19 Olimpíada Brasileira de Matemática Júnior
Segunda Fase

Problema 1

No edificio mais alto de *Terra Brasilis* moram *Eduardo* e *Augusto*. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de *Augusto*. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de *Eduardo* sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo, de 13 a 24, e assim por diante).

Solução

Seja a o andar do apartamento de Eduardo. Então o número de seu apartamento é $12\,(a - 1) + b$, com $1 \leq b \leq 12$. Daí,

$a + 12\,(a - 1) + b = 2164,$
$b = 2176 - 13a$
$1 \leq 2176 - 13a \leq 12$
$a = 167,\ b = 5$

Portanto, o número do apartamento de *Eduardo* é:
$12\,(a - 1) + b = 12 \times 166 + 5 = 1997.$

Problema 2

A professora de Matemática propôs o seguinte problema para seus alunos:

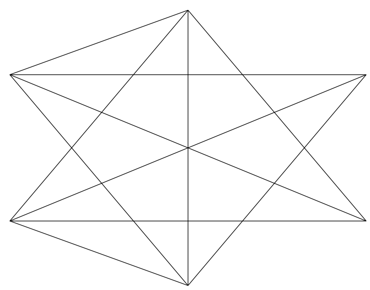
"Marquem 6 pontos sobre uma circunferência. Eu quero que vocês pintem o maior número de cordas determinadas por estes pontos, de modo que não existam quatro dos pontos sobre a circunferência determinado um quadrilátero com todos os lados e diagonais coloridos."

a) *Edmilson* encontrou uma solução correta colorindo 12 cordas. Exiba uma maneira de como fazer isto.

b) *Gustavo* Afirmou ter encontrado uma solução na qual pintara 13 cordas. Mostre que a solução de *Gustavo* não está correta.

Solução

a) Uma maneira é mostrada abaixo:



b) Suponha que a solução de *Gustavo* está correta. Sejam *A, B, C, D, E, F* os pontos. Então como os 6 pontos determinan 15 cordas, somente dois segmentos não foram coloridos. Estes dois segmentos incidem em 3 ou 4 vértices.

i.) Se *A* é vértice comum de dois segmentos não coloridos, *AB* e *AF*. Neste caso existem 6 quadriléteros totalmente coloridos: *ACDE*, *BCDE*, *BCDF*, *BCEF*, *BDEF* e *CDEF*.

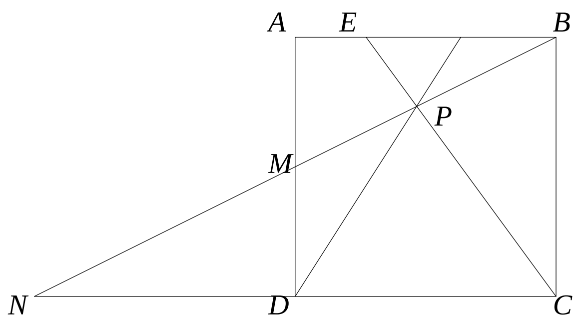
ii.) Se os segmentos *AB* e *EF* não foram coloridos. Neste caso existem 4 quadriláteros coloridos: *CDAE*, *CDAF*, *CDBE*, *CDBF*.

Problema 3

Sejam *ABCD* um quadrado, *M* o ponto médio de *AD* e *E* um ponto sobre o lado *AB*. *P* é a interseção de *EC* e *MB*. Mostre que a reta *DP* divide o segmento *EB* em dois segmentos de mesma medida.

Solução

Prolonge*BM* até encontrar o prolongamento do lado *CD* no ponto *N*. Claramente, $\Delta AMB \equiv \Delta DMN,$ donde segue que $AB = DN$. Portanto, *D* é o ponto médio de *CN*. O resultado segue observando que os triângulos *CPN* e *EPB* são semelhantes, e como *PD* é mediana do triângulo *CPN*, conclui−se que o prolongamento de *DP* encontra *EB* em seu ponto médio.



Problema 4

Mostre que existem infinitos inteiros positivos *n* satisfazendo simultáneamente as seguintes condições:

i. *n* é ímpar;

ii. *n* possui exatamente 1200 divisores positivos;

iii. existem exatamente 1997 triângulos retângulos, dois a dois não congruentes, de lados inteiros e *n* como medida de um dos catetos.

Solução

Seja n um número natural ímpar. Vamos calcular o número de triângulos retângulos de lados inteiros nos quais n é medida de um dos catetos. Para isso, devemos ter

$$n^2 + x^2 = y^2,$$
$$n^2 = (y - x)(y + x),$$

com x e y inteiros positivos, $x < y$. Observe que $(y - x) < (y + x)$. Se fizermos $(y - x) = d$, com d um divisor de n^2, d será menor que n e $(y + x) = n^2/d$ será maior que n. Para qualquer d satisfazendo estas condições, podemos encontrar uma solução:

$$\begin{cases} y - x = d \\ y + x = \dfrac{n2}{d} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} - d\right) \\ \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n^2}{d} + d\right) \end{cases}$$

Estas soluções são inteiras e positivas, pois *ni é ímpar (e então* d*), e* d < n.Portanto, o número de triângulos retângulos é o número de divisores de n^2 menor que n. Mas para cada divisor de n^2 menor que n, corresponde um divisor maior que n. Lembrando que o n é também um divisor, concluímos que o número procurado é $1/2\ (d(n^2) - 1)$, onde $d(n)$ o número de divisores positivos de n. Portanto, é necessário e suficiente que n^2 seja um número ímpar com $d(n^2) = 2 \times 1997 + 1 = 3995$ divisores.
Uma das várias possibilidades para n^2 ter 3995 divisores é ser da forma p^4q^{798}, com pe q primos distintos. Neste caso, $n = p^2q^{399}$, possui $d(n) = (2 +1) \times (399 +1) = 1200$ divisores.

Problema 5

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Temos n lâmpadas alinhadas e numeradas, da esquerda para a direita, de 1 a n. Cada lâmpada pode estar acesa ou apagada. A cada segundo, determina−se a lâmpada apagada de maior número e inverte−se o estado desta (de acesa para apagada ou de apagada para acesa) e das lâmpadas posteriores (as lâmpadas de maior número).

a) Mostre que em algum momento todas as lâmpadas estarão acesas (e o processo se encerrará).

b) Suponha que inicialmente todas as lâmpadas estejam apagadas. Determine depois de quantos segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

c) Suponha agora $n = 11$ e que no início somente as lâmpadas de números 6, 7 e 10 estejam acesas. Mostre que após exatamente 1997 segundos todas as lâmpadas estarão acesas.

Solução

Vamos representar por 1 uma lámpada acesa e por 0 uma lâmpada apagada e interpretar o número obtido na base 2.

Veja que se, em algum passo, o último dígito for 0, ele será o único dígito alterado no próximo passo. Isto significa que o número aumentará 1 unidade.
Caso contrário, o número terminará com um bloco de 1's antecipado por um 0:0111. No próximo passo, o número será 1000. Mas observe que (0111) + 1 = 1000. Portanto, em qualquer caso, o número k é sucedido pelo número $k + 1$.

a) Dada qualquer disposição inicial das lãmpadas, ou seja, qualquer número binário de no máximo n dígitos, em algum momento, todos os dígitos serão iguais a 1, pois este é o maior número de n dígitos na base 2.
b) Existem 2^n números de no máximo n dígitos na base 2. Começando com 0, devemos chegar a 2^{n-1}, passando por todos os naturais intermediários. São necessários, então, 2^{n-1} segundos.
c) Observe que a configuração inicial representa o número $2^5 + 2^4 + 2 =$ 50. Para $n = 11$, todas as lâmpadas estarão acesas depois de (211−1) −50 = 1997 segundos.

Premiados de 19 Olimpíada Brasileira de Matemática Júnior

Mila Lopes Viana	Ouro	São Paulo
Fabricio Siqueira Benevides	Prata	Fortaleza
Gilberto Santos do Nascimento	Prata	São Paulo
Jônathas Diógenes Castello Branco	Prata	Fortaleza
Pedro Paulo de Simoni Gouveia	Prata	Fortaleza
Fábio Dias Moreira	Bronze	RJ
Mark Minowa	Bronze	São Paulo
Renato Takamatsu	Bronze	São Paulo
Rogério Ulhmann Yamauti	Bronze	São Paulo
Ulisses Medeiros de Albuquerque	Bronze	Fortaleza
Fabiano Ferreira de Carvalho	M. Honra	Fortaleza
Maurício Masayuki Honda	M. Honra	São Paulo
Rute Nogueira Pinto	M. Honra	Fortaleza
Sílvia Nolf Ferreira Brandão	M. Honra	S.J.dos C.

Premiados de 19 Olimpíada Brasileira de Matemática Sênior

Fabricio Shigueru Catae	Ouro	São Paulo
Emanuel Augusto de Souza Carneiro	Ouro	Fortaleza
André Arroyo Ruiz	Ouro	São Paulo
Murali Srivasan Vajapeyam	Prata	Campina Grande

Rui Lopes Viana Filho	Prata	São Paulo
Fernando Paz Cardoso	Prata	São Paulo
Andressa de Mello	Prata	São Paulo
Marcelo Cruz de Souza	Prata	Fortaleza
Mauricio Pereira Carrari	Bronze	São Paulo
André Luiz Ferreira	Bronze	RJ
Fernando Castro de Mesquita	Bronze	Fortaleza
Daniel Yasumasa Takahashi	Bronze	São Paulo
Frederico Vale Girão	Bronze	Fortaleza
Arnaldo Sartoru Gunzi	Bronze	São Paulo
Glauf Sidney Duarte Moreira Jr.	Bronze	Fortaleza
Francisco Aníbal Costa Sousa	Bronze	Fortaleza
Christian Ivenson	Bronze	São Paulo
Felipe Siquieira de S. da Rosa	Bronze	RJ.
Éder Carlos Pereira Neves	Bronze	Fortaleza
Bruno Germano Borics	M.Honra	RJ
Tony Calleri França	M.Honra	Fortaleza
Marcio Pereira Machado	M.Honra	Vila Velha
Gustavo Barbi Vieira	M.Honra	RJ
Sergio Alvarez Araujo Correia	M.Honra	Fortaleza
Fred Olavo Aragão Andrade Carneiro	M.Honra	Fortaleza
Carlos Alexandre Rolim Fernandes	M.Honra	Fortaleza
Danielle Véras de Andrade	M.Honra	Fortaleza
Ednei Aparecido Santulo Júnior	Destaque Regional	Rio Claro
Tertuliano Franco Santos Franco	Destaque Regional	Salvador
Carlos Henrique Grossi Ferreira	Destaque Regional	B.H.
Luiz Joaquim Fonseca Marinho Filho	Destaque Regional	Terezina

Premiados Olimpíada de Maio

1 Nível	**Pontos**	
Fabio Dias Moreira	33	Rio de Janeiro

Marcelo Sabbag Bahia	29	Rio de Janeiro
Rafael Nogueira Macedo	27	Fortaleza
Ricardo de Castro Palácio	21	Fortaleza
Rafel de Holanda Barroso	21	Fortaleza
José Henrique Alcântara	21	Fortaleza
Luciana C. Lima	18	Fortaleza
Guillerme Lima de Carvalho	18	Rio de Janeiro
Carlos Jourdan Gadelha Vieira	18	Rio de Janeiro
Guilhermo Danilo Montoya	17	Rio de Janeiro

2 Nível

Jônathas Diógenes Castello Branco	41	Fortaleza
Renata Arruda Barros	30	Rio de Janeiro
Braz Dias	30	Rio de Janeiro
Pedor Paulo de Simoni Gouveia	26	Fortaleza
Danielli Oliveira da Costa Lino	24	Fortaleza
Larice Carneiro Linhares	22	Fortaleza
Fabricio Siqueira Benevides	20	Fortaleza
Nicola Tutungi Júnior	18	Niteroi
Afonso de Paula Pinheiro Rocha	17	Fortaleza
Danilo C. B. Almeida Bessa	16	São Paulo

19 Olimpíada Brasileira de Matemática Sênior
Segunda Fase

Problema 1

Duas Circunsferências de raios R e r e centros O e O', respectivamente, interceptam−se nos pontos P e P'. Seja l a reta que passa por P e P'. Determine em função de R e r, o menor valor que pode assumir a soma das distâncias de l a O e O'.

Problema 2

Dizemos que um conjunto $A \subset N$ satisfaz a propriedade *P(n)* se A tem n elementos e $A + A = \{x + y$ tal que $x \in A$ e $y \in A\}$ tem $\frac{n(n+1)}{2}$ elementos. Dado $A \subset N$ finito definimos diâmetro de A como sendo a diferenç entre o maior e o menor elemento de A. Seja *f(n)* o menor diâmetro que o conjunto A satisfazendo *P(n)* pode ter. Mostre que $\frac{n^2}{4} \leq f(n) < n^3$ para todo $n \geq 2$.

(Se o seu tempo de prova não estiver esgotado, tente melhorar esta estimativa. Por exemplo, tente mostrar que $f(p) < 2p^2$, para todo número primo p.)

Problema 3

a) Prove que não existem funções $f : R \to R$ e $g : R \to R$ satisfazendo $g(f(x)) = x^3$ e $f(g(x)) = x^2$ para todo $x \in R$.

b) Exiba funções $f :]1; \infty[\to]1; \infty[$ e $g :]1; \infty[\to]1; \infty[$ tais que $g(f(x)) = x^3$ e $f(g(x)) = x^2$, para todo $x \in]1; \infty[$.

Problema 4

Seja F_n definido por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+2} + F_n$, para todo $n \geq 1$. Seja $Vn = \sqrt{F_n^2 + F_{n+2}^2}, n \geq 1.$ Mostre que, para todo n inteiro positivo, V_n ,

V_{n+1} e V_{n+2} são lados de um triângulo de área 1/2.

Problema 5

Sejam $c \in Q$, $f(x) = x^2 + c$. Definimos $f^0(x) = x$, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $n \in N$. Dizemos que $x \in R$ é pré−periódico se $\{ f^n(x)$ tal que $n \in N \}$ é finito. Mostre que $\{ x \in Q$ tal que x é pré−periódico $\}$ é finito.

Problema 6

Seja f uma função do plano no plano que satisfaz $d(P,Q) = 1 \Rightarrow d(f(P), f(Q)) = 1$ para todos os pontos P e Q do plano. Mostre que $d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$ para todos os pontos P e Q do plano.

($d(X,Y)$ denota a distância entre X e Y).