura abaixo:



Os pontos C e D podem mover−se sobre a semi−circunferência, mas o arco CD é sempre constante e igual a 70°.

a) Explique por que a reta EF é sempre perpendicular a AB.

b) Calcule os ângulos AEB e AFB.

c) Determine o conjunto das posições assumidas pelo ponto E quando os pontos C e D se movem sobre a semi−circunferência.