Coordenadas para o icosaedro

Nicolau C. Saldanha

O leitor certamente sabe que existem cinco poliedros regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. O leitor provavelmente também sabe dar coordenadas para os vértices dos três primeiros destes sólidos: para o cubo tomamos todos os oito vértices da forma $(\pm1, \pm1, \pm1)$, para o tetraedro tomamos dentre estes apenas os quatro para os quais o produto das coordenadas é 1 e, finalmente, para o octaedro tomamos os vértices $(\pm1, 0, 0)$, $(0, \pm1, 0)$, $(0, 0, \pm1)$. O objetivo deste artigo é preencher a lacuna óbvia mostrando como dar coordenadas para os dois sólidos restantes. Vamos começar pelo icosaedro.

A idéia mais natural provavelmente é a de construir um icosaedro na posição em que ele é mais freqüentemente representado: pendurado por um dos vértices (figura 1). Os doze vértices assim seriam:

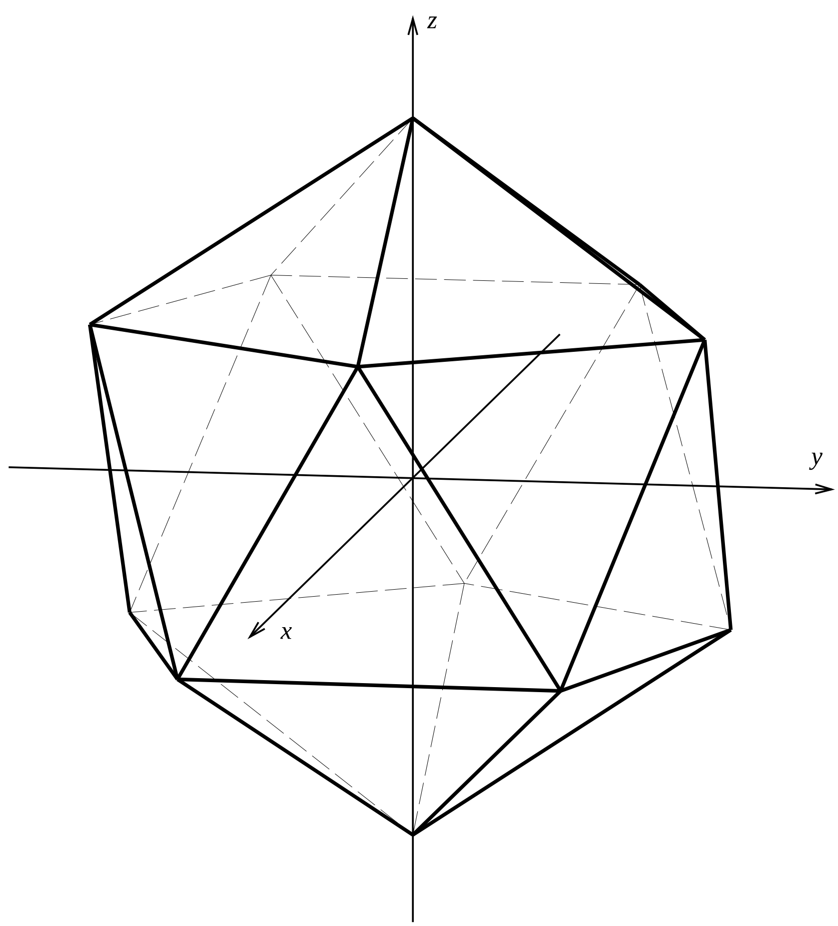

Figura 1

$(0, 0, 1)$ para o vértice de cima;

$(a, 0, b)$,
$(a \cos \frac{2\pi}{5}, a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}, b)$,
$(a \cos \frac{4\pi}{5}, a \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}, b)$,
$(a \cos \frac{6\pi}{5}, a \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}, b)$ e
$(a \cos \frac{8\pi}{5}, a \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}, b)$ para seus cinco vizinhos imediatos, que formam um pentágono;
$(-a, 0, -b)$,
$(-a \cos \frac{2\pi}{5}, -a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}, -b)$,
$(-a \cos \frac{4\pi}{5}, -a \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}, -b)$,
$(-a \cos \frac{6\pi}{5}, -a \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}, -b)$ e
$(-a \cos \frac{8\pi}{5}, -a \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}, -b)$ para os cinco vizinhos do vértice de baixo;
$(0, 0, -1)$ para o vértice de baixo.

Estas coordenadas seguem simplesmente do fato dos "níveis" intermediários serem pentágonos regulares. Para determinar os valores de a e b, podemos resolver o sistema

$$\begin{gathered} a^2 + b^2 = 1, \\ a^2 + (b-1)^2 = a^2(1 - \cos(2\pi/5))^2 + a^2 \operatorname{sen}^2(2\pi/5); \end{gathered}$$

a primeira equação garante que o sólido está inscrito na esfera unitária e a segunda garante que as faces são triângulos equiláteros. Assim,

$$b = \frac{\cos \frac{2\pi}{5}}{1 - \cos \frac{2\pi}{5}}$$

e é fácil obter o valor de a.

Esperamos ter convencido o leitor de que é inteiramente possível obter coordenadas para os vértices do icosaedro desta forma mas que a resposta é bastante complicada. A complicação da resposta deve-se, entretanto, a uma escolha infeliz da posição do sólido. A posição "certa" para este problema não é nem pendurar o icosaedro por um vértice (como fizemos), nem pousá-lo na mesa deixando uma face horizontal (deixamos a cargo do leitor o exercício tedioso de determinar as coordenadas nesta posição), e sim pendurá-lo *por uma aresta* (figura 2).

Pela figura, temos um par de arestas paralelas a cada eixo e estas intersectam outro eixo; por exemplo, as arestas paralelas ao eixo x cruzam o eixo z. (Um leitor sofisticado talvez se pergunte se a posição das arestas é *exatamente* a que a figura sugere: as simetrias do icosaedro são suficientes para provar os fatos necessários. Mais formalmente ainda, podemos inverter o raciocínio e usar as coordenadas a serem obtidas para provar que o sólido obtido é regular.) Os vértices têm portanto a forma

$$(\pm c, \pm d, 0), (0, \pm c, \pm d), (\pm d, 0, \pm c),$$

onde c e d são parâmetros, por enquanto desconhecidos, satisfazendo $c > d > 0$. Observe que os vizinhos de (por exemplo) $(c, d, 0)$ são $(c, -d, 0)$, $(d, 0, \pm c)$ e $(0, c, \pm d)$. Para determinar a razão entre c e d, basta resolver a equação $c^2 + (c-d)^2 + d^2 = 4d^2$, que garante que as arestas têm todas o mesmo tamanho; isto nos dá $d = c(\sqrt{5} - 1)/2$.

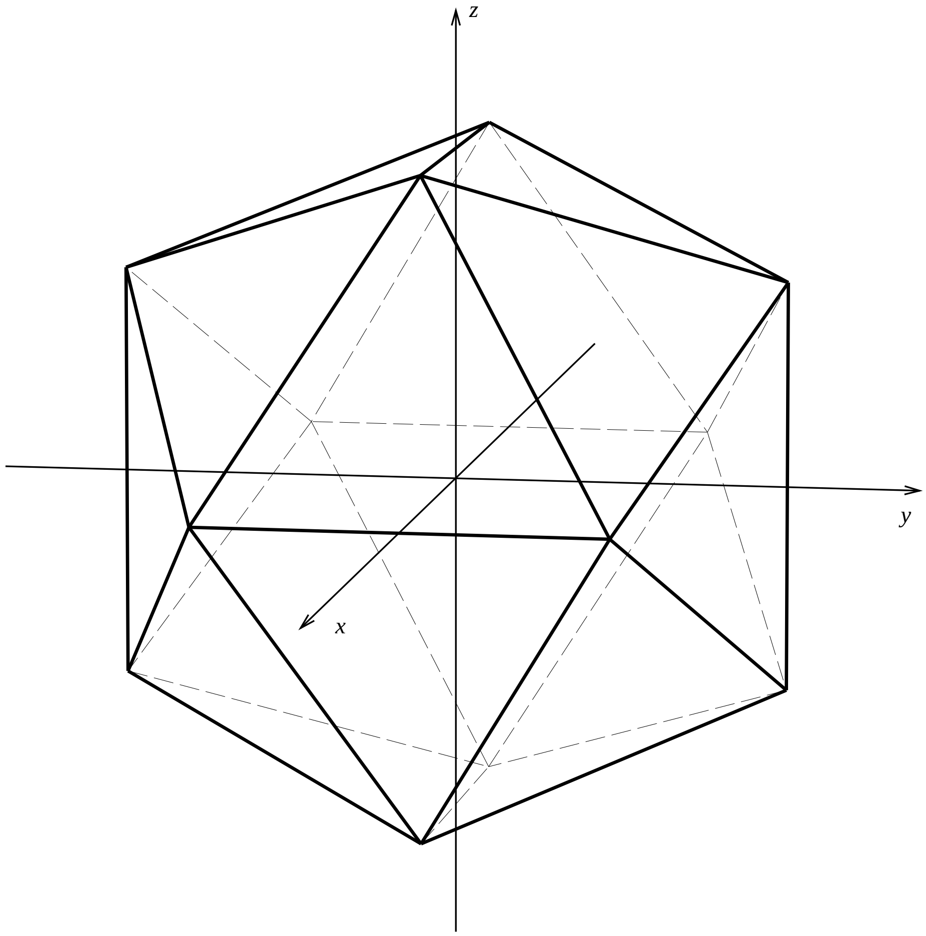

Figura 2

Assim, escrevendo $\tau = (\sqrt{5}-1)/2$, as coordenadas de um icosaedro são

$$(\pm 1, \pm\tau, 0), (0, \pm 1, \pm\tau), (\pm\tau, 0, \pm 1).$$

O dodecaedro é o *dual* do icosaedro, isto é, os centros das faces de um icosaedro são os vértices de um dodecaedro (e vice versa). Para obter coordenadas para os vértices de um dodecaedro (figura 3), basta portanto somar as coordenadas dos três vértices de cada face deste nosso icosaedro, obtendo

$$(\pm(2+\tau), 0, \pm 1), (\pm 1, \pm(2+\tau), 0), (0, \pm 1, \pm(2+\tau)), (\pm(1+\tau), \pm(1+\tau), \pm(1+\tau)),$$

ou, multiplicando tudo por τ (e lembrando que $1+\tau = \tau^{-1}$ e que $2+\tau = \tau^{-2}$),

$$(\pm\tau^{-1}, 0, \pm\tau), (\pm\tau, \pm\tau^{-1}, 0), (0, \pm\tau, \pm\tau^{-1}), (\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Gostaria de agradecer a Elon Lages Lima por me incentivar a escrever este artigo.

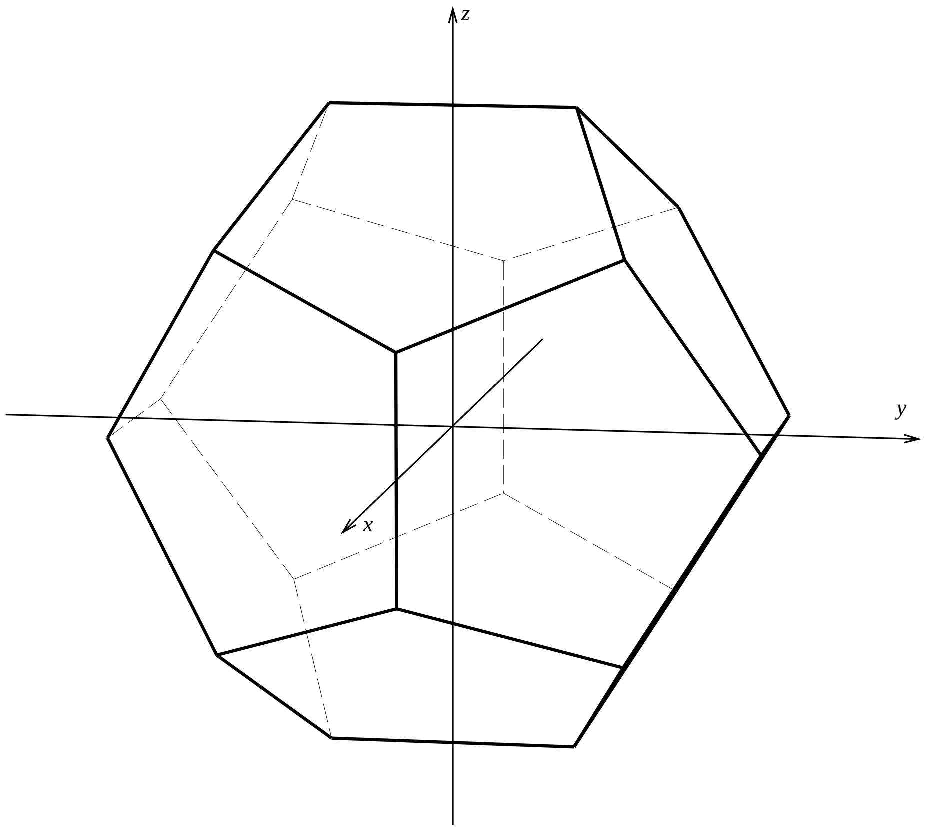

Figura 3

Nicolau C. Saldanha
IMPA, Estrada Dona Castorina 110
Jardim Botânico, Rio de Janeiro
RJ 22460-320, Brasil

nicolau@impa.br
http://www.impa.br/~nicolau/