XV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
CARACAS − VENEZUELA 16 A 24 DE SETEMBRO.

PRIMEIRO DIA

Problema 1: Constrói−se um polígono regular de n lados (n 3) e enumeram−se os vértices de 1 a n. Traçam−se todas as diagonais do polígono. Demonstrar que se n é ímpar, é possível associar a cada lado e a cada diagonal um número inteiro de 1 a n, tal que se verifiquem simultaneamente as seguintes condições:

1. O número associado a cada lado ou diagonal seja diferente dos números dos seus vértices.
2. Para cada vértice, todos os lados e diagonais que nele se intersectem tenham números diferentes.

Problema 2: Sejam S_1 e S_2 duas circunferências de centros O_1 e O_2, respectivamente, secantes em M e N. A reta t é a tangente comum a S_1 e S_2, mais próxima de M. Os pontos A e B são os pontos de tangência de t com S_1 e S_2, respectivamente, C é o ponto diametralmente oposto a B e D é o ponto de interseção da reta O_1O_2 com a reta perpendicular à reta AM que passa por B. Demonstrar que M, D e C são colineares.

Problema 3: Encontrar todas as soluções da equação

$$(x+1)^y - x^z = 1$$

para x, y, z inteiros maiores que 1.

XV OLIMPÍADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
CARACAS − VENEZUELA 16 A 24 DE SETEMBRO.

SEGUNDO DIA

Problema 4: De uma progressão aritmética infinita $1, a_1, a_2, \ldots$ de números reais,
eliminam−se termos, obtendo−se uma progressão geométrica infinita $1, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ de razão q. Determinar os possíveis valores de *q*.

Problema 5: Dois jogadores, alternadamente, retiram pedras de um conjunto de 2000 pedras, de acordo com as seguintes regras:

1. Em cada jogada pode−se retirar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras.
2. Em cada jogada, um jogador não pode retirar o mesmo número de pedras que o seu adversário retirou na jogada anterior.

O jogador que, na sua vez, não puder jogar de maneira válida, perde. Determinar que jogador tem uma estratégia que lhe garanta a vitória e encontrar essa estratégia.

Problema 6: Um hexágono convexo é *bonito* se tem quatro diagonais de comprimento 1 cujos extremos contêm todos os vértices do hexágono.

(a) Para cada número *k* maior que 0 e menor ou igual a 1, encontrar um hexágono bonito de área *k*.
(b) Demonstrar que a área de um hexágono bonito qualquer é menor que $\frac{3}{2}$.