XIV Olimpíada Ibero-americana de Matemática
e XL Olimpíada Internacional de Matemática

Segundo teste de seleção
15 de Maio de 1999

Instruções:

- Não resolva mais de uma questão por folha de almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar. Entregue também o rascunho, pois ele pode ser utilizado a seu favor na correção.
- É proibido o uso de calculadora ou computador. É permitido o uso de régua, esquadro e compasso.
- Tudo o que você escrever deve ser justificado.
- Todas as questões têm o mesmo valor.
- Duração da prova: 4 horas e 30 minutos.

▸ **PROBLEMA 1**

Para cada inteiro positivo n, $\omega(n)$ denota o número de divisores primos positivos de n. Encontre o menor inteiro positivo k tal que

$$2^{\omega(n)} \leq k\sqrt[4]{n}$$

para todo n inteiro positivo.

▸ **PROBLEMA 2**

Em um triângulo ABC a bissetriz do ângulo A intercepta o lado BC no ponto A_1 e o círculo circunscrito no ponto A_2. Os pontos B_1, B_2 e C_1, C_2 são obtidos analogamente. Prove que

$$\frac{A_1A_2}{BA_2 + CA_2} + \frac{B_1B_2}{CB_2 + AB_2} + \frac{C_1C_2}{AC_2 + BC_2} \geq \frac{3}{4}$$

▸ **PROBLEMA 3**

A seqüência a_n é definida por

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ 3 & \text{para } n = 1 \\ 8a_{n-1} + 9a_{n-2} + 16 & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

Determine o menor inteiro positivo h para o qual $a_{n+h} - a_n$ é divisível por $1\,999$ para todo $n \geq 0$.

▸ **PROBLEMA 4**

Mais da metade das faces de um poliedro convexo podem ser pintadas de modo que quaisquer duas faces pintadas não tenham um lado em comum.

(i) Exiba um poliedro com tal propriedade.
(ii) Prove que não é possível inscrever uma esfera num poliedro com esta propriedade.