OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 2000

2ª FASE − 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 1 − 5ª e 6ª Séries

Instruções:
− A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
− Todas as soluções devem ser justificadas.
− Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.
− A Prova tem a duração de 4 horas.
− Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
Dentro de uma caixa fechada, há uma bola branca e uma bola preta. Numa segunda caixa fechada, há duas bolas brancas, e numa terceira caixa fechada, há duas bolas pretas. Cada caixa possui uma etiqueta indicando o conteúdo da caixa, mas alguém misturou as três etiquetas de modo que todas as etiquetas estão erradas. Você seria capaz de escolher apenas uma das seis bolas de modo tal que, olhando sua cor, você possa dizer o conteúdo de cada uma das caixas?

PROBLEMA 2:
Três grandes amigos, cada um deles com algum dinheiro, redistribuem o que possuem da seguinte maneira : Antonio dá a Bernardo e a Carlos dinheiro suficiente para duplicar a quantia que cada um possui. A seguir, Bernardo dá a Antonio e a Carlos o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Finalmente, Carlos faz o mesmo, isto é, dá a Antonio e a Bernardo o suficiente para que cada um duplique a quantia que possui. Se Carlos possuía $R\$36,00$ tanto no início quanto no final da distribuição, qual a quantia total que os três amigos possuem juntos ?

PROBLEMA 3:
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode−se garantir que um dos dois vai perder? Pode−se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 4:
Mostre que os números inteiros de 1 a 16 podem ser dispostos em linha numa certa ordem, sem repetir nenhum, de modo que a soma de dois adjacentes (vizinhos) quaisquer seja um quadrado perfeito (isto é, o quadrado de um inteiro).

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 2000

2ª FASE − 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 2 − 7ª e 8ª Séries

Instruções:
1) ***− A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.***
− Todas as soluções devem ser justificadas.
− Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.
− A Prova tem a duração de 4 horas.
− Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
De quantas maneiras se pode escrever 2000 como a diferença de dois quadrados perfeitos (isto é, quadrados de números inteiros)?

PROBLEMA 2:
Antônio e Paulo disputam um jogo, com as seguintes regras. Dois números naturais são escritos no quadro. Antônio calcula a diferença entre o maior e o menor desses dois números, e escreve o resultado no quadro. Em seguida, Paulo escolhe dois números que que já estejam no quadro e escreve no quadro a diferença entre o maior e o menor, desde que o resultado não repita um número que já esteja no quadro. Em seguida, Paulo e Antônio continuam a agir assim, ora um, ora outro. O jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais número para escrever, e então este jogador é o perdedor. Por exemplo, se os números iniciais forem 5 e 3, Antônio escreve 2, em seguida Paulo só pode escrever 1, e Antônio só pode escrever 4. Paulo então perde, pois não tem mais o que escrever. Agora, os números 57 e 75 estão escritos inicialmente no quadro, e Antônio começa o jogo. Pode−se garantir que um dos dois vai perder? Pode−se prever o número de jogadas em que o jogo vai terminar?

PROBLEMA 3:
1) Mostre que os números inteiros de 1 a 16 podem ser dispostos em linha numa certa ordem, sem repetir nenhum, de modo que a soma de dois adjacentes (vizinhos) quaisquer seja um quadrado perfeito (isto é, o quadrado de um inteiro).
2) Mostre que este procedimento é impossível, se os números estiverem sobre uma circunferência.

PROBLEMA 4:
O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca−se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca−se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.

Mostre que M é o ponto médio de PQ.

OLIMPÍADA DE MATEMÁTICA DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO − 2000

2ª FASE − 23 de Setembro de 2000

NÍVEL 3 − Ensino Médio

Instruções:
− A Prova consta de 4 questões discursivas, todas de igual valor.
− Todas as soluções devem ser justificadas.
− Se você conseguir apenas soluções parciais, não deixe de registrá−las assim mesmo.
− A Prova tem a duração de 4 horas.
− Não é permitido o uso de calculadora.

PROBLEMA 1:
Forme uma sucessão de algarismos do seguinte modo: inicia−se com um número de dois algarismos, multiplicam−se esses dois algarismos, escreve−se à direita este resultado, e em seguida prossegue−se indefinidamente, sempre multiplicando os dois últimos algarismos obtidos. Por exemplo, começando com 67, obtém−se 6742816.... Se agora começarmos com 77, qual será o 2000º algarismo da sucessão?

PROBLEMA 2:
Duas pessoas jogam o seguinte jogo. Inicialmente, há duas pilhas de balas, uma com 21 e outra com 20 balas. O primeiro jogador escolhe uma das duas pilhas, come todas as balas desta pilha, e divide a outra pilha em duas (não necessariamente com o mesmo número de balas). Em seguida, o outro jogador segue o mesmo procedimento com as duas pilhas de balas que restam, e assim sucessivamente. O jogo acaba quando um jogador não consegue mais realizar este procedimento.

1) Existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?
2) Se em vez de 21 e 20, uma pilha contém inicialmente u balas e a outra, v balas, com $u > v > 1$, existe uma estratégia vencedora para o jogador que começa?

PROBLEMA 3:
Determine o único número inteiro N de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições :
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo *n* = 2, 3, 4, ..., 9, o número formado pelos *n* primeiros algarismos de N (da esquerda para a direita) é divisível por *n*.

PROBLEMA 4:

O triângulo ABC é equilátero de lado a. Sobre o lado AB, marca−se o ponto P, tal que $AP = b$ (onde $b < a$), e sobre o prolongamento do lado BC, marca−se o ponto Q (mais próximo de C do que de B) tal que $CQ = b$. O segmento PQ corta o lado AC no ponto M.
1) Mostre que M é o ponto médio de PQ.
2) Calcule a razão entre as áreas dos triângulos APM e MCQ.

SOLUÇÕES DO PRIMEIRO NÍVEL

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:
O conteúdo verdadeiro da caixa em que estiver escrito "duas bolas brancas" é de duas bolas pretas. O conteúdo verdadeiro da caixa em que estiver escrito "duas bolas pretas" é de duas bolas brancas. Na caixa em que estiver escrito "uma branca e uma preta", escolhe−se uma bola ao acaso, e olha−se a cor dela. A cor da restante é a oposta.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:
Como Carlos começou com $R\$36{,}00$ e sua quantia foi duplicada nas duas primeiras vezes, suas quantias, ao longo das transações, foram, sucessivamente: $36{,}00$; 72,00; 144,00 e 36,00 reais. Isto significa que, ao passar da terceira para a última etapa, ele distribuiu aos outros amigos 108,00 e isto foi exatamente o bastante para duplicar as quantias de Antonio e Bernardo. Portanto, 108,00 era a soma do que possuíam Antonio e Bernardo na terceira etapa. Assim, eles possuem, no total: 144,00 + 108,00 = 252,00 reais.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:
Como 75 e 57 são múltiplos de 3, todas as diferenças obtidas serão múltiplas de 3, e têm que ser menores que 75 = 3 x 25. Logo, as diferenças pertencerão ao conjunto dos 24 números A={3 = 1 x 3; 6 = 2 x 3; ...; 72 = 3 x 24}. Como o jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais o que escrever, todas as diferenças possíveis de aparecer serão realmente escritas. Porém 3 é possível de aparecer, pois 75 − 57 = 18; 57 − 18 = 39; 75 − 39 = 36; 39 − 36 = 3. Mas quando 3 for escrito, serão também escritos 75 − 3 = 72; 72 − 3 = 69; ..., isto é, todos os dos conjunto A. Como nenhum pode ser repetido, e lembrando que 57 já estava escrito, serão escritos 23 números, além dos dois iniciais. Como Antônio começa escrevendo o 1º, Antônio escreverá todos os de ordem ímpar, inclusive o 23º. Logo é Paulo que não terá mais o que escrever, e portanto Paulo perde.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:
Os únicos quadrados possíveis de aparecer são 1, 4, 9, 16 e 25. Para o número 16, o único vizinho possível é 9. Para este agora, o único outro vizinho possível é 7. E assim por diante, até obter: 16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 6; 10; 15; 1; 8. Naturalmente, estes números poderiam também estar exatamente na ordem contrária.

SOLUÇÕES DO SEGUNDO NÍVEL

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

Se $2000 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, então $x = a+b$ e $y = a-b$ são divisores de 2000, tais que $xy = 2000$ e $a = \frac{x+y}{2}$ e $b = \frac{x-y}{2}$. Se x e y tivessem paridades diferentes, a e b não seriam inteiros, e se x e y fossem ambos ímpares, seriam impossível que $xy = 2000$. Logo x e y têm que ser ambos pares. As únicas 3 possibilidades então são:

$x = 1000$ e $y = 2$, o que dá: $2000 = 501^2 - 499^2$;

$x = 500$ e $y = 4$, o que dá: $2000 = 252^2 - 248^2$;

$x = 250$ e $y = 8$, o que dá: $2000 = 129^2 - 121^2$;

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

Como 75 e 57 são múltiplos de 3, todas as diferenças obtidas serão múltiplas de 3, e têm que ser menores que 75 = 3 x 25. Logo, as diferenças pertencerão ao conjunto dos 24 números A={3 = 1 x 3; 6 = 2 x 3; ...; 72 = 3 x 24}. Como o jogo só pára quando um dos jogadores não tiver mais o que escrever, todas as diferenças possíveis de aparecer serão realmente escritas. Porém 3 é possível de aparecer, pois 75 − 57 = 18; 57 − 18 = 39; 75 − 39 = 36; 39 − 36 = 3. Mas quando 3 for escrito, serão também escritos 75 − 3 = 72; 72 − 3 = 69; ..., isto é, todos os dos conjunto A. Como nenhum pode ser repetido, e lembrando que 57 já estava escrito, serão escritos 23 números, além dos dois iniciais. Como Antônio começa escrevendo o 1º, Antônio escreverá todos os de ordem ímpar, inclusive o 23º. Logo é Paulo que não terá mais o que escrever, e portanto Paulo perde.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

1) Os únicos quadrados possíveis de aparecer são 1, 4, 9, 16 e 25. Para o número 16, o único vizinho possível é 9. Para este agora, o único outro vizinho possível é 7. E assim por diante, até obter: 16; 9; 7; 2; 14; 11; 5; 4; 12; 13; 6; 10; 15; 1; 8. Naturalmente, estes números poderiam também estar exatamente na ordem contrária.

2) O fato de que o 16 só pode ter 9 como vizinho demonstra que não pode ter dois vizinhos (o mesmo acontece com 8), e portanto é impossível a disposição circular.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

Uma paralela a *AB* por *M* encontra *BC* em *N*, de modo que o triângulo *MNC* é equilátero de lado x, e o triângulo *MNQ* é semelhante ao triângulo *PBQ*. Logo:

$\frac{MN}{PB}=\frac{QN}{QB}$, isto é: $\frac{x}{a-b}=\frac{x+b}{a+b}$, donde se conclui que $x=\frac{a-b}{2}$. Portanto, *M* é médio de *PQ*.

SOLUÇÕES DO TERCEIRO NÍVEL

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 1:

A sucessão inicia por: 774936188642483261224... O reaparecimento do grupo 24 faz com que, após os 11 primeiros termos 77493618864, o ciclo 24832612, de comprimento 8, vá repetir−se indefinidamente. Como 2000−11 = 1989 = 8 x 248 + 5, segue−se que o 2000º algarismo vai ser o 5º do ciclo, isto é: 2.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 2:

1) O primeiro jogador (J1) come a pilha de 21 balas e reparte a de 20 em duas pilhas de modo que cada uma contenha um número ímpar de balas; por exemplo, 1 e 19. O segundo jogador (J2) é forçado a comer a de 1 (pois esta ele não poderá repartir), e repartir a outra em duas pilhas de forma que uma contenha um número ímpar *i* de balas e a outra, um número par *p* de balas. J1 come a pilha com i balas e reparte a outra novamente em duas com número ímpar de balas, por exemplo, 1 e $p-1$. O processo repete−se de modo que J1 oferece sempre a J2 duas pilhas com número ímpar de balas. J2 come uma e é obrigado a repartir a restante em pilhas com paridades diferentes em seu número de balas. Após um número finito de passos, necessariamente J2 se verá em frente à situação em que cada uma das duas pilhas contém 1 bala, e perde.

2) O raciocínio acima mostra que se pelo menos um dos dois números *u* e *v* for par, J1 tem uma estratégia vencedora análoga à descrita acima. Porém se ambos forem ímpares, já que são maiores que 1, qualquer que seja a primeira jogada de J1, ele terá que deixar uma pilha par e outra ímpar para J2, e então será este que poderá aplicar a mesma estratégia vencedora.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 3:

Seja $N=abcdefghi$, onde as letras de a até i representam os algarismos de 1 a 9. Se $abcde$ é um número de 5 algarismos e como $5\,|\,abcde$ concluímos que $e=5$. Observemos ainda que *b*, *d*, *f* e *h* são todos pares logo, *a*, *c*, *g*, e *i* são ímpares. Como $abcd$ e $abcdefgh$ são divisíveis por 4 e seus algarismos das dezenas são ímpares, concluímos que *d* e *h* são 2 e 6 (em alguma ordem) enquanto que *b* e *f* são 4 e 8 (em alguma ordem). Além disso, $3\,|\,a+b+c$, $3\,|\,a+b+c+d+e+f$ e $3\,|\,a+b+c+d+e+f+g+h+i=45$ daí, $3\,|\,d+e+f$ e $3\,|\,g+h+i$, logo concluímos que def é 258 ou 654. Uma vez que $8\,|\,fgh$ e *f* é par, concluímos que $8\,|\,gh$. Com estas restrições eliminamos todos os números de 9 algarismos exceto 147258963, 183654729, 189654327, 381654729, 741258963, 789654321 e 987654321**.** Entretanto, somente **381654729** possui a propriedade dos sete primeiros algarismos formarem um número divisível por 7.

SOLUÇÃO DO PROBLEMA 4:

1) Uma paralela a *AB* por *M* encontra *BC* em *N*, de modo que o triângulo *MNC* é equilátero de lado *x*, e o triângulo *MNQ* é semelhante ao triângulo *PBQ*. Logo: $\frac{MN}{PB}=\frac{QN}{QB}$, isto é: $\frac{x}{a-b}=\frac{x+b}{a+b}$, donde se conclui que $x=\frac{a-b}{2}$. Portanto, *M* é médio de *PQ*.

A área de *APM* é $\frac{b}{2}$ vezes a distância *y* de *M* a *AP*, enquanto a área de *MCQ* é $\frac{b}{2}$ vezes a distância *z* de *M* a *CQ*. Logo, a razão entre as áreas de *APM* e *MCQ* é a razão $\frac{y}{z}$. Porém *z*, como altura do triângulo equilátero *MNC*, também é a distância de *C* a *MN*. Então, a semelhança entre os triângulos *ABC* e *MNC* fornece: $\frac{y+z}{z}=\frac{a}{x}=\frac{a}{(a-b)/2}$. Portanto: $\frac{y}{z}+1=\frac{2a}{a-b}$. Donde: $\frac{y}{z}=\frac{a+b}{a-b}$.