61) Um conjunto de 100 pessoas é formado para patrulhar as ruas de um local. Toda manhã, um grupo de 3 pessoas são escolhidas para o serviço daquele dia. Prove não é possível organizar os grupos de foma que qualquer par de pessoas só trabalhem juntas uma unica vez.

62) Um circulo está incrito em um triângulo. Traçando-se uma tangente ao círculo, paralela a um dos lados do triângulo, ela encontra os outros dois lados nos ponto X e Y. Qual o comprimento máximo de XY se o perímetro do triângulo é P ?

63)

64) Podemos distribuir 1965 pontos sobre um quadrado de lado 15 de forma que qualquer retangulo de area unitária no interior do quadrado que tenha lados paralelos aos lados do quadrado contenha ao menos um dos pontos ?

65) Sejam dados N números reais A1, A2, A3, ..., An. Prove que se pode encontrar N numeros inteiros B1, B2, B3, ..., Bn tais que a soma dos elementos de qualquer subconjunto dos numeros reais difere da soma dos elementos do correspondente conjunto dos inteiros por umvalor não superior a (N+1)/4.

66) Um turista chega a Moscou, de trem. A seguir, anda - a pé - aleatoriamente pelas ruas da cidade. Após o jantar, decide retornar a estação através dos trechos das ruas que ele havia atravessado um número impar de vezes. Prove que isto é sempre possível. (Em outras palavras, dado um caminho de A ate B sobre um grafo, Encontre o caminho de B até A consistindo dos lados que foram usado um numero impar de vezes no trajeto de A até B).

67) (A) Um comite deve se encontrar 40 vezes, com 10 pessoas em cada encontro. Nenhum par de pessoas deve se encontrar mais que uma vez. Prove que existem mais de 60 pessoas no comite. (B) Prove que não se pode fazer mais que 30 sub-comites de 5 membros cada um de um comite de 25 membros de forma que quaisquer dois sub-comites não tenham mais que um membro em comum.

68) Sejam dados dois números naturais A e B, primos entre si. Dizemos que um inteiro é BOM se ele pode ser representado como M*A + N*B, com M e N inteiros não-negativos. Se um inteiro não é BOM, dizemos que ele é MAL. Prove que nós podemos encontrar um inteiro C tal que exatamente um dentre K e K - C é BOM, para qualquer K inteiro. Quantos números MAL existem ?

69) Um avião espião, que esta a 10Km de altura e move-se com a velocidade constante de 1000 Km/h circula em torno de um eixo imaginario que parte de um ponto A na Terra. Um missel é disparado de A com a mesma velocidade e movendo-se de tal forma que A, o míssel e o avião estão sempre alinhados. Em quanto tempo haverá o choque ?

70) Prove que a soma dos comprimentos dos lados de um poliedro convexo qualquer é menor que 3 vezes a maior distancia entre dois vertices do poliedro.

71) Um alienígena move-se na superfície de um planeta com velocidade não superior a U. Uma espaçonave que procura pelo alienígena move-se com velocidade V. Prove que a espaçonave sempre poderá encontrar o alinígena se $V > 10U$.

72) Existe um número impar de soldados em um exercício. A distância entre dois quaisquer soldados é diferente da distancia entre quaisquer dois outros. Cada soldado vigia o soldado que lhe esta mais próximo. Prove que ao menos um soldado não está sendo vigiado.

73) Os pontos B e C estão em um segmento AD e $AB=CD$. Prove que qualquer ponto do plano é tal que $PA + PD >= PB + PC$.

74) Se X e Y forem inteiros positivos podem $X^2 + Y$ e $X + Y^2$ serem ambos quadrados perfeitos ?

75) Um grupo de crianças estão distribuídas em duas filas iguais (com o mesmo número de crianças). Cada criança na fila traseira é maior que a criança da fila dianteira que esta em sua frente. Prove que este resultado continua válido se ordenarmos cada fila, da esquerda para a direita, em ordem crescente de altura.

76) Um retângulo $ABCD$ é desenhado em um papel quadriculado de forma que os seus vértices coincidam com vertices do quadriculado e seus lados estejam sobre as linhas do quadriculado. Se $AD= K*AB$, com K inteiro. Prove que o numero de caminhos mais curtos de A até C que não iniciam ao longo de AD é K vezes o numero de caminhos mais curtos que nao iniciam ao longo de AB.

77) Sejam dados N números reais não-negativos $A1, A2, ..., An$ tais que $Ai-1 =< Ai =< 2Ai-1$ para $i = 2,3,4, ..., N$. Prove que voce pode formar uma soma $S=B1*A1 + B2*A2 + B3*A3 + ... + Bn*An$ com cada Bi igual a 1 ou -1 tal que $0=< S =< A1$.

78) Prove que sempre se pode desenhar um círculo de raio A/P no interior de um polígono convexo de área A e perímetro P.

79) Um grafo com ao menos tres vértices tem a propriedade de que dados quaisquer três vértices A, B e C é possível encontrar um caminho de A até B que não passa por C. Prove que neste grafo é possivel encontrar dois caminhos distintos que ligam A a B.

80) Dado um triangulo ABC. Suponha que o ponto P no espaço é tal que PH é a menor das quatro alturas da piramide $PABC$. Qual é o lugar geométrico de H para todas as possíveis posições de P ?