XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase − Nível 1

Instruções:
- ♦ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ♦ Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- ♦ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ♦ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Considere a tabela 3×3 abaixo, onde todas as casas, inicialmente, contém zeros:

0	0	0
0	0	0
0	0	0

Para alterar os números da tabela, é permitida a seguinte operação: escolher uma sub−tabela
2×2 formada por casas adjacentes, e somar 1 a todos os seus números.

a) Diga se é possível, após uma seqüência de operações permitidas, chegar à tabela abaixo:

7	9	2
15	25	12
8	18	10

b) Complete o quadro abaixo, sabendo que foi obtido por uma seqüência de operações permitidas:

14		
19	36	
	14	

PROBLEMA 2

Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis ou por 7 ou por 13.

PROBLEMA 3

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

a) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.
b) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.
c) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

PROBLEMA 4

Sete números naturais são escritos em círculo. Sabe−se que, em cada par de números vizinhos, um deles divide o outro. Mostre que há dois números não vizinhos com a mesma propriedade (isto é: um deles divide o outro).

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase − Nível 2

Instruções:

- ♦ A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- ♦ Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- ♦ Você pode solicitar papel para rascunho.
- ♦ Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

PROBLEMA 3

Em um jogo existem 20 buracos vazios em fila e o jogador deve colocar um pino em cada buraco de acordo com as seguintes regras:

d) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem vazios, o pino permanece.

e) Se colocar um pino em um buraco e se um dos buracos vizinhos estiver ocupado, o pino deste buraco vizinho deve ser retirado.

f) Se colocar um pino em um buraco e se os dois buracos vizinhos estiverem ocupados, então um dos pinos vizinhos deve ser retirado.

Determine qual é o número máximo de pinos que podem ser colocados.

PROBLEMA 4

São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase − Nível 3

Primeira Prova.

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 1

São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.

PROBLEMA 2

No triângulo ABC, D é o ponto médio de AB e E o ponto do lado BC tal que $BE = 2 \cdot EC$. Dado que os ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{A}E$ são iguais, encontre o ângulo $B\hat{A}C$.

PROBLEMA 3

Duas pessoas disputam um jogo da maneira descrita a seguir.
Inicialmente escolhem dois números naturais: $n \geq 2$ (o número de rodadas) e $t \geq 1$ (o incremento máximo).
Na primeira rodada o jogador A escolhe um natural $m_1 > 0$ e, posteriormente, o jogador B escolhe um natural positivo $n_1 \neq m_1$.
Para $2 \leq k \leq n$, na rodada k o jogador A escolhe um natural m_k com $m_{k-1} < m_k \leq m_{k-1} + t$ e posteriormente o jogador B escolhe um natural n_k com $n_{k-1} < n_k \leq n_{k-1} + t$. Após essas escolhas, nessa k − ésima rodada, o jogador A ganha mdc (m_k, n_{k-1}) pontos e o jogador B ganha mdc (m_k, n_k) pontos. Ganha o jogo o jogador com maior pontuação total ao fim das n rodadas. Em caso de pontuações totais iguais o jogador A é considerado vencedor.
Para cada escolha de n e t, determine qual dos jogadores possui estratégia vencedora.

XX OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Terceira Fase − Nível 3

Segunda Prova.

Instruções:

- A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.
- Não é permitido o uso de calculadora nem consulta a livros ou notas.
- Você pode solicitar papel para rascunho.
- Todas as suas soluções devem ser justificadas.

PROBLEMA 4

Dois meninos jogam o seguinte jogo. O primeiro escolhe dois números inteiros diferentes de zero e o segundo monta uma equação do segundo grau usando como coeficientes os dois números escolhidos pelo primeiro jogador e 1998, na ordem que quiser (ou seja, se o primeiro jogador escolhe *a* e *b* o segundo jogador pode montar a equação $1998x^2 + ax + b = 0,$ ou $bx^2 + 1998x + a = 0,$ etc.)
O primeiro jogador é considerado vencedor se a equação tiver duas raízes racionais diferentes.
Mostre que o primeiro jogador pode ganhar sempre.

PROBLEMA 5

Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que satisfazem $f(2f(x)) = x + 1998$ para todo $x \in \mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$.

PROBLEMA 6

Dois matemáticos, perdidos em Berlim, chegam à esquina da rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisam chegar à esquina da rua Meininger com a rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, e eles são obrigados portanto a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegaram à esquina desejada.

Qual é o menor valor para o número positivo K tal que eles podem ter certeza de que se há N quarteirões (ou quadras) entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem chegar ao destino andando no máximo KN quarteirões (ou quadras)?