41) Num triângulo ABC, a altura traçada por A não é menor que o lado BC e a altura traçada por B não é menor que o lado AC. Encontre os ãngulos deste triângulo.

42) If M, N e K são números naturais e N > 1, prove que não podemos ter $M(M+1)=K^N$.

43)

44) Sendo dado um conjunto de N inteiros A1, A2, A3, ..., An, N impar, derivamos o novo conjunto : (A1 + A2)/2, (A2+A3)/2, ..., (An-1 + An)/2, (An + A1)/2. Repetindo o mesmo processo para o novo conjunto, obtemos novos N números. Repetindo este processo indefinidamente, obtemos sempre numeros inteiros. Prove que o conjunto inicial de N numeros era formado por numeros iguais.

45) O hexágono convexo ABCDEF tem todos os ângulos internos iguais. Prove que AB - DE = EF - BC = CD - FA. Reciprocamente, mostre que se A1, A2, A3, A4, A5, A6 são 6 números reais positivos satisfazendo A1 - A4 = A5 - A2 = A3 - A6 então é possivel construir um hexagono convexo com lados A1, A2, A3, A4, A5, A6 e os angulos internos todos iguais.

46) Encontre todas as soluções inteiras para a equação : raiz_2(X + raiz_2(X + raiz_2(X + ... (X + raiz_2(X)) ...)))=Y onde raiz_2(X) denota a raiz quadrada de X e sabendo que existem 1998 raizes quadradas.

47) ABCD é um quadrilátero convexo. "E" é o pé da perpendicular traçada por A em relação à diagonal BD, "F" é o pé da perpendicular traçada por B em relação a diagonal AC, "G" é o pé da perpendicular traçada por C em relação à diagonal BD e, finalmente, "H" é o pé da perpendicular traçada por D em relação a diagonal AC. Prove que o quadrilátero EFGH é semelhante a ABCD.

48) Encontre todos os naturais N tais que N^2 não divide N!.

49) Dado uma rede de hexagonos regulares. Um inseto se arrastou do vertice A ao vértice B, ao longo dos lados, através do caminho mais curto possível (ou de um deles). Prove que em alguma das direções definidas pelos lados, ele caminhou uma distância menor que AB/2. Se ele tivesse caminhado exatamente uma distancia igual a AB/2 em alguma das direções, quantos lados ele teria atravessado ?

50) Um circulo centrado em O esta inscrito em um quadrilatero convexo ABCD. Prove que o angulo AOB + COD é igual a 180 graus.

51) Os números naturais A, B e N são tais que para todo número natural K diferente de B, B - K divide A - K^N. Prove que $A=B^N$

52) Quantas expressões algebricamente diferente nós podemos obter posicionando parenteses em A1/A2/A3/.../An ?

53) Qual é a menor quantidade de tetraedros em que um cubo pode ser particionado ?

54) (A) Encontre o menor quadrado que não termina em zero e que torna-se em outro quadrado se lhe retirarmos seus dois últimos dígitos. (B) Encontre todos os quadrados que não contem os digitos 0 e 5 tais que se o seu segundo dígito for retirado o número resultante divide o número original.

55) Um círculo esta inscrito em um quadrilátero convexo ABCD. AB é paralelo a CD e BC=AD. As diagonais AB e CD encontram-se em E. Os círculos inscritos em ABE, BCE, CDE e DAE tem raios respsctivamente iguais a R1, R2, R3 e R4. Prove que 1/R1 + 1/R3 = 1/R2 + 1/R4

56)(A) Se cada Xi de X1, X2, X3, ..., Xn é igual a -1, 0 ou 1, qual o mínimo valor da soma de todos Xi*Xj nos quais 1 =< i < j =< N ? (B) A resposta é a mesma se os Xi são números reais satisfazendo 0 =< | Xi | =< 1 para 1 =< i =< N ?

57) Dois jogadores devem preencher uma mesma tabela 3X3. Nove cartas, cada uma com um número diferente do de qualquer outra, são apresentadas aos jogadores. Os jogadores jogam alternadamente, cada qual, em sua vez, escolhendo uma das nove cartas e a posicionando na tabela 3X3. O primeiro jogador - o que efetuou a primeira jogada - vence se a soma dos numeros na primeira e terceira linhas é maior que a soma dos números na primeira e terceira colunas, perde se é menor e empata se a soma é igual. Qual jogador pode vencer e qual é a estratégia vencedora ?

58) Um círculo está circunscrito a um triângulo ABC. X é o ponto médio do arco BC (no semi-plano determinado por BC que não contem A), Y é o ponto médio do arco AC e Z é o ponto médio do arco AB. YZ encontra AB em D e YX encontra BC em E. Prove que DE é paralelo a AC e que DE passa através do centro do circulo inscrito no triângulo ABC.

59) Diz-se que um número de 6 dígitos é "sortudo" se a soma dos três primeiros dígitos é igual a soma dos três últimos. Prove que a soma de todos o números sortudos é divisível por 13.

60) O facho de um farol de orientação máritma penetra na escuridão até uma distancia D. Como o faro gira, a extremidade do facho gira a uma velocidade V. Prove que um barco com velocidade não superior a V/8 não pode alcançar a base do farol sem ser iluminado.