

2ª Fase da Olimpíada Regional de Matemática Santa Catarina - 1999 - Nível 3

Instruções:

- Resolva uma questão por folha de papel almaço. Escreva seu nome em cada folha que usar.
 - É proibido o uso de calculadora, computador ou régua de cálculo. É permitido o uso de régua, esquadro ou compasso.
 - **Tudo que você escrever deve ser justificado.** Se você vier a perceber generalização em qualquer questão, não deixe de mencioná-la na folha correspondente.
 - Todas as questões têm o mesmo valor.
 - Entregue também as suas folhas de rascunho.
 - Duração da prova: **4 horas**.
-

1. Temos 1999 peças no formato da figura abaixo (Fig.1) e desejamos fazer o maior quadrado possível, sem buracos ou superposições. Quantas peças sobram? Justifique por que o seu quadrado é o maior possível.

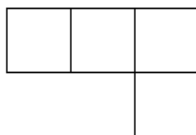


Fig.1

2. Prove que para todo $n > 3$ implica que $2^n < n!$, com $n \in \mathbb{N}$.

3. Uma parábola é uma curva que é o lugar geométrico dos pontos cuja distância a uma reta dada, chamada diretriz da parábola, é igual à distância a um ponto dado fora da reta, chamado foco da parábola (Fig.2). Sejam F o foco, P um ponto da parábola e Q o pé da perpendicular à diretriz por P . Mostre que a mediatriz de QF passa por um único ponto da parábola de tal modo que esta curva fica toda contida num único semiplano determinado pela mediatriz.

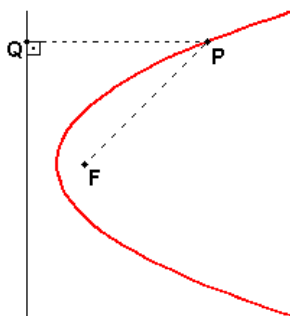


Fig.2

4. Em um retângulo ABCD estão inscritas duas circunferências (de raio não necessariamente iguais) tangentes entre si, tais que uma delas é ainda tangente aos lados AB e AD, e a outra é tangente aos lados BC e CD do retângulo (Fig.3).
- Mostre que o ponto de tangência das duas circunferências está sobre a diagonal AC do retângulo.
 - Qual deve ser a relação entre os lados do retângulo de modo a existir sempre um par de circunferências satisfazendo as condições acima?

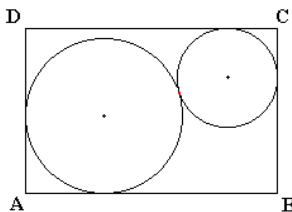


Fig.3

5. Mostre que um número diferente de 1 e formado apenas por algarismos 1 não pode ser um quadrado perfeito.