21) Dado um número com 1998 dígitos que é divisível por 9. Seja X a soma dos seus dígitos, Y a soma dos dígitos de X e Z a soma dos dígitos de Y. Encontre Z.

22) Num triangulo ABC, BA=BC e M é o ponto médio de AC. H é um ponto de BC tal que MH é perpendicular a BC. P é o ponto médio de MH. Prove que AH é perpendicular a BP.

23) Os lados do triangulo ABC são tais que : 0 < AB <= 1 <= BC <= 2 <= CA <= 3. Qual o valor máximo que a área deste triãngulo pode ter ?

24) Sejam dados 3 inteiros X,Y e Z, dois a dois distintos. Prove que :
(X - Y)^5 + (Y - Z)^5 + (Z - X)^5 é divisível por 5*(X - Y)*(Y - Z)*(Z - X)

25) Seja dado uma seqüência de números reais : A0, A1, A2, ..., An satisfazendo as condições : A0=An=0 e Ak-1 - 2*Ak + Ak+1 >= 0 para K = 1, 2, ..., N-1. Prove que nesta sequencia não há pode haver números positivos.

26) Sejam dados dois conjuntos de números positivos que tem a mesma soma. O primeiro conjunto tem M números, o segundo conjunto, N números. Prove que se pode sempre encontrar um conjunto com ao menos M+N numeros positivos tal que os seus elementos podem ser distribuídos em uma matriz MxN tal que a soma dos elementos das linhas e a soma dos elementos das colunas sejam iguais a soma dos elementos de qualquer dos conjuntos originais.

27) Sejam dados 5 circulos tais que quaisquer 4 circulos tenham um ponto em comum. Prove que há um ponto comum aos cinco circulos.

28) Oito Jogadores competem em um torneio. Qualquer jogador jogará com qualquer outro somente uma vez. O vencedor de uma partida ganha um ponto, o que perde não ganha ponto e cada jogador ganha meio-ponto se a partida termina empatada. No final, não ha dois jogadores com a mesma pontuação e o jogador que ficou na segunda colocação ganhou o mesmo que a soma das pontuações dos 4 últimos. Qual foi o resultado da partida entre o jogador que terminou em terceiro e o que terminou em sétimo ?

29 - A) Cada uma das duas diagonais de um quadrilátero o dividem em duas áreas iguais. Prove que este quadrilátero é um paralelogramo. 29- B) Cada uma das três diagonais principais de um hexágono o dividem em duas partes de áreas iguais. Prove que estas diagonais tem um ponto em comum (Se ABCDEF são os vértices consecutivos de um hexágono, as diagonais principais são AD, BE e CF)

30) Os números naturais M e N são primos entre si. Prove que o Máximo Divisor Comum de M + N e M^2 + N^2 é 1 ou 2.

31) Seja dado um círculo C e dois pontos fixos A e B sobre ele. M é um outro ponto em C e K é o ponto médio de BM. P é o pé da perpendicular baixada de K sobre AM. Prove que :

A) Prove que KP passa através de um ponto fixo (conforme M varia)
B) Encontre o lugar geométrico de P

32) Encontre o menor valor de X tal que, dado qualquer ponto sobre um triangulo equilátero de lado igual a 1, nós sempre poderemos escolher dois pontos sobre os lados do triangulo, em linha reta com o ponto dado, cada qual a distância X dele (do ponto dado).

33)

34) Seja dado um conjunto de N números reais positivos, dois a dois distintos $\{ r_1, r_2, r_3, ..., r_n \}$. Tome todos os possíveis sub-conjuntos não vazios e calcule a soma dos elementos de cada um deles. Prove que teremos, ao menos, $N*(N+1)/2$ somas diferentes.

35) Seja dado um triangulo ABC. A reta que passa por C e é paralela a bissetriz do angulo B encontra a bissetriz do angulo A em D. A reta que passa por C e é paralela a bissetriz do angulo A encontra a bissetriz do angulo B em E. Prove que se DE e paralela a AB então CA=CB.

36) Uma progressão aritmetica infinita contem um quadrado perfeito. Prove que ela contem uma infinidade de outros quadrados perfeitos.

37) Nós podemos associar a cada vértice de um polígono de 45 lados um dos algarismos 0,1,2,3,...,9 de tal forma que para cada par de algarismos distintos A e B um dos 45 lados do polígono tem vértices associados aos algarismos A e B ?

38) Encontre todos os números reais P, Q, A e B tais que, para todo X, tenhamos :
$(2X - 1)^{20} - (AX + B)^{20} = (X^2 + PX + Q)^{10}$

39) Nós nomeamos pontos sobre uma circunferência da seguinjte forma : No passo 1 tomamos dois pontos diametralmente opostos e os nomeamos com 1. Nos passos seguintes, tomamos os pontos médios dos arcos gerados no passo anterior e os nomeamos com a soma dos numeros nos extremos do arco. Qual a soma total dos pontos nomeados após o N-ésimo passo ?

40) Seja dado um triangulo isosceles. Encontre o lugar dos pontos P sobre o triângulo tal que a distancia de P à base é igual à média geometrica das distâncias aos outros dois lados.