III OLIMPÍADA DE MAIO

Primeiro nível

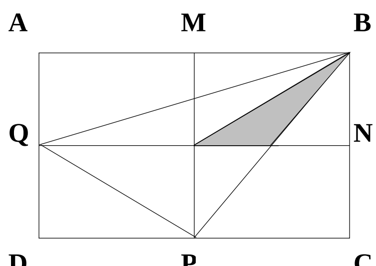
Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular.
Não se pode consultar livros nem notas.

1) Num tabuleiro quadrado de 9 casas (de três por três), deve−se colocar nove elementos do conjunto $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8,9\}$, distintos um do outro, de modo que cada um deles fique numa casa e se verifiquem as seguintes condições:

- As somas dos números da segunda e terceira fileira sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira fileira.
- As somas dos números da segunda e terceira coluna sejam, respectivamente, o dobro e o triplo da soma dos números da primeira coluna.

Mostre todas as formas possíveis de colocar elementos de S no tabuleiro,cumprindo com as condições indicadas.

2)



No retângulo *ABCD, M, N, P* e *Q* são os pontos médios dos lados. Se a área do triângulo sombreado é 1, calcular a área do retângulo *ABCD.*

3) Num tabuleiro de 8 por 8, colocam−se 10 fichas que ocupam, cada uma, uma casa. Em cada casa sem ficha está escrito um número entre 0 e 8, que é igual à quantidade de fichas colocadas nas casas vizinhas. Casas vizinhas são as que têm um lado ou um vértice em comum.Mostre uma distribuição das fichas que faça que a soma dos números escritos no tabuleiro seja a maior possível.

4) Joaquín e seu irmão Andrés vão todos os dias para a aula no ônibus da linha 62. Joaquín paga sempre as passagens.
Cada passagem tem impresso um número de 5 dígitos. Um dia, Joaquín observa que os números das passagens, além de consecutivos, são tais que a soma dos dez dígitos é precisamente 62.
Andrés pergunta para ele se a soma dos dígitos de algum dos boletos é 35 e, ao saber a resposta, pôde dizer corretamente o número de cada boleto.
Quais são estes números?

5) Quando Pablo fez 15 anos, fez uma festa convidando 43 amigos. Ele tem uma torta com forma de polígono regular de 15 lados e sobre ela coloca 15 velas.
As velas são colocadas de modo que entre velas e vértices nunca há três alinhados (três velas quaisquer não estão alinhadas, nem duas velas quaisquer com um vértice do polígono, nem dois vértices quaisquer do polígono com uma vela).
Logo depois, Pablo divide a torta em pedaços triangulares, mediante cortes que unem velas entre si ou velas e vértices, mas nunca se cruzam com outros já realizados. Por que, ao fazer isto, Pablo consegue distribuir um pedaço para cada um de seus amigos mas ele fica sem comer?

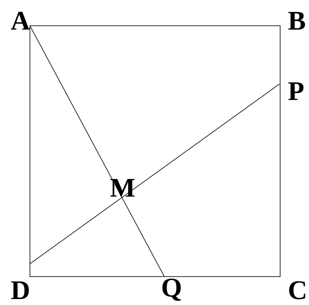
III OLIMPÍADA DE MAIO

Segundo nível

Duração da prova: 3 horas.
Cada problema vale 10 pontos.
Não se pode usar máquina de calcular.
Não se pode consultar livros nem notas.

1) Quantos são os números de sete algarismos que são múltiplos de 388 e terminam em 388?

2)



Em um quadrado $ABCD$ de lado k, colocam−se os pontos P e Q sobre os lados BC *e* CD, respectivamente, de forma que $PC = 3PB$ e $QD = 2QC$. Sendo M o ponto de interseção de AQ e PD, determine a área do triângulo QMD em função de k.

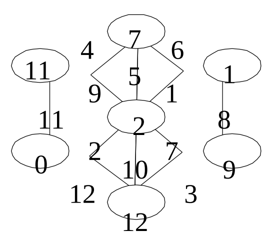
3) Temos 10000 fichas iguais com a forma de um triângulo equilátero. Com esses pequenos triângulos se podem formar hexágonos regulares sem superposições de fichas ou vazios.

Considere agora o hexágono regular que desperdiça a menor quantidade possível de triângulos. Quantos triângulos sobram?

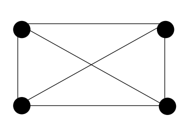
4) Nas figuras, assinalam−se os vértices com um círculo. Chamam−se *caminhos* aos segmentos que unem os vértices. Distribuem−se números inteiros não negativos nos vértices, e nos caminhos se assinalam as diferenças entre os números de seus extremos.

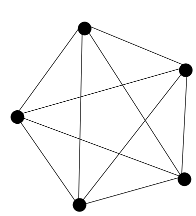
Diremos que uma distribuição é *elegante* se aparecem nos caminhos todos os números de 1 a n, em que n é o número de caminhos.

Veja um exemplo de distribuição *elegante:*



Dar −se possível− uma distribuição elegante para as seguintes figuras. Em caso de não ser possível, mostrar por quê.





5) Quais são as possíveis áreas de um hexágono com todos os ângulos iguais e cujos lados medem 1,2,3,4,5 e 6 em alguma ordem?