

# Nomes para Ordinais: Além da Hierarquia de Veblen

Nicolau C. Saldanha

## 0.Introdução

Neste trabalho damos nomes para ordinais (infinitos enumeráveis ‘pequenos’) de uma forma muito explícita e construtiva. Esta notação é uma generalização da Hierarquia de Veblen ([V]). Vemos também como relacionar esta notação com os dilatadores de Girard (‘dilators’,[G] e [GV]).

Este artigo foi motivado por algumas idéias do autor que interessaram a algumas pessoas, especialmente a Luis Carlos Pereira, a quem o autor gostaria de agradecer pela ajuda e estímulo. Não há, entretanto, muito de realmente original aqui e este artigo deve ser vista como uma exposição, talvez sob um ponto de vista diferente, de resultados conhecidos ou generalizações destes. O autor gostaria de agradecer ainda ao Departamento de Matemática da PUC-RIO e ao CNPq pelo apoio dado.

## 1.A Hierarquia de Veblen

A Forma Normal de Cantor diz que qualquer ordinal  $\alpha$  pode ser escrito de uma única maneira como:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot n_0 + \cdots + \omega^{\alpha_{m-1}} \cdot n_{m-1}$$

onde  $\alpha_0 > \cdots > \alpha_{m-1}$  são ordinais,  $m$  é um natural e  $n_i$ ,  $0 \leq i < m$ , são naturais não nulos. Se quisermos usar a Forma Normal de Cantor para dar nomes a ordinais teremos problemas quando chegarmos a ordinais  $\alpha$  com

$$\alpha = \omega^\alpha.$$

Ou seja, a Forma Normal de Cantor nos ensina como dar nomes a todos os ordinais menores do que o primeiro tal  $\alpha$ , que é chamado  $\epsilon_0$ .

Podemos pensar em estender a Forma Normal de Cantor dando nomes aos ordinais  $\alpha$  satisfazendo  $\alpha = \omega^\alpha$ . É fácil ver que a classe dos tais  $\alpha$  é *fechada* (no sentido de que o supremo de um conjunto de elementos da classe pertence à classe) e *ilimitada* (isto é, contém ordinais arbitrariamente grandes). Podemos agora denominar aos elementos desta classe de  $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_\alpha, \dots$ . Com esta nova notação temos nomes para todos os ordinais

menores do que o primeiro  $\alpha$  com  $\alpha = \epsilon_\alpha$ . A classe dos tais  $\alpha$  também é fechada e ilimitada e seus elementos podem ser denominados, digamos,  $\delta_0, \dots, \delta_\alpha, \dots$

É fácil ver que poderíamos repetir este processo com novas letras, mas ao invés de usar todo o alfabeto grego podemos fazer algo um pouco melhor. Mas antes de continuar, algumas considerações mais gerais. Chamaremos uma função de **On** em **On** estritamente crescente com imagem fechada ilimitada de uma função *normal*. Temos assim uma correspondência óbvia entre classes fechadas ilimitadas e funções normais que associa a cada função a sua imagem. Como nos exemplos acima, a classe dos pontos fixos de uma função normal é fechada ilimitada, sendo portanto a imagem de uma outra função normal. Chamaremos a esta nova função normal de *derivada* da primeira, e escreveremos  $f'$  para a derivada de  $f$ . Assim, nos exemplos acima temos  $\exp' = \epsilon$  e  $\exp'' = \delta$ . Mas é claro que podemos repetir este processo de derivar  $\alpha$  vezes. Explicitamente, teríamos

$$x \in \text{Im}(f^{(\alpha)}) \iff x = f^{(\beta)}(x) \text{ para todo } \beta < \alpha.$$

Escreveremos  $f^{(\beta)}(\alpha)$  como  $f(\beta, \alpha)$ . A melhor maneira de estender a Forma Normal de Cantor deveria agora ser evidente: escrevemos uma potência de omega  $\alpha$  na forma  $\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0)$  onde  $\beta_0 < \alpha$ .

Antes de continuar, vamos olhar com um pouco mais de cuidado para aquilo que já temos. A Forma Normal de Cantor é equivalente à observação que, para todo ordinal  $\alpha$ , existem únicos  $\beta_0$  e  $\gamma$  com

$$\alpha = \omega^\beta + \gamma, \quad \gamma < \alpha.$$

Isto não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter  $\beta = \alpha$ . O problema de dar nomes a ordinais assim se reduz ao problema de dar nomes às potências de  $\omega$ . Nossa nova notação diz que todo  $\alpha$  potência de  $\omega$  pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_1, \beta_0), \quad \beta_0 < \alpha.$$

Isto, é claro, não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter  $\beta_1 = \alpha$ . Aliás, é impossível ter um sistema para dar nomes para todos os ordinais, ou mesmo para todos os ordinais enumeráveis, pois qualquer que seja a notação, o conjunto de nomes é enumerável enquanto o conjunto de ordinais enumeráveis é não enumerável.

A maneira de prosseguir deve ser evidente: temos de utilizar mais índices. Ou seja, devemos definir  $f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0)$ . Observe que para toda função normal e para todo  $\alpha$  temos

$f(\alpha, 0) \geq \alpha$ . A classe dos  $\alpha$  para os quais  $\alpha = f(\alpha, 0)$  é sempre fechada e ilimitada. Esta será a imagem de  $f(1, 0, \bullet)$ . A partir deste exemplo a definição seguinte deve ser natural:

$$x \in \text{Im}(f(\alpha_2, \alpha_1, \bullet)) \iff \begin{cases} x = f(\alpha_2, \beta_1, x) & \text{para todo } \beta_1 < \alpha_1 \\ & \text{e} \\ x = f(\beta_2, \beta_1, x) & \text{para todo } \beta_2 < \alpha_2 \text{ e } \beta_1 < x. \end{cases}$$

Em outras palavras,

$$x = f(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_0) \iff x \text{ é o menor ordinal satisfazendo as condições abaixo:}$$

$$\begin{cases} x > f(\alpha_2, \alpha_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_0 < \alpha_0 \\ & \text{e} \\ x > f(\alpha_2, \beta_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_1 < \alpha_1 \text{ e } \beta_0 < x \\ & \text{e} \\ x > f(\beta_2, \beta_1, \beta_0) & \text{para todo } \beta_2 < \alpha_2, \beta_1 < x \text{ e } \beta_0 < x. \end{cases}$$

Assim, todo  $\alpha$  potência de  $\omega$  pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\beta_2, \beta_1, \beta_0), \quad \beta_0, \beta_1 < \alpha.$$

Isto ainda não nos ensina a dar nomes a qualquer ordinal pois podemos ter  $\beta_2 = \alpha$ .

Podemos generalizar isto da seguinte forma: consideraremos  $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_\gamma, \dots$  uma família de ordinais onde apenas um número finito destes  $\mathbf{b}_\gamma$  é diferente de zero. Uma tal família pode ser escrita como

$$\mathbf{b} = (\gamma \rightarrow \mathbf{b}_\gamma, \dots, 0 \rightarrow \mathbf{b}_0)$$

onde poderemos omitir os termos da forma  $\gamma \rightarrow 0$ . Usaremos também a notação

$$\mathbf{b} = \theta^\gamma \cdot \mathbf{b}_\gamma + \dots + \mathbf{b}_0$$

para esta família onde  $\theta$  é um símbolo formal; omitimos o termo  $\theta^0$  no último termo pois pensamos nele em algum sentido como sendo igual a 1. Podemos definir

$$x \in \text{Im}(f(\dots, \gamma \rightarrow \mathbf{a}_\gamma, \dots, \bullet)) \iff x = f(\dots, \gamma \rightarrow \mathbf{b}_\gamma, \dots, 0 \rightarrow x)$$

para toda família  $\mathbf{b}$  com  $\mathbf{b}_0 = x$  e para a qual exista  $\delta > 0$  com

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } 0 < \gamma < \delta. \end{cases}$$

Em outras palavras,  $x = f(\mathbf{a})$  é o menor ordinal satisfazendo a seguinte condição: para toda família  $\mathbf{b}$  para a qual existe um  $\delta$  com

$$\begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } \gamma < \delta \end{cases}$$

temos  $x > f(\mathbf{b})$ . A aparição frequente de condições como esta justifica a definição

$$\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a} \iff \begin{cases} \mathbf{b}_\gamma = \mathbf{a}_\gamma & \text{para todo } \gamma > \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < \mathbf{a}_\gamma & \text{para } \gamma = \delta \\ \mathbf{b}_\gamma < x & \text{para todo } \gamma < \delta. \end{cases}$$

Assim,  $f(\mathbf{a})$  é o menor ordinal satisfazendo

$$\mathbf{b} \prec_{f(\mathbf{a})} \mathbf{a} \implies f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}).$$

Observe que

$$f(\dots, \gamma_n \rightarrow \mathbf{a}_{\gamma_n}, \gamma_{n-1} \rightarrow \mathbf{a}_{\gamma_{n-1}}, \dots) = f(\dots, \gamma_n \rightarrow \mathbf{a}_{\gamma_n}, (\gamma_{n-1} \rightarrow \mathbf{a}_{\gamma_{n-1}}, \dots)).$$

Assim, todo  $\alpha$  potência de  $\omega$  pode ser escrito de forma única como

$$\alpha = \exp(\mathbf{b}), \quad \mathbf{b}_\gamma < \alpha \text{ para todo } \gamma.$$

Poderia parecer agora que temos nomes para todos os ordinais: afinal, basta escrever  $\alpha$  na notação acima já que podemos supor conhecidos nomes para os  $\mathbf{b}_\gamma$ . O problema, é claro, é que podemos não ter nomes para os  $\gamma$ . Mais precisamente, podemos ter

$$\alpha = \exp(\alpha \rightarrow 1).$$

Esta notação descrita até aqui é, com leves modificações, a Hierarquia de Veblen.

## 2. Além

Vimos que sabemos dar nomes aos ordinais menores do que o primeiro  $\alpha$  com  $\alpha = \exp(\alpha \rightarrow 1)$ . Analogamente, dada uma função normal  $f$  podemos considerar os  $\alpha$  com  $f(\alpha \rightarrow 1) = \alpha$ . A classe dos tais  $\alpha$  é fechada e ilimitada e podemos definir uma nova função normal  $g$  como

$$x \in \text{Im}(g) \iff f(x \rightarrow 1) = x.$$

A semelhança entre esta definição e a definição de derivada vista anteriormente é evidente. Escreveremos  $g(x) = f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, x)$  e

$$f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, \dots, \gamma \rightarrow \mathbf{a}_\gamma, \dots) = f((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1, (\dots, \gamma \rightarrow \mathbf{a}_\gamma, \dots)).$$

Vamos agora unificar e generalizar estas definições.

Queremos definir  $f(\mathbf{a})$  para algum tipo mais geral de objeto  $\mathbf{a}$ . Sabíamos desde o início o que significava  $f(\alpha)$ , onde  $\alpha \in \mathbf{On}$ . Aprendemos na seção anterior a definir  $f(\mathbf{a})$  onde  $\mathbf{a}$  é uma família de ordinais indexada por ordinais que assume valores diferentes de zero apenas um número finito de vezes. Mas o conjunto das funções de  $\beta$  em  $\alpha$  com esta propriedade identifica-se naturalmente com  $\alpha^\beta$ , exponenciação ordinal. Podemos assim dizer que aprendemos a definir  $f(\mathbf{a})$  para  $\mathbf{a} \in \mathbf{On}^{\mathbf{On}}$ ; observe que  $\mathbf{On}$  é identificado com um ‘segmento inicial’ de  $\mathbf{On}^{\mathbf{On}}$  e que nossas definições respeitam esta identificação. (O leitor que estiver preocupado com a legitimidade de falar de  $\mathbf{On}^{\mathbf{On}}$  pode substituir todas as instâncias de  $\mathbf{On}$  por  $\kappa$ , um cardinal suficientemente grande, fazendo as adaptações evidentes.)

Se  $A \neq \emptyset$  é um conjunto bem ordenado qualquer, definimos  $A^A$  como o conjunto das funções de  $A$  em  $A$  que só assumem valores diferentes de 0 (o mínimo de  $A$ ) um número finito de vezes. O conjunto  $A^A$  recebe uma boa ordenação natural e podemos identificar  $A$  com um segmento inicial de  $A^A$  identificando  $a$  com  $(0 \rightarrow a)$ . Podemos agora considerar  $A^{(A^A)}$  e identificar  $A^A$  com um segmento inicial deste conjunto a partir da identificação anterior. Podemos prosseguir com este processo e definir

$$\epsilon(A) = A \cup A^A \cup A^{(A^A)} \cup \dots$$

de tal forma que um elemento  $\mathbf{a}$  de  $\epsilon(A)$  é (a menos de identificações naturais) uma função de  $\epsilon(A)$  em  $A$ . Observe ainda que se sabemos dar nomes para os elementos de  $A$ , temos uma forma evidente de dar nomes para os elementos de  $\epsilon(A)$ . Observe ainda que se  $B \subseteq A$  então  $\epsilon(B) \subseteq \epsilon(A)$  mas  $\epsilon(B)$  não será um segmento inicial de  $\epsilon(A)$  mesmo se  $B$  for um segmento inicial de  $A$ .

Queremos assim definir  $f(\mathbf{a})$  para  $\mathbf{a} \in \epsilon(\mathbf{On})$ . Definiremos  $f(\mathbf{a})$  como o menor ordinal satisfazendo

$$\mathbf{b} \prec_{f(\mathbf{a})} \mathbf{a} \implies f(\mathbf{b}) < f(\mathbf{a}).$$

Resta-nos ainda definir  $\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a}$  neste novo contexto. Definamos  $\mathbf{a|b}$  por

$$(\mathbf{a|b})(\mathbf{c}) = \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{c}), & \text{se } \mathbf{c} < \mathbf{b} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\mathbf{b} \prec_x \mathbf{a} \iff \text{existe } \mathbf{c} \text{ com } \begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{d}) = \mathbf{a}(\mathbf{d}), & \text{para } \mathbf{d} > \mathbf{c} \\ \mathbf{b}(\mathbf{c}) < \mathbf{a}(\mathbf{c}) \\ \mathbf{b}|\mathbf{c} \in \epsilon(x). \end{cases}$$

É fácil verificar que todas estas definições funcionam bem. A seguinte definição é equivalente à anterior:  $f(\mathbf{a})$  é o menor ordinal  $x$  com a propriedade que  $\mathbf{a} \in \epsilon(x+1)$  e para todo  $\mathbf{b}$  com  $\mathbf{b} < \mathbf{a}$  e  $\mathbf{b} \in \epsilon(x)$  temos  $f(\mathbf{b}) < x$ . Aqui  $\mathbf{b} < \mathbf{a}$  significa simplesmente que existe  $\mathbf{d}$  com  $\mathbf{b}(\mathbf{c}) = \mathbf{a}(\mathbf{c})$  para  $\mathbf{c} > \mathbf{d}$  e  $\mathbf{b}(\mathbf{d}) < \mathbf{a}(\mathbf{d})$ .

Isto nos dá nomes para ordinais bem maiores do que aqueles alcançáveis pela Hierarquia de Veblen. O menor ordinal não alcançável pela Hierarquia de Veblen é  $\exp((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1)$  enquanto o menor ordinal não alcançável pela nossa notação é o menor  $\alpha$  com  $\alpha = \exp(\dots(\alpha \rightarrow 1) \rightarrow \dots \rightarrow 1)$  para qualquer número de níveis. Também podemos escrever este ordinal como

$$\alpha = \sup\{\exp(1), \exp(1 \rightarrow 1), \exp((1 \rightarrow 1) \rightarrow 1), \dots\}.$$

### 3. Dilatadores

Definimos a categoria  $\mathbf{ON}$  como sendo a categoria cujos objetos são ordinais e cujos morfismos entre  $\alpha$  e  $\beta$  são funções estritamente crescentes de  $\alpha$  para  $\beta$ . Existe uma outra categoria intimamente ligada a esta: a categoria de todos os conjuntos bem ordenados onde morfismos são funções estritamente crescentes. Definimos (seguindo [G]) um *dilatador* como sendo um functor de  $\mathbf{ON}$  em  $\mathbf{ON}$  que preserva limites diretos e pull-backs. Já vimos exemplos de dilatadores como  $F(A) = A^A$  ou  $F(A) = \epsilon(A)$ ; a Forma Normal de Cantor tem um parentesco próximo com o dilatador  $\epsilon$ .

Pensaremos em  $F(\mathbf{On})$  como a união dos  $F(\alpha)$  pela identificação obtida a partir das inclusões de  $\alpha$  como um segmento inicial de  $\beta$ . Assim,  $F(\mathbf{On})$  pode ser considerado uma classe bem ordenada. Denotaremos o elemento típico de  $F(\mathbf{On})$  por  $\mathbf{a}$  ou uma letra semelhante; claramente,  $\mathbf{a} \in F(\mathbf{On})$  significa simplesmente que  $\mathbf{a} \in F(\alpha)$  para algum  $\alpha$ .

Assim, se  $F$  é um dilatador e  $\mathbf{a} \in F(\mathbf{On})$  definimos  $f(\mathbf{a})$  como sendo o menor ordinal  $x$  com  $\mathbf{a} \in F(x+1)$  e  $f(\mathbf{b}) < x$  para todo  $\mathbf{b} \in F(x)$  com  $\mathbf{b} < \mathbf{a}$ . As seções precedentes correspondem a fazer isso com o dilatador  $\epsilon$ .

Podemos agora pensar em toda nossa construção anterior sob o seguinte aspecto. Tínhamos inicialmente nomes para os naturais. Usando o dilatador  $\epsilon$  para criar índices, construímos nomes para um conjunto de ordinais, ou, o que é equivalente, criamos um conjunto bem ordenado de nomes. Ou seja, a partir de um dilatador ( $\epsilon$ ) exibimos um

processo para a partir de um conjunto bem ordenado ( $\omega$ ) construir outro conjunto bem ordenado (o conjunto de nomes). Obtivemos assim a partir de um dilatador um outro functor de  $\mathbf{ON}$  em  $\mathbf{ON}$ ; é de verificação imediata que este novo functor é um dilatador. Denotaremos este novo functor por  $F^{[1]}$ ; descrevemos, portanto, nas últimas seções,  $\epsilon^{[1]}(\omega)$ .

Diremos que um dilatador  $F$  é *recursivo* se podemos dar nomes recursivamente aos elementos de  $F(\alpha)$  a partir de nomes para elementos de  $\alpha$ . Se  $F$  é recursivo,  $F^{[1]}$  também é recursivo. Podemos além disso iterar este processo para definir um dilatador  $F^{[\gamma]}$  para qualquer ordinal  $\gamma$ . Se  $\alpha$  e  $F$  forem recursivos, o dilatador  $F^{[\alpha]}$  também será recursivo. Temos assim facilmente nomes para ordinais até o primeiro  $\alpha$  com

$$\alpha = \epsilon^{[\alpha]}(\omega).$$

Poderíamos prosseguir além desse ponto com novas iterações mas acreditamos já ter ficado claro como prosseguir com esse processo. Assim, pararemos nossa construção de nomes para ordinais e de funtores recursivos neste ponto.

### **Bibliografia:**

- [GV] Jean-Yves Girard, Jacqueline Vauzeilles, *Functors and Ordinal Notations I: A Functorial Construction of the Veblen Hierarchy*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 49 (1984), pp. 713-729.
- [G] Jean-Yves Girard,  $\Pi_2^1$ -logic I: *Dilators*, Annals of Mathematical Logic, vol. 21 (1981), pp. 75-219.
- [V] Oswald Veblen, *Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9 (1908), pp. 280-292.