XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase − Nível 1

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Corte 10 algarismos do número 1234512345123451234512345, para que o número restante seja o maior possível.

PROBLEMA 2

Sabe−se que três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem cada um exatamente quatro domingos.

a) Estes meses podem ser janeiro, fevereiro e março?

b) Podem ser agosto, setembro e outubro?

PROBLEMA 3

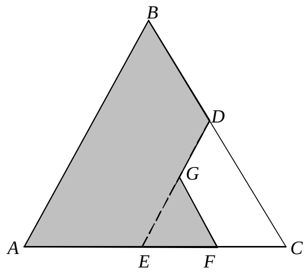
Na figura, os triângulos *ABC* e *EGF* são equiláteros. O perímetro do triângulo *ABC* é 132cm e, além disso,

$AE = EC$

$BD = DC$

$EF = FC$

$DG = GE$



a) Qual o perímetro da área sombreada?

b) Que fração da área do triângulo *ABC* representa a área sombreada?

PROBLEMA 4

Pedro distribuiu 127 moedas de 1 real em sete caixas e colocou em cada uma delas uma etiqueta dizendo o número de moedas da caixa. Essa distribuição foi feita de forma que qualquer quantia de R$1,00 a R$127,00 pudesse ser paga entregando−se apenas caixas fechadas. De que maneira Pedro fez essa distribuição?

PROBLEMA 5

Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo−se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores:

O elevador *A* pára em todos os andares.

O elevador *B* pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, ?

O elevador *C* pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, ?

O elevador *D* pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, ?

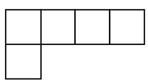
O elevador *E* pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, ?

a) Mostre que, excetuando−se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.

b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.

PROBLEMA 6

Encontre o menor tabuleiro quadrado que pode ser ladrilhado usando peças com o seguinte formato:



Obs: Ladrilhado significa completamente coberto, sem superposição de peças, e de modo que nenhum ponto fora do tabuleiro seja coberto por alguma peça.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE – NÍVEL 1

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

O maior número restante é 553451234512345. Para ver isto, podemos supor que os cortes são feitos da esquerda para a direita. Se deixarmos de cortar todos os quatro primeiros algarismos, o número que resta começará por 1, 2, 3 ou 4. Logo, menor que o número acima. Feito isto, se deixarmos de cortar a segunda seqüência 1234, o número que resta terá na primeira ou segunda casa, da esquerda para a direita, 1, 2, 3 ou 4. Ainda menor que o número acima. Os dois primeiros 5 devem permanecer, pois retirando−se um deles, completamos 9 retiradas e aí algum algarismo da terceira seqüência 1234 aparecerá na 1^a ou na 2^a casa. Finalmente devemos cortar a seqüência 12, que ocupa a 11^a e 12^a posição.

SOLUÇÃO PROBLEMA 2

Se o dia primeiro de janeiro for Segunda−feira, e o ano não for bissexto, então os meses de janeiro, fevereiro e março terão 4 domingos cada.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3 (Solução resumida)

a) $Perímetro = 2 \cdot (44) + 3 \cdot = 121$.

b) $S' = \frac{3}{4} S + \frac{1}{4} . \frac{1}{4} S = \frac{13}{16} S$

SOLUÇÃO PROBLEMA 4

Basta distribuir as moedas em 7 caixas contendo respectivamente 1, 2, 4, 8, 16, 32 e 64 moedas. Para outros pagamentos Pedro pode fazer 3 = 1 + 2, 5 = 1 + 4, 6 = 2 + 4, 7 = 1 + 2 + 4. Assim já pode pagar as quantias de 1 a 7 reais com o conteúdo das caixas. Somando−se a parcela de 8 a estas somas chega−se nas somas de 9 até 15. Somando−se a parcela de 16 às 15 somas assim formadas obtém−se somas de 17 a 31. A estas acrescenta−se a parcela de 32. E finalmente a parcela de 64, obtendo−se assim todas as somas de 1 a 127 = 1+ 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

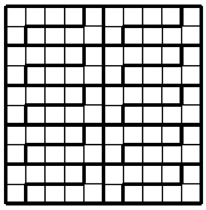
a) O elevador *B* pára nos múltiplos de 5.
O elevador *C* pára nos múltiplos de 7.
O elevador *D* pára nos múltiplos de 17.
O elevador *E* pára nos múltiplos de 23.

Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.

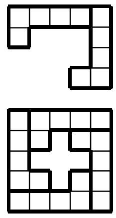
b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar *A*, que pára em todos, e três dos restantes.
B, *C* e *D* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, *C* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, *D* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, *D* e *E* param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

O menor tabuleiro é do tipo 10×10 coberto com 20 peças, como mostrado, por exemplo, pela figura abaixo, à esquerda.



Com efeito, o número de casas do tabuleiro é um quadrado perfeito múltiplo de 5. Logo é 25, 100, 225 ou ... etc. Mas um tabuleiro 5×5 não pode ser coberto com peças deste tipo, pois ao tentarmos completar uma lateral do tabuleiro, seremos conduzidos a uma das duas figuras à direita, as quais não se deixam completar pelas peças para formar todo o tabuleiro.



XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase – Nível 2

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Três meses consecutivos de um determinado ano, não bissexto, possuem exatamente quatro domingos cada um. Prove que um destes meses é fevereiro.

PROBLEMA 2

Num quadro−negro são escritos três inteiros. Começa−se, então, uma sequência de movimentos onde, em cada passo, apaga−se um deles e escreve−se em seu lugar a soma dos outros dois diminuída de uma unidade. Após vários movimentos, estão escritos no quadro os números 17, 75 e 91. É possível que no início estejam escritos no quadro :

a) 2, 2, 2 ?
b) 3, 3, 3 ?

PROBLEMA 3

Seja *ABCD* um quadrado. Escolhemos pontos *M*, *N*, *P*, *Q* respectivamente sobre *AB*, *BC*, *CD* e *DA*, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos *MBN* e *PDQ* sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq AC$.

PROBLEMA 4

Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de $(3, 6, 9, 12)$ (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 5

Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D}$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

PROBLEMA 6

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo
9×10 usando peças $1 \times n$.

SOLUÇÕES SEGUNDA FASE – NÍVEL 2

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Se nenhum destes meses for fevereiro, o número total de dias não pode ser menor que
91 = 7. 13 e portanto o número total de Domingos não poderia ser menor do que 13.

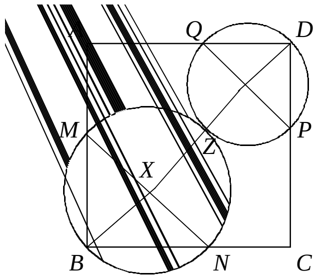
SOLUÇÃO PROBLEMA 2

a) Estão escritos inicialmente 3 números pares. Quando um deles é apagado, é escrito em seu lugar um número ímpar. Após o 1º movimento ficam então dois números pares e um número ímpar. Se apagarmos agora o número ímpar, surgirá em seu lugar outro númro ímpar e se apagarmos um número par aparecerá em seu lugar outro número par. Deste modo, após qualquer número de movimentos restarão dois números pares e um número ímpar e portanto, não é possível termos no final os três números ímpares 17, 75 e 91.

b) Sim, uma possível sequência de movimentos é : 3, 3, 3 $\to$ 5, 3, 3 $\to$ 5, 3, 7 $\to$ 5, 11, 7 $\to$ 17, 11, 7 $\to$ 17 , 11, 27 $\to$ 17, 43, 27 $\to$ 17, 43, 59 $\to$17, 75, 59 $\to$ 17, 75, 91.

SOLUÇÃO PROBLEMA 3

A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90°$, segue que BX = MX = NX = XZ e DY = QY = YP = YZ. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = \sqrt{2}$.



SOLUÇÃO PROBLEMA 4

Temos $3^a 6^b 9^c 12^d$ Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $3^a 6^b 9^c 12^d$ Note que b + 2d é máximo (com b e d elementos distintos de {3, 6, 9, 12}) quando d = 12 e b = 9. Neste caso, b + 2d = 33, e a + b + 2c + d = 21 + a + 2c. Tomando a = 6 e c = 3, temos também a + b + 2c + d = 33, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para (a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12).

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

Como os denominadores das frações são primos entre si, seu MMC é BD e assim, a fração resultante é $\dfrac{AD+CB}{BD}$. Suponhamos que esta fração não seja irredutível isto é, que exista algum número primo p que divida o numerador e o denominador desta fração. Como o produto BD é divisível por p, um dos seus termos, digamos B sem perda de generalidade o seja. Entretanto, uma das parcelas da soma AD + CB é divisível por p e como a soma, por hipótese, é divisível por p a parcela AD é também divisível por p. Portanto A ou D é divisível por p. No primeiro caso temos uma contradição com o fato da fração $\frac{A}{B}$ ser irredutível, no outro casos a contradição está no fato de que os denominadores das frações iniciais sempre são primos entre si.

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora $n = 6$, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

XXI OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
Segunda Fase − Nível 3

Instruções:

- **A duração da prova é de 4 horas e 30 minutos.**
- **Cada problema vale 10 pontos.**
- **Não é permitido o uso de calculadoras nem consultas a notas ou livros.**
- **Você pode solicitar papel para rascunho.**
- **Todas as suas soluções devem ser justificadas.**

PROBLEMA 1

Nos extremos de um diâmetro de um círculo, escreve−se o número 1 (primeiro passo) . A seguir, cada semicírculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios escreve−se a soma dos números que estão nos extremos do semicírculo (segundo passo) . A seguir, cada quarto de círculo é dividido ao meio e em cada um dos seus pontos médios coloca−se a soma dos números que estão nos extremos de cada arco (terceiro passo). Procede−se, assim, sucessivamente: sempre cada arco é dividido ao meio e em seu ponto médio é escrita a soma dos números que estão em seus extremos.
Determinar a soma de todos os números escritos após 1999 passos.

PROBLEMA 2

Seja $ABCD$ um quadrado. Escolhemos pontos M, N, P, Q respectivamente sobre AB, BC, CD e DA, de modo que as circunferências circunscritas aos triângulos MBN e PDQ sejam tangentes exteriormente. Mostre que $MN + PQ \geq \sqrt{2}$

PROBLEMA 3

Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, $\{a, b, c, d\} = \{3, 6, 9, 12\}$) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

PROBLEMA 4

Determine todos os inteiros positivos n para os quais é possível montarmos um retângulo 9×10 usando peças $1 \times n$.

PROBLEMA 5

José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

PROBLEMA 6

Encontre as soluções inteiras de $\sqrt[n]{3^a6^b9^c12^d}$.

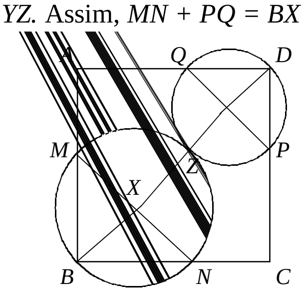
SOLUÇÕES SEGUNDA FASE – NÍVEL 3

SOLUÇÃO PROBLEMA 1

Seja $S(n)$ a soma dos termos em cada passo em um dos semicírculos. Observemos que $S(1) = 2$, $S(2) = 4$, e $S(3) = 10$. Deste modo, nos parece razoável conjecturar que $S(n) = 3^{n-1} + 1$. Claramente, $S(1) = 3^{1-1} + 1$. Os novos termos adicionados para formar L_{n+1} representam somas de dois termos consecutivos de L_n e cada termo de L_n, excetuando-se o primeiro e o último, aparece em exatamente duas destas somas. Daí, $S(n+1) = S(n) + 2(S(n) - 1) = 3S(n) - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3^{(n+1)-1} + 1$. Levando em consideração o outro semicírculo, temos que a soma após os 1999 passos é igual a $2.(3^{1999-1} + 1) - 2 = 2.\ 3^{1998}$

SOLUÇÃO PROBLEMA 2

A figura abaixo representa a situação, onde X e Y são os pontos médios dos segmentos MN e PQ e Z é o ponto de tangência das circunferências. Então, como $\angle MBN = \angle PDQ = 90°$, segue que $BX = MX = NX = XZ$ e $DY = QY = YP = YZ$. Assim, $MN + PQ = BX + XZ + ZY + YD \geq BD = \sqrt{2}$.



SOLUÇÃO PROBLEMA 3

Temos $3^a6^b9^c12^d$ Para (a, b, c, d) dados, o maior n possível é $3^a6^b9^c12^d$ Note que $b + 2d$ é máximo (com b e d elementos distintos de {3, 6, 9, 12}) quando $d = 12$ e $b = 9$. Neste caso, $b + 2d = 33$, e $a + b + 2c + d = 21 + a + 2c$. Tomando $a = 6$ e $c = 3$, temos também $a + b + 2c + d = 33$, que é obviamente o maior valor possível para n, obtido para $(a, b, c, d) = (6, 9, 3, 12)$.

SOLUÇÃO PROBLEMA 4

É claro que n deve ser no máximo 10 e dividir 90. Assim, restam para n as possibilidades 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10. Fora $n = 6$, é imediato que n pode assumir qualquer um dos outros valores acima. Começando a tentar montar o retângulo com peças 1×6 a partir de um canto, concluímos prontamente que a tarefa não é possível.

SOLUÇÃO PROBLEMA 5

Sejam m_n , a_n e c_n as probabilidades de que no dia n ele use óculos magenta, amarelo e ciano, respectivamente. Temos $m_1 = 1$, $a_1 = c_1 = 0$ e

$(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$, $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$, e $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$

Como $a_n + c_n + m_n = 1$, temos $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$ Assim, $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$, e em 31 de agosto a probabilidade de que ele volte a usar o magenta é $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$

SOLUÇÃO PROBLEMA 6

Temos $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$. Suponhamos $x > y$.
Assim, os possíveis valores de $a = x - y$ são 1, 3, 9, 27, 37, $3 \cdot 37$, $9 \cdot 37$, $27 \cdot 37$ e cada valor permite fazer $y = x - a$ e precisamos apenas verificar se as raízes de $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$ são inteiras.
Na verdade, alguns destes valores são obviamente inapropriados: $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$, donde os valores 1 e 37 podem ser descartados. Por outro lado, se $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$ temos $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$ donde podemos descartar $a \geq 27$. Os dois valores restantes, 3 e 9, são de fato possíveis e dão as quatro soluções: $(a,b,c,d) = (6,3,12,9)$