XII OLIMPÍADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA – 1999
SEGUNDA FASE
PRIMEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1:

O triângulo de números abaixo é conhecido como triângulo de Pascal. Descubra os números da última linha do triângulo.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧ ⑧

PROBLEMA 2:

Considere a tabela 3×3 abaixo, onde todas as casas, inicialmente, contém zeros:

0	**0**	**0**
0	**0**	**0**
0	**0**	**0**

Para alterar os números da tabela, é permitida a seguinte operação: escolher uma subtabela 2×2 formada por casas adjacentes, e somar 1 a todos os seus números. Complete o quadro abaixo, sabendo que foi obtido por uma seqüência de operações permitidas:

14		
19	**36**	
	14	

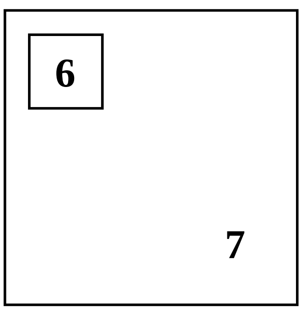
PROBLEMA 3:

Na substração a seguir, *A*, *B* e *C* são algarismos. Quais são os valores de *A*, *B* e *C*?

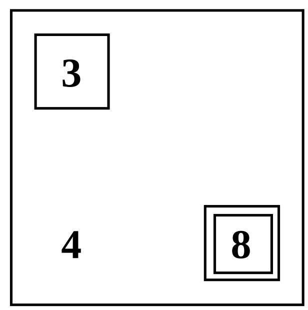
$$\begin{array}{r} 8\ A\ 3\ 1 \\ -\,C\ 4\ 0\ A \\ \hline B\ 1\ C\ 6 \end{array}$$

PROBLEMA 4:

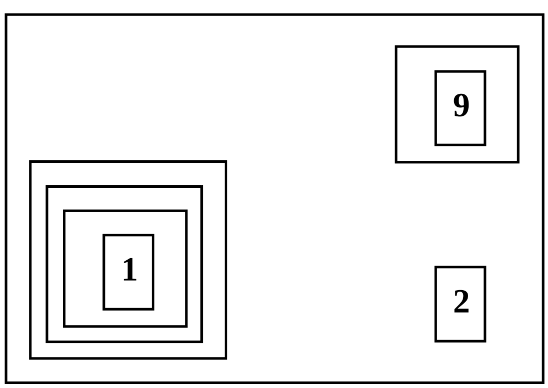
No "país dos quadrados", o povo desenha:



Para representar 67 e



Para representar 4 + 30 + 800 = 834. Que número representa:



?

5

PROBLEMA 5:

Que fração deve ser adicionada à soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ para que a soma resultante seja igual a 2?

XII OLIMPÍADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA − 1999
SEGUNDA FASE
SEGUNDO NÍVEL

PROBLEMA 1:

Sejam *a* e *b* as raízes da equação $x^2+x+1=0.$ Encontre a^3+b^3.

PROBLEMA 2:

Encontre todos os inteiros *a* e *b* tais que $a\,.\,b=a+b$

PROBLEMA 3:

As despesas de um condomínio totalizam R$600,00. Três condomínios, não dispondo de dinheiro para pagar a sua parte, obrigaram os demais a pagar, além de sua parte, um adicional de R$45,00 cada um. Considere x como número de condôminos desse prédio. Pede−se:

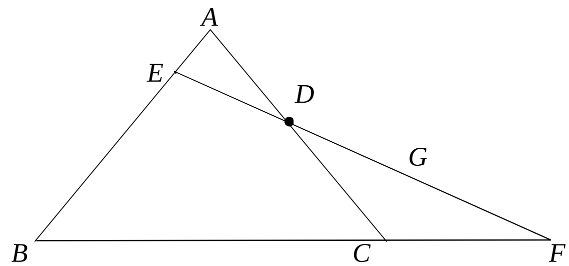
a) A fração algébrica que representa a parte que cada condômino deveria pagar inicialmente.
b) A expressão algébrica que representa o número de condôminos que efetivamente, pagaram o condomínio.
c) A fração algébrica que representa a parte que cada condômino teve que pagar, após a desistência dos três condôminos.
d) Usando as expressões algébricas acima, uma equação para encontrar o número de condôminos desse prédio.

PROBLEMA 4:

Sejam *a*,*b*,*c* números reais positivos. Mostre que $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}\geq 6$

PROBLEMA 5:

Na figura abaixo, $\overline{CG}$ é paralelo a $\overline{AB}$.



Mostre que:

a) $$\frac{\overline{CG}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \text{ e } \frac{\overline{CG}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{FB}}$$

b) $\overline{AE} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{FB} = \overline{AD} \cdot \overline{BE} \cdot \overline{FC}$

(Esse fato é conhecido como Teorema de Menelaus)

XII OLIMPÍADA CAMPINENSE DE MATEMÁTICA – 1999
SEGUNDA FASE
TERCEIRO NÍVEL

PROBLEMA 1:

Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação $a \cdot b \cdot c = a + b + c$.

PROBLEMA 2:

Sejam a e b as raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Encontre $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}$.

PROBLEMA 3:

Sejam a, b, c números positivos, tais que $a + b + c = 1$. Mostre que

$$\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8.$$

PROBLEMA 4:

Considere um cubo. A cada uma das suas arestas se atribui um dos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 (a duas arestas distintas são associados números diferentes). Então, atribui−se a cada vértice a soma dos números das arestas que incidem neste vértice. Mostre que os números das arestas que incidem neste vértice não podem ser todos iguais.

PROBLEMA 5:

Na figura a seguir, *ABCD* é um quadrado de lado 16cm. A circunferência é tangente ao lado *BC* e passa pelos vértices *A* e *D*. Determine o raio da circunferência.