Tópicos de matemática quântica

HSSTV

6 de novembro de 2000

Sumário

1 Dominós e q-contagem **5**

1.1 Números binomiais 5

1.2 Números binomiais e q-contagem 10

1.3 Coberturas por dominós e por lozangos 18

1.4 Funções altura e a altura total de uma cobertura 21

1.5 Matrizes de Kasteleyn 24

1.6 Resultados de contagem 27

2 O látice de Toda periódico **33**

2.1 As equações 33

2.2 O caso aberto 35

2.3 O caso periódico 37

3 Uma Visão Elementar de Supersimetria **43**

4 A integral de Kontsevich **63**

4.1 Tranças 63

4.2 Monodromia 65

4.3 Diagramas 67

4.4 O invariante 69

5 Grupos Quânticos **73**
5.1 Bons Antecedentes Algébricos 75
5.1.1 Grupos Clássicos: Definições 75
5.1.2 A Geometria dos Grupos Clássicos 86
5.1.3 A Álgebra dos Grupos Clássicos 91
5.1.4 Álgebras de Lie e Álgebras Envolventes 95
5.1.5 Representações 104
5.2 Grupos Quânticos 107
5.2.1 O Plano Quântico, as Matrizes Quânticas e os Grupos Quânticos 107
5.2.2 A Álgebra Envolvente 112
5.2.3 Módulos 114

Capítulo 1

Dominós e q-contagem

A idéia básica da q-contagem é simples: ao invés de contarmos os elementos de um conjunto diretamente (como em combinatória "clássica") introduzimos no problema um índice e usamos este índice como o expoente de uma variável auxiliar q. Assim, ao invés de tentarmos encontrar inteiros tentamos agora encontrar polinômios ou séries formais em q. A estrutura algébrica que ganhamos com a mudança pode ser muito útil. Este método já é tradicional mas ganhou novo ímpeto com as idéis recentes de matemática quântica; por isso às vezes o processo de introduzir a variável q é conhecido como *quantizar* o problema.

Ao invés de tentarmos discutir estas idéias em abstrato, vamos estudar alguns exemplos. Primeiro veremos com certo detalhe a q-versão de um dos objetos mais tradicionais da combinatória: o triângulo de Pascal. Depois estudaremos outros problemas de q-contagem relacionados com coberturas por dominós de regiões quadriculadas.

1.1 Números binomiais

Vamos começar com uma definição usual.

Definição 1.1: *Definimos os números binomiais pela fórmula*

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Outras possíveis definições são a recursiva e a algébrica, que enunciaremos como proposições.

Proposição 1.2: *Os números binomiais satisfazem*

$$\binom{n+1}{m+1} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m+1}, \qquad n \geq 0$$

e

$$\binom{0}{m} = \begin{cases} 1, & \textit{se } m = 0, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Além disso, a única função de $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ *que satisfaz esta recorrência com estas condições iniciais é* $\binom{n}{m}$.

Dem: Indução. ■

Proposição 1.3: (Binômio de Newton) *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *vale a identidade de polinômios*

$$(X+Y)^n = \sum_{0 \le m \le n} \binom{n}{m} X^m Y^{n-m}.$$

Dem: Indução. ■

Observemos ainda que

$$\binom{x}{m} = \frac{x(x-1)\cdots(x-(m-1))}{m!}$$

é um polinômio de grau m na variável x. Definimos assim mais geralmente

$$\binom{x}{m} = \begin{cases} \frac{x(x-1)\cdots(x-(m-1))}{m!}, & \text{se } m \ge 0, \\ 0, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

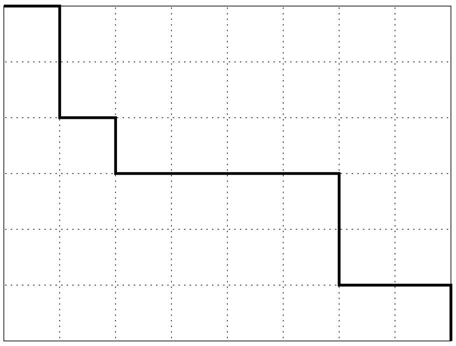
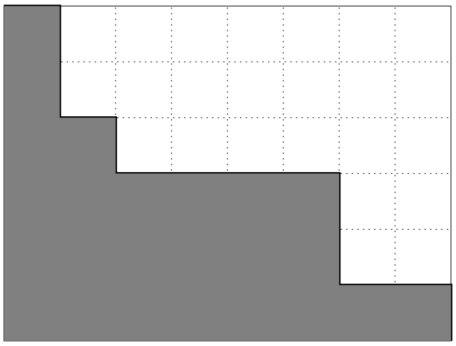
para qualquer $x \in \mathbb{C}$ (ou mesmo em outro corpo qualquer) e $m \in \mathbb{Z}$. A identidade

$$\binom{x+1}{m+1} = \binom{x}{m} + \binom{x}{m+1}$$

ainda vale para quaisquer valores de x e m.

Existem inúmeras interpretações combinatórias para números binomiais: a mais conhecida é que $\binom{n}{m}$ é o número de subconjuntos de m elementos de um conjunto de n elementos dado (por exemplo, $\{1, 2, \ldots, n\}$). Outra interpretação interessante é como o número de caminhos de comprimento n (o valor mínimo) ligando $(0, m)$ e $(n-m, 0)$ andando sempre por retas verticais ou horizontais inteiras, conforme ilustrado abaixo. Uma demonstração bijetiva deste fato consiste em tomar para cada caminho o conjunto das posições ao longo do caminho dos segmentos verticais: este é um subconjunto de m elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$. O caminho na figura abaixo corresponde ao subconjunto $\{2, 3, 5, 10, 11, 14\}$.

Existem muitíssimas identidades interessantes envolvendo números binomiais. Enunciaremos agora algumas que serão usadas mais adiante.

Proposição 1.4: *Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{C}$ temos*

$$\sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{m} = \binom{x-n}{m-n}.$$

Dem: Por indução em n, sendo trivial o caso $n = 0$. O caso $n = 1$ é a identidade recursiva da Proposição 1.2 (apenas mudando o nome das variáveis):

$$\binom{x}{m} - \binom{x-1}{m} = \binom{x-1}{m-1}.$$

Suponha a identidade demonstrada para n; para $n+1$ temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \le j \le n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{x-j}{m} \\
&= \sum_{0 \le j \le n+1} (-1)^j (\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1}) \binom{x-j}{m} \\
&= \left(\sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{m} \right) + \left(\sum_{1 \le j \le n+1} (-1)^j \binom{n}{j-1} \binom{x-j}{m} \right) \\
&= \left(\sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{m} \right) - \left(\sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j-1}{m} \right) \\
&= \binom{x-n}{m-n} - \binom{x-n-1}{m-n} = \binom{x-(n+1)}{m-(n+1)},
\end{aligned}$$

o que demonstra a identidade para $n+1$ e conclui a demonstração. ∎

Corolário 1.5: *Seja $n \in \mathbb{Z}$ um inteiro positivo e $P \in C[x]$, $P(x) = \sum a_i x^i$, um polinômio de grau menor do que n. Então*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} (-1)^j \binom{n}{j} P(x-j) = \sum_{0 \le j \le n} (-1)^j \binom{n}{j} P(x-j) = 0.$$

Observe que apenas um número finito de termos do primeiro somatório são diferentes de 0: exatamente aqueles valores considerados no segundo somatório.

Dem: Podemos escrever

$$P(x) = \sum_{0 \leq i < n} b_i \binom{x}{i}$$

donde, pela proposição anterior,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \binom{n}{j} P(x-j) &= \sum_{0 \leq i < n} \left(b_i \sum_{0 \leq j \leq n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{x-j}{i} \right) \\ &= \sum_{0 \leq i < n} b_i \binom{x-n}{i-n} = 0. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.6: *Para quaisquer naturais a, b, c temos*

$$\det \begin{pmatrix} \binom{b+c}{b} & \binom{b+c}{b+1} & \cdots & \binom{b+c}{b+a-1} \\ \binom{b+c}{b-1} & \binom{b+c}{b} & \cdots & \binom{b+c}{b+a-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{b+c}{b-a+1} & \binom{b+c}{b-a+2} & \cdots & \binom{b+c}{b} \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < a, 0 \leq j < b, 0 \leq k < c} \frac{i+j+k+2}{i+j+k+1}.$$

Observe que a matriz é quadrada de ordem a. Observe também que do lado direito os papéis de a, b e c são intercambiáveis, o que não ocorre do lado esquerdo. Por outro lado, o lado esquerdo é claramente inteiro; o leitor pode tentar mostrar diretamente que o lado direito é inteiro.

Na demonstração da proposição usaremos a equação

$$\binom{n}{m} = (-1)^m \binom{-n+m-1}{m},$$

de fácil demonstração.

Dem: Os casos $a = 0$ e $a = 1$ são triviais. Definamos

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} \binom{b+c}{b} & \binom{b+c}{b+1} & \cdots & \binom{b+c}{b+a-1} \\ \binom{b+c}{b-1} & \binom{b+c}{b} & \cdots & \binom{b+c}{b+a-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{b+c}{b-a+1} & \binom{b+c}{b-a+2} & \cdots & \binom{b+c}{b} \end{pmatrix};$$

por indução basta mostrar que

$$\frac{\det M(a,b,c)}{\det M(a-1,b,c)} = \frac{\binom{a+b+c-1}{b}}{\binom{a+b-1}{b}}$$

pois

$$\frac{\binom{a+b+c-1}{b}}{\binom{a+b-1}{b}} = \prod_{0\leq j<b, 0\leq k<c} \frac{a+j+k+1}{a+j+k}.$$

Defina

$$P(x) = \binom{c-1+x}{c-1}\binom{-a+x}{b};$$

$P \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio de grau $b+c-1$. Observe que as raízes de P são $-c+1, -c+2, \ldots, -2, -1$ e $a, a+1, \ldots, a+b-2, a+b-1$; observe também que

$$P(-c) = \binom{-1}{c-1}\binom{-a-c}{b} = (-1)^{b+c-1}\binom{a+b+c-1}{b}.$$

Seja $v \in \mathbb{C}^a$ um vetor cuja i-ésima coordenada é $v_i = (-1)^i P(a-1-i)$ (i varia de 0 a $a-1$):

$$v = \left(\binom{a+c-2}{c-1}\binom{-1}{b}, -\binom{a+c-3}{c-1}\binom{-2}{b}, \ldots, (-1)^{a-1}\binom{c-1}{c-1}\binom{-a}{b}\right).$$

Temos

$$v_{a-1} = (-1)^{a+b-1}\binom{a+b-1}{b}$$

pois $\binom{-a}{b} = (-1)^b\binom{a+b-1}{b}$. Observe que as coordenadas de v são todas não nulas. Vamos calcular o produto $w = M(a,b,c)v$.

Calculemos a i-ésima coordenada w_i de w. Temos, por uma simples mudança de índices,

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{0\leq j<a} (-1)^j \binom{b+c}{b-i+j} P(a-1-j) \\ &= (-1)^{b-i} \sum b-i \leq k < a+b-i (-1)^k \binom{b+c}{k} P(a+b-i-k-1). \end{aligned}$$

Mas pelo corolário temos

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^k \binom{b+c}{k} P(a+b-i-k-1) = 0$$

donde

$$w_i = (-1)^{b-i+1}(S_i^- + S_i^+)$$

onde

$$S_i^- = \sum_{0 \le k < b-i} (-1)^k \binom{b+c}{k} P(a+b-i-k-1)$$
$$S_i^+ = \sum_{a+b-i \le k \le b+c} (-1)^k \binom{b+c}{k} P(a+b-i-k-1)$$

Mas se $0 \le k < b-i$ temos $a \le a+b-i-k-1 < a+b$, assim P se anula em todos os termos do somatório que define S_i^- e temos $S_i^- = 0$ para qualquer valor de i. Por outro lado, se $i \le a-2$ e $a+b-i \le k \le b+c$ temos $-c+1 \le a+b-i-k-1 < 0$ e P se anula agora em todos os termos do somatório que define S_i^+. Assim temos $w_i = 0$ para $i < a-1$. Se $i = a-1$, o único termo do somatório S_i^+ que não se anula é para $k = b+c$ e temos

$$S_{a-1}^+ = (-1)^{b+c}\binom{b+c}{b+c} P(-c) = -\binom{a+b+c-1}{b}$$

e

$$w_{a-1} = (-1)^{a+b-1}\binom{a+b+c-1}{b}.$$

Temos assim $w = (-1)^{a+b-1}\binom{a+b+c-1}{b} e_{a-1}$.

Podemos escrever $v = (M(a,b,c))^{-1} w$ donde

$$(M(a,b,c))^{-1} e_{a-1} = (-1)^{a+b-1}\binom{a+b+c-1}{b}^{-1} v.$$

Assim, a entrada $(a-1, a-1)$ de $(M(a,b,c))^{-1}$ é $\binom{a+b-1}{b} / \binom{a+b+c-1}{b}$. Mas por Cramer esta entrada é $\det M(a-1,b,c) / \det M(a,b,c)$, o que conclui a demonstração. ∎

1.2 Números binomiais e q-contagem

Na seção anterior supomos que o leitor conhecia a função fatorial. Vamos começar esta seção definindo $(n!)_q$.

Definição 1.7: *Seja n um natural; definimos*

$$(n!)_q = \frac{q^n - 1}{q-1} \cdot \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \cdots \frac{q^2 - 1}{q-1} \cdot \frac{q-1}{q-1}.$$

É claro que podemos também definir recursivamente $(0!)_q = 1$,

$$(n!)_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}((n-1)!)_q = (q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + q + 1)((n-1)!)_q.$$

Vejamos agora uma interpretação combinatória para estes polinômios.

Lembramos que $n!$ é o número de permutações de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Definimos o *número de inversões* $i(\pi)$ de uma permutação π como sendo o número de pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$ tais que $\pi(i) > \pi(j)$.

Proposição 1.8: *Seja n um natural; temos*

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} = (n!)_q.$$

Ou seja, o polinômio $(n!)_q$ serve para q-contar as permutações π com relação a este índice $i(\pi)$.

Dem: Usando indução, basta mostrar que

$$\sum_{\pi \in S_{n+1}} q^{i(\pi)} = (1 + q + \cdots + q^n) \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)}.$$

Pensando em permutações como listas de números, um elemento de S_{n+1} é obtido a partir de um elemento de S_n inserindo o número $n+1$ em alguma posição. Se $n+1$ for inserido no final, não criamos nenhuma nova inversão; se for inserido na penúltima posição, criamos uma inversão e finalmente se for inserido no início criamos n inversões. Em geral, a partir de uma permutação com k inversões criamos $n+1$ permutações com $k, k+1, \ldots k+n$ novas inversões, o que demonstra nossa fórmula para $(n!)_q$. ■

Definição 1.9: *Sejam n e m inteiros. Definimos*

$$\binom{n}{m}_q = \begin{cases} \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-m+1}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}, & \text{se } m > 0, \\ 1, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m < 0. \end{cases}$$

Assim $\binom{n}{m}_q \in \mathbb{C}(q)$ fica definido para quaisquer n, m inteiros. Observe que substituindo q por 1 recuperamos os números binomiais. Observe também que quando n é natural e $0 \leq m \leq n$ temos

$$\binom{n}{m}_q = \frac{(n!)_q}{(m!)_q \cdot ((n-m)!)_q}.$$

Estas definições podem ser estendidas a domínios ainda maiores mas isto está fora de nossos interesses neste capítulo.

Proposição 1.10: *Sejam n e m um inteiros. Temos*

$$\begin{aligned}\binom{n+1}{m+1}_q &= q^{n-m}\binom{n}{m}_q + \binom{n}{m+1}_q \\ &= \binom{n}{m}_q + q^{m+1}\binom{n}{m+1}_q.\end{aligned}$$

Dem: Basta substituir. ■

No caso clássico, vimos que $\binom{x}{m}$ é um polinômio de grau m na variável x. No nosso caso, podemos fazer uma afirmação semelhante. Para todo natural m existe um polinômio $P_m \in \mathbb{C}(q)[X]$ de grau m na variável X tal que $\binom{n}{m}_q = P_m(q^n)$ para todo inteiro n. De fato,

$$P_m(X) = \frac{(X-1)(X/q-1)\cdots(X/q^{m-1}-1)}{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

Mais geralmente, se $Q \in \mathbb{C}(q)[X]$ tem grau menor ou igual a m na variável X então existem $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}(q)$ tais que

$$Q(q^n) = \sum_{0\leq i\leq m} b_i \binom{n}{i}_q$$

para todo inteiro n.

Vejamos agora interpretações combinatórias para $\binom{n}{m}_q$. Para isso voltemos à interpretação de $\binom{n}{m}$ como o número de caminhos ligando vértices em um retângulo de lados m e $n-m$. Para $\binom{n}{m}_q$, cada caminho contribui com q^a, onde a é a *área* abaixo do caminho. Para um subconjunto de m elementos de $\{1, 2, \ldots n\}$, portanto, o expoente de q é a soma dos elementos do subconjunto menos $1+2+\cdots+m = m(m+1)/2$. Assim, o caminho na nossa figura na seção anterior corresponde a um termo de q^{24}. O leitor pode verificar diretamente, por exemplo, que

$$\binom{4}{2}_q = q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 1.$$

Um raciocínio combinatório simples nos dá a fórmula de recorrência, demonstrando que nossa interpretação é correta. Seja (provisoriamente) $F(a,b)$ o polinômio em q definido como acima em um retângulo $a \times b$. Se $a = 0$ ou $b = 0$ temos $F(a,b) = \binom{a+b}{a}_q = 1$. Se $a, b \geq 1$, o último trecho do caminho pode ser vertical ou horizontal. Se for horizontal, retirando este último trecho temos um caminho de mesma área em um retângulo $a \times (b-1)$. Se for vertical, retirando este último trecho temos um caminho em um retângulo $(a-1) \times b$, mas a área diminuiu de b. Somando estas contribuições temos

$$F(a,b) = F(a,b-1) + q^b F(a-1,b)$$

o que é equivalente a recorrência da proposição 1.10.

Esta interpretação é útil para ajudar a ver alguns fatos básicos sobre $\binom{n}{m}_q$. Refletindo o retângulo (e os caminhos) na diagonal $x = y$ temos $\binom{n}{m}_q = \binom{n}{n-m}_q$. O grau de $\binom{n}{m}_q$ é $m(n-m)$, a área total do retângulo; os coeficientes de 1 e de $q^{m(n-m)}$ são ambos iguais a 1, correspondendo aos caminhos no extremo de baixo e de cima. Girando o caminho de meia volta ao redor do centro do retângulo trocamos o valor da área de i por $m(n-m)-i$: isto prova que os coeficientes de q^i e de $q^{m(n-m)-i}$ são sempre iguais.

Existe uma outra definição combinatória importante para q-números binomiais usando álgebra linear sobre corpos finitos.

Proposição 1.11: *Seja $\mathbb{F}_q$ o corpo finito com q elementos (onde q é uma potência de primo) e seja V um $\mathbb{F}_q$-espaço vetorial de dimensão n; V tem exatamente $\binom{n}{m}_q$ subespaços W de dimensão m.*

Observemos que aqui, pela primeira vez, q deixa de ser uma variável puramente formal e passa a assumir valores inteiros, de tal forma que $\binom{n}{m}_q$ passa também a assumir valores inteiros. Daremos duas demonstrações independentes para esta nova interpretação combinatória de $\binom{n}{m}_q$: uma por indução, usando as fórmulas de recorrência, e outra relacionando mais diretamente este problema combinatório com o primeiro (que fala de caminhos em uma grade).

Dem: A demonstração é por indução. Chamamos provisoriamente de $f(n,m,q)$ o número de subespaços de dimensão m de $V \equiv \mathbb{F}_q^n$. Como só existe um subespaço de dimensão 0 e um subespaço de dimensão n, temos $f(n,0,q) = f(n,n,q) = 1$ para todo $n \geq 0$. Para calcular $f(n+1,m+1,q)$, consideremos $V_1 = \mathbb{F}_q^n \subset V = \mathbb{F}_q^{n+1}$. Seja $W \subset V$ um subespaço de dimensão $m+1$; a dimensão de $W_1 = W \cap V_1$ pode ser m ou $m+1$. No primeiro caso temos $f(n,m,q)$ possíveis W_1 e cada um deles precisa ser engordado com um elemento de $V - V_1$ para virar um W: existem $q^{n+1} - q^n = q^n(q-1)$ elementos de $V - V_1$ mas cada W é gerado por $q^{m+1} - q^m = q^m(q-1)$ destes elementos. Assim, temos $q^{n-m} f(n,m,q)$ subespaços W para os quais $W \cap V_1$ tem dimensão m. Por outro lado, temos $f(n,m+1,q)$ subespaços W para os quais esta dimensão é $m+1$; somando os dois casos temos

$$f(n+1,m+1,q) = q^{n-m} f(n,m,q) + f(n,m+1,q);$$

como esta recorrência é a mesma que encontramos para $\binom{n}{m}_q$ e as condições iniciais também são as mesmas temos $f(n,m,q) = \binom{n}{m}_q$.

Para a segunda demonstração, lembramos que podemos descrever um subespaço W (de dimensão m) de K^n (onde K é um corpo) via uma matriz $A \in K^{m\times n}$ de posto m: W é o espaço gerado pelas linhas de A. Para cada subespaço W existem muitas matrizes A correspondentes: mais precisamente, duas matrizes A_1 e A_2 definem o mesmo subespaço W se e somente se existe uma matriz quadrada inversível B com $A_1 = BA_2$. A forma usual de tomar um representante de cada classe de equivalência é considerar matrizes escalonadas por linhas, i.e., para cada $A \in K^{m\times n}$ de posto m existe uma única matriz inversível B tal que BA é escalonada por linhas. Lembramos que uma matriz escalonada por linhas é aquela que satisfaz as seguintes condições:

- o primeiro elemento não nulo de cada linha é sempre 1,
- em uma coluna onde aparece o primeiro elemento não nulo de uma linha todos os outros elementos são iguais a 0,
- se a linha i_1 está acima da linha i_2, o primeiro elemento não nulo da linha i_1 aparece antes do primeiro elemento não nulo da linha i_2.

Um exemplo talvez torne mais claro o significado destas condições; a matriz

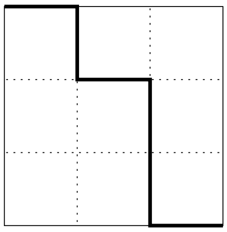
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

é escalonada por linhas, onde os $*$'s indicam posições que podem ser preenchidas com qualquer elemento de K. Chamemos de *tipo* de W (ou de A) ao conjunto dos índices (j) das colunas onde aparece o primeiro elemento não nulo de alguma linha: o exemplo acima tem tipo $\{2, 4, 5\}$; mais precisamente, variando o valor dos $*$'s temos *todas* as matrizes A de tipo $\{2, 4, 5\}$. Os tipos possíveis são os subespaços de m elementos de $\{1, 2, \ldots n\}$, que equivalem aos caminhos em um retângulo de m linhas e $n - m$ colunas: este caminho é obtido a partir da matriz jogando fora as colunas onde aparece o primeiro elemento não nulo de alguma linha (estas colunas são obrigatoriamente preenchidas pelos vetores da base canônica) e separando as posições 0 (onde devemos obrigatoriamente escrever 0) das posições $*$ (onde temos liberdade de escrever qualquer elemento de K). O caminho correspondente à matriz A acima está indicado a seguir. ■

Vejamos agora resultados análogos aos da primeira seção.

Proposição 1.12: *Para quaisquer $n \in \mathbb{N}$, $m, \ell \in \mathbb{Z}$ temos*

$$\sum_{0\le j\le n} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{\ell - j}{m}_q = q^{n(\ell-m)} \binom{\ell - n}{m - n}.$$



Dem: Por indução em n, sendo trivial o caso $n = 0$. O caso $n = 1$ é a identidade recursiva da Proposição 1.10 (apenas mudando o nome das variáveis):

$$\binom{\ell}{m}_q - \binom{\ell-1}{m}_q = q^{\ell-m}\binom{\ell-1}{m-1}_q.$$

Suponha a identidade demonstrada para n; para $n+1$ temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{0\le j\le n+1} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n+1}{j}_q \binom{\ell-j}{m}_q \\
&= \sum_{0\le j\le n+1} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \left(\binom{n}{j}_q + q^{n-j+1}\binom{n}{j-1}_q\right) \binom{\ell-j}{m}_q \\
&= \sum_{0\le j\le n} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{\ell-j}{m}_q + \sum_{1\le j\le n+1} (-1)^j q^{n+\binom{j-1}{2}} \binom{n}{j-1}_q \binom{\ell-j}{m}_q \\
&= \sum_{0\le j\le n} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{\ell-j}{m}_q - q^n \sum_{0\le j\le n} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q \binom{\ell-j-1}{m}_q \\
&= q^{n(\ell-m)}\left(\binom{\ell-n}{m-n}_q - \binom{\ell-n-1}{m-n}_q\right) = q^{(n+1)(\ell-m)}\binom{\ell-(n+1)}{m-(n+1)}_q,
\end{aligned}$$

o que demonstra a identidade para $n+1$ e conclui a demonstração. ■

Observe a total analogia entre a Proposição 1.4 e a Proposição 1.12; até a demonstração da proposição mais geral é obtida simplesmente inserindo q nos lugares apropriados.

Corolário 1.13: *Seja n um inteiro positivo e $P \in \mathbb{C}(q)[X]$ um polinômio de grau menor do que n em X. Então*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q P(q^{\ell-j}) = \sum_{0\le j\le n} (-1)^j q^{\binom{j}{2}} \binom{n}{j}_q P(q^{\ell-j}) = 0.$$

Dem: Análoga à do Corolário 1.5, usando a Proposição 1.12. ■

Finalmente, a Proposição 1.14 abaixo é análoga à Proposição 1.6.

Proposição 1.14: *Para quaisquer naturais a, b, c temos*

$$\det \begin{pmatrix} q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q & q^{\binom{b+1}{2}} \binom{b+c}{b+1}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-1}{2}} \binom{b+c}{b+a-1}_q \\ q^{\binom{b-1}{2}} \binom{b+c}{b-1}_q & q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-2}{2}} \binom{b+c}{b+a-2}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q^{\binom{b-a+1}{2}} \binom{b+c}{b-a+1}_q & q^{\binom{b-a+2}{2}} \binom{b+c}{b-a+2}_q & \cdots & q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q \end{pmatrix}$$
$$= q^{a\binom{b}{2}} \prod_{0\leq i<a, 0\leq j<b, 0\leq k<c} \frac{q^{i+j+k+2}-1}{q^{i+j+k+1}-1}.$$

Novamente o lado direito é invariante por permutações de a, b, c, o que não é evidente para o lado esquerdo. Por outro lado, o lado esquerdo é claramente um polinômio em q; o leitor é convidado a tentar demonstrar diretamente que o lado direito é um polinômio em q.

Usaremos na demonstração a equação

$$\binom{n}{m}_q = (-1)^m q^{\binom{n+1}{2}-\binom{n-m+1}{2}} \binom{-n+m-1}{m}_q,$$

que vem de escrevermos

$$\begin{aligned} \frac{\binom{n}{m}_q}{\binom{-n+m-1}{m}_q} &= \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-m+2}-1)(q^{n-m+1}-1)}{(q^{-n+m-1}-1)(q^{-n+m-2}-1)\cdots(q^{-n+1}-1)(q^{-n}-1)} \\ &= \frac{q^n-1}{q^{-n}-1}\cdot\frac{q^{n-1}-1}{q^{-n+1}-1}\cdots\frac{q^{n-m+2}-1}{q^{-n+m-2}-1}\cdot\frac{q^{n-m+1}-1}{q^{-n+m-1}-1} \\ &= (-q^n)(-q^{n-1})\cdots(-q^{n-m+2})(-q^{n-m+1}) = (-1)^m q^{\binom{n+1}{2}-\binom{n-m+1}{2}}. \end{aligned}$$

Como a demonstração segue muito de perto a da Proposição 1.6 seremos um pouco mais sucintos.

Dem: Seja

$$M_q(a,b,c) = \begin{pmatrix} q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q & q^{\binom{b+1}{2}} \binom{b+c}{b+1}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-1}{2}} \binom{b+c}{b+a-1}_q \\ q^{\binom{b-1}{2}} \binom{b+c}{b-1}_q & q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-2}{2}} \binom{b+c}{b+a-2}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q^{\binom{b-a+1}{2}} \binom{b+c}{b-a+1}_q & q^{\binom{b-a+2}{2}} \binom{b+c}{b-a+2}_q & \cdots & q^{\binom{b}{2}} \binom{b+c}{b}_q \end{pmatrix};$$

por indução, basta mostrar que

$$\frac{\det M_q(a,b,c)}{\det M_q(a-1,b,c)} == q^{\binom{b}{2}} \frac{\binom{a+b+c-1}{b}_q}{\binom{a+b-1}{b}_q}.$$

Defina

$$P_q(\ell) = \binom{c-1+\ell}{c-1}_q \binom{-a+\ell}{b}_q;$$

observe que $P_q(\ell)$ pode ser escrito como $P(q^\ell)$ onde $P \in \mathbb{C}(q)[X]$ tem grau $b+c-1$. Temos $P_q(-c+1) = P_q(-c+2) = \cdots = P_q(-2) = P_q(-1) = 0$, $P_q(a) = P_q(a+1) = \cdots = P_q(a+b-2) = P_q(a+b-1) = 0$ e

$$P_q(-c) = \binom{-1}{c-1}_q \binom{-a-c}{b}_q = (-1)^{b+c-1} q^{-\binom{c}{2}-\binom{a+b+c}{2}+\binom{a+c}{2}} \binom{a+b+c-1}{b}_q.$$

Seja $v \in (\mathbb{C}(q))^a$ dado por $v_i = (-1)^i P_q(a-i-1)$:

$$v = \left(P_q(a-1), -P_q(a-2), \ldots, (-1)^{a-2} P_q(1), (-1)^{a-1} P_q(0)\right)$$

ou seja

$$v = \left(\binom{a+c-2}{c-1}_q \binom{-1}{b}_q, \ldots, (-1)^{a-1} \binom{c-1}{c-1} \binom{-a}{b}_q \right).$$

Temos

$$v_{a-1} = (-1)^{a+b-1} q^{-\binom{a+b}{2}+\binom{a}{2}} \binom{a+b-1}{b}_q.$$

Se $w = M_q(a,b,c)v$ temos

$$\begin{aligned} w_i &= \sum_{0/lej<a} (-1)^j q^{\binom{b-i+j}{2}} \binom{b+c}{b-i+j}_q P_q(a-1-j) \\ &= (-1)^{b-i} \sum_{b-i \le k < a+b-i} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{b+c}{k}_q P_q(a+b-i-k-1) \end{aligned}$$

e usando o corolário acima temos que

$$w_i = (-1)^{b-i+1}(S_i^- + S_i^+)$$

onde

$$\begin{aligned} S_i^- &= \sum_{0 \le k < b-i} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{b+c}{k}_q P_q(a+b-i-k-1) \\ S_i^+ &= \sum_{a+b-i \le k \le b+c} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} \binom{b+c}{k}_q P_q(a+b-i-k-1). \end{aligned}$$

Mas se $0 \le k < b-i$ temos $a \le a+b-i-k-1 < a+b$, assim P_q se anula em todos os termos do somatório que define S_i^- e temos $S_i^- = 0$ para qualquer valor de i. Por outro lado, se $i < a-1$ e $a+b-i \le k \le b+c$ temos $-c < a+b-i-k-1 < 0$ e P se anula agora em todos os termos do somatório que define S_i^+. Assim temos $w_i = 0$ para $i < a-1$. Se $i = a-1$, o único termo do somatório S_i^+ que não se anula é para $k = b+c$ e temos

$$\begin{aligned} S_{a-1}^+ &= (-1)^{b+c} q^{\binom{b+c}{2}} \binom{b+c}{b+c}_q P_q(-c) \\ &= -q^{\binom{b+c}{2}-\binom{c}{2}-\binom{a+b+c}{2}+\binom{a+c}{2}} \binom{a+b+c-1}{b}_q \end{aligned}$$

e

$$w = (-1)^{a+b-1} q^{\binom{b+c}{2}-\binom{c}{2}-\binom{a+b+c}{2}+\binom{a+c}{2}} \binom{a+b+c-1}{b}_q e_{a-1}.$$

Podemos escrever $v = (M_q(a,b,c))^{-1} w$ donde

$$(M_q(a,b,c))^{-1} e_{a-1} = (-1)^{a+b-1} q^{-\binom{b+c}{2}+\binom{c}{2}+\binom{a+b+c}{2}-\binom{a+c}{2}} \binom{a+b+c-1}{b}_q^{-1} v.$$

Assim, a entrada $(a-1, a-1)$ de $(M_q(a,b,c))^{-1}$ é

$$q^{-\binom{a+b}{2}+\binom{a}{2}-\binom{b+c}{2}+\binom{c}{2}+\binom{a+b+c}{2}-\binom{a+c}{2}} \frac{\binom{a+b-1}{b}_q}{\binom{a+b+c-1}{b}_q} = q^{\binom{b}{2}} \frac{\binom{a+b-1}{b}_q}{\binom{a+b+c-1}{b}_q}$$

pois

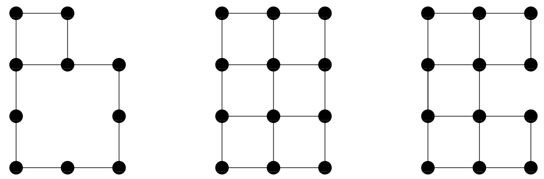
$$\binom{a+b+c}{2} - \binom{a+b}{2} - \binom{a+c}{2} + \binom{a}{2} = \binom{b+c}{2} - \binom{b}{2} - \binom{c}{2} + \binom{0}{2};$$

de fato, basta observar que $\binom{x}{2}$ é um polinômio de grau 2. Mas por Cramer esta entrada é $\det M_q(a-1,b,c)/\det M_q(a,b,c)$, o que conclui a demonstração. ■

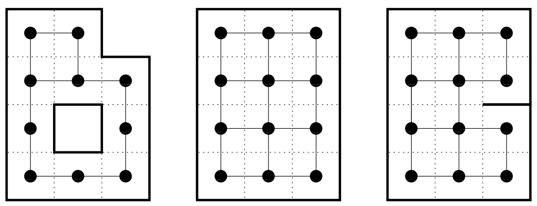
1.3 Coberturas por dominós e por lozangos

Um problema clássico de combinatória é o de contar as *coberturas por arestas de um grafo*, freqüentemente de um grafo bipartido. Uma cobertura por arestas é um conjunto de arestas do grafo tal que todo vértice é o extremo de exatamente uma aresta do conjunto. Não tentaremos discutir o problema nesta versão geral: estaremos apenas interessados em grafos que, informalmente falando, são localmente como $\mathbb{Z}^2$. O grafo $\mathbb{Z}^2$ é o grafo infinito cujos vértices são pares (i,j), com

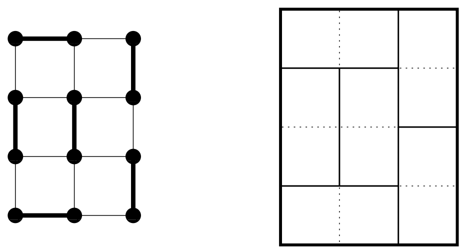
$i, j \in \mathbb{Z}$, com arestas ligando (i, j) a $(i \pm 1, j)$ e $(i, j \pm 1)$. Não veremos aqui a definição desta classe de grafos; consideraremos apenas uma subclasse já bastante rica, a dos subgrafos (não necessariamente completos) conexos e finitos de $\mathbb{Z}^2$. A figura abaixo mostra exemplos de grafos deste tipo.



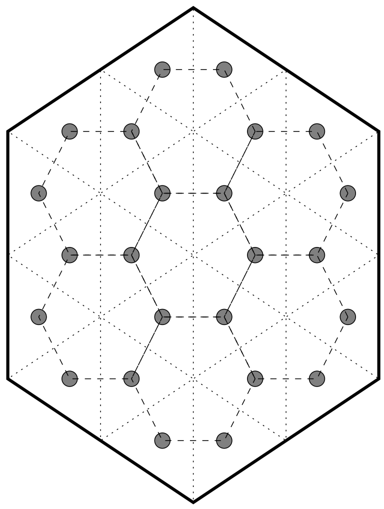
Uma forma útil de desenhar este tipo de grafo é substituir cada vértice por um quadrado unitério. Vértices vizinhos correspondem a quadrados adjacentes; quando dois vértices vizinhos em $\mathbb{Z}^2$ pertencem a nosso grafo mas a aresta que os liga não, dizemos que há uma parede entre os quadrados. Assim, um grafo vira uma região quadriculada, possivelmente com paredes internas. Os grafos da figura anterior correspondem às regiões abaixo.

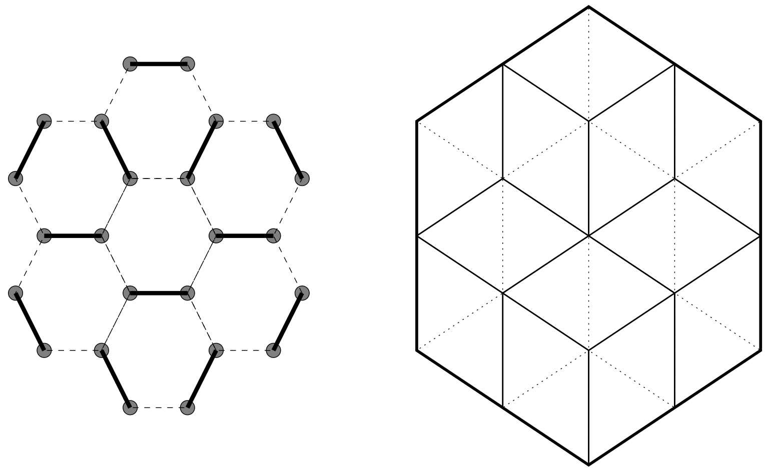


Arestas no grafo podem ser traduzidas como *dominós* dentro da região correspondente: o dominó cobre os quadrados associados aos vértices da aresta. Daí nossa identificação entre coberturas por arestas e coberturas por dominós: uma cobertura por dominós é simplesmente uma forma de encher uma caixa (a região) com dominós. A figura abaixo mostra uma cobertura por arestas de um grafo e a cobertura por dominós a ele associada.



Uma classe de regiões similar é a de regiões formadas por triângulos equiláteros de aresta 1; regiões deste tipo correspondem a subgrafos da "colméia infinita" mostrada abaixo. Ao invés de dominós, devemos considerar *lozangos* de lado 1 e ângulos internos de $\pi/3$ e $2\pi/3$; como antes, coberturas por arestas no grafo correspondem a coberturas por lozangos na região: a figura abaixo mostra um exemplo desta correspondência.

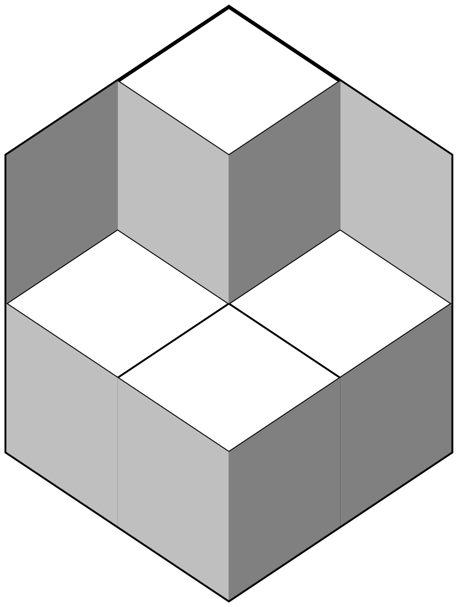




Um dos nossos objetivos neste capítulo é o de mostrar como contar coberturas. Chamando a cobertura típica de T, queremos assim calcular $\sum_T 1$. Na próxima seção atribuiremos a cada cobertura T um índice $h(T)$ que nos permitirá q-contar coberturas, i.e., calcular $\sum_T q^{h(T)}$.

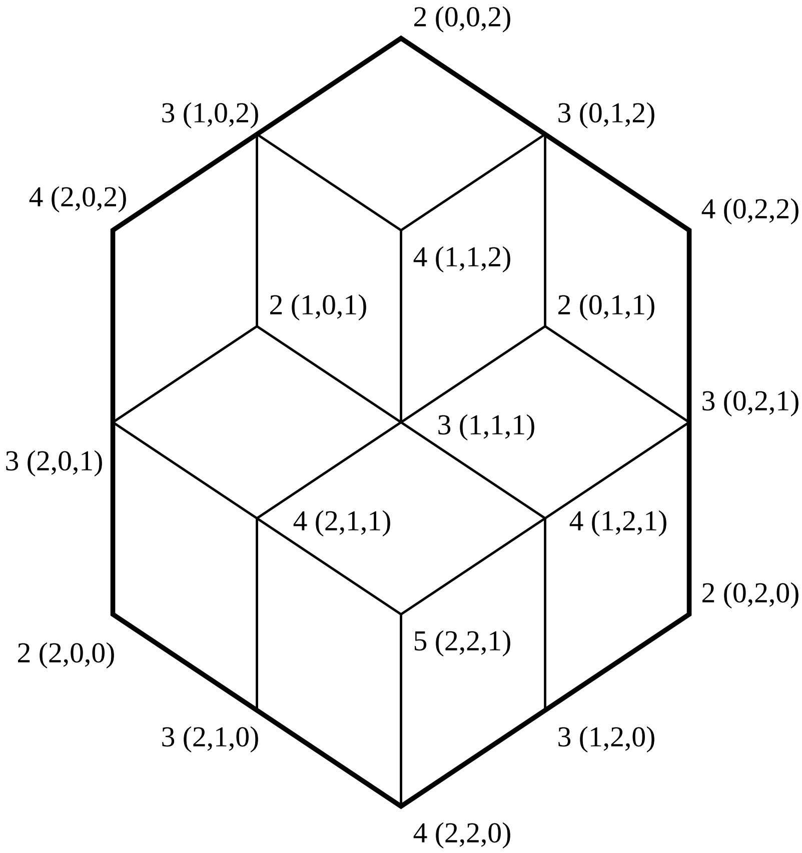
1.4 Funções altura e a altura total de uma cobertura

Uma das ferramentas mais simples e poderosas para o estudo de coberturas por dominós ou lozangos são as *funções altura*. A forma mais simples de apresentar funções altura é provavelmente olhar para uma cobertura por lozangos, talvez pintando os lozangos como abaixo.



Olhando para esta figura, é quase inevitável ver uma pilha de cubos unitários ([DT]). Se as arestas dos cubos forem paralelas aos eixos x, y e z, a figura é obtida projetando ortogonalmente a pilha sobre o plano $x + y + z = 0$. O valor de $x + y + z$ em um vértice é deduzido portanto não pela posição do vértice no plano e sim pela interpretação da figura como projeção em um plano de um objeto tridimensional. Ou seja, o valor de $x + y + z$ depende da cobertura por lozangos mas $x-y$, $x-z$ ou $y-z$ não: $x+y+z$ é nossa função altura. Na figura abaixo indicamos o valor da função altura e as coordenadas em $\mathbb{R}^3$ dos vértices dos lozangos.

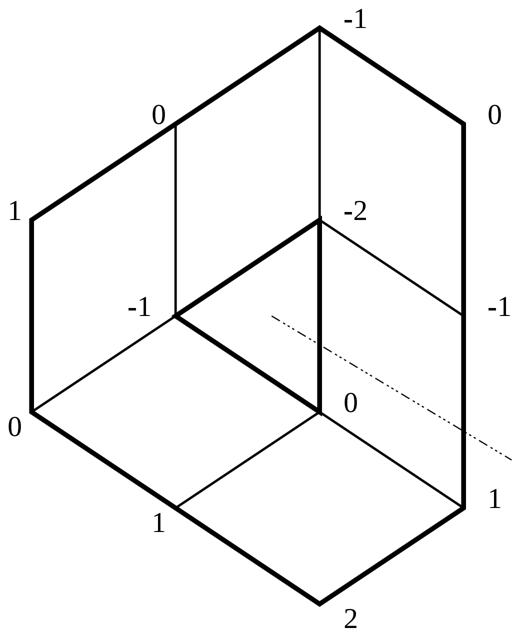
É interessante tornar independente de visualização o processo de obter a função altura de uma cobertura de lozangos. Observemos que bordos de lozangos têm três direções possíveis, correspondentes aos três eixos (em $\mathbb{R}^3$). Se andamos sobre um bordo de lozango o valor da coordenada correspondente ao eixo sobe ou desce de 1 e as demais coordenadas permanecem constantes; o valor da função altura $x+y+z$ deve portanto também subir ou descer de 1 dependendo da direção, conforme indicado pelas setas na figura abaixo. Isto nos permite calcular a diferença entre o valor da função altura em dois pontos: completamos a



definição escolhendo um ponto do bordo da região como ponto base e declarando que a função altura neste ponto é zero. Resta demonstrar que a definição acima é consistente, i.e., que o valor da função altura em um dado ponto independe da escolha do caminho ou, equivalentemente, que o aumento no valor da função correspondente a um caminho fechado é sempre zero.

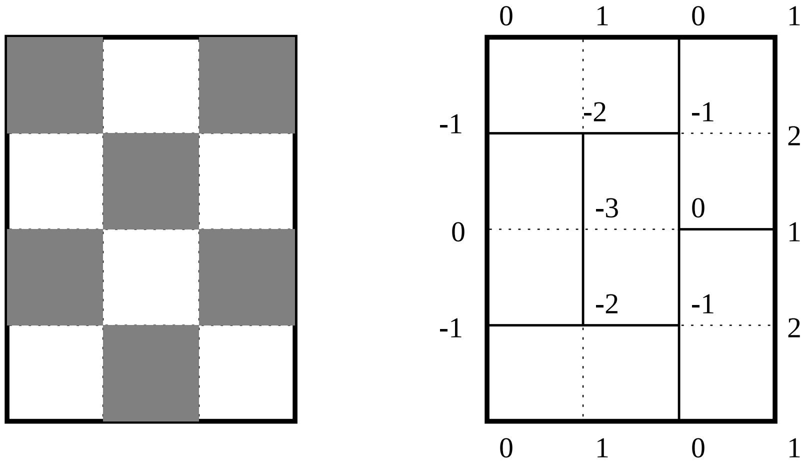
Vemos que as setas orientam os bordos de triângulos equiláteros, no sentido anti-horário para triângulos com vértice para a esquerda e no sentido horário para triângulos com vértice para a direita. Se mantivermos todas as arestas este padrão de setinhas (uma espécie de 1-forma discreta) não pode ser *integrado*, i.e., não existe uma função tal que o padrão de setinhas descreva a diferença entre o valor da função em pontos vizinhos. Voltando à analogia com formas diferenciais, isto ocorre porque o contorno de um triângulo tem integral 3 ou -3, ou seja, a forma não é exata. Se juntarmos os triângulos dois a dois em uma cobertura por lozangos e eliminarmos as arestas interiores aos lozangos então a integral ao redor de cada lozango passa a ser 0 e a 1-forma passa a ser pelo menos fechada.

Se a região for simplesmente conexa podemos concluir que a 1-forma é exata e integrá-la para obter a função altura. Se a região *não* for simplesmente conexa, nem sempre podemos definir globalmente uma função altura (da mesma forma que não podemos definir uma função argumento em $\mathbb{R}^2 - \{0\}$). Podemos ou introduzir um corte ou definir um conceito de *seção altura* ([STCR]). Aqui consideraremos apenas regiões simplesmente conexas de modo que não discutiremos estas dificuldades.



Esta segunda forma de definir a função altura (localmente via diferenças) generaliza-se facilmente para dominós. Pintamos os quadrados de branco e preto; definimos que ao andar pelo bordo de um dominó o valor da função altura aumenta de 1 (resp., diminui de 1) se o quadrado à esquerda do caminho é branco (resp., preto). Em outras palavras, o bordo de quadrados brancos (resp. pretos) é orientado no sentido anti-horário (resp. horário). Como no caso dos lozangos, isto nos permite associar uma função altura a cada cobertura por dominós de uma região simplesmente conexa. A figura abaixo mostra a função altura associada a uma cobertura por dominós.

Funções altura permitem demonstrar que o espaço das coberturas por lozangos ou dominós de regiões simplesmente conexas são conexos via alguns movimentos simples chamados *flips* ([T], [STCR]). Para dominós, um *flip* consiste em tomar dois dominós paralelos vizinhos formando um quadrado 2×2 e girá-los de $90°$; para lozangos um *flip* consiste em tomar três lozangos vizinhos formando um hexágono regular e girá-los de $60°$. O que há de especial nestes movimentos é que eles alteram o valor da função altura em um único ponto: o centro do quadrado ou hexágono. Flips podem assim ser naturalmente classificados como *positivos* (quando aumentam o valor da função altura) ou *negativos* (caso contrário). Podemos definir a *altura total* de uma cobertura como sendo o número



de flips positivos menos o número de flips negativos usados para chagar na cobertura em questão a partir de uma cobertura fixa, chamada de *cobertura base*. Equivalentemente, podemos calcular a altura total de uma cobertura tomando a função altura para a cobertura, subtraindo daí a função altura para a cobertura base, somando o valor desta diferença sobre todos os vértices de dominó (resp., lozango) e dividindo o total por 4 (resp., 3). Para o caso de coberturas por lozangos, a altura total é simplesmente o número de cubinhos na pilha de cubos correspondente. Denotaremos a altura total de uma cobertura T por $h(T)$.

1.5 Matrizes de Kasteleyn

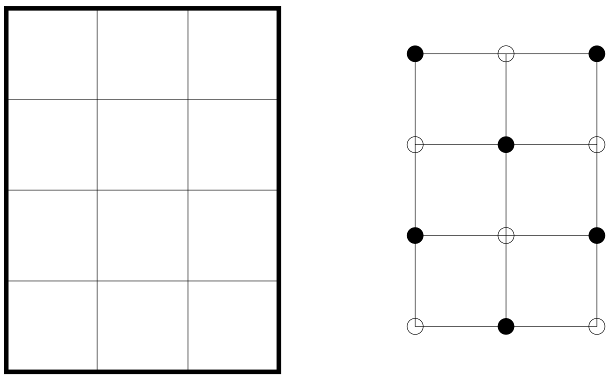
Kasteleyn resolveu o problema de contar coberturas por dominós de um retângulo $n \times m$ calculando o determinante de uma matriz. Veremos como usar o determinante de uma matriz K com coeficientes da forma $\pm q^e$, $e \in \mathbb{Z}$, para q-contar as coberturas por dominós de uma região: como esta matriz é uma generalização da contruida por Kasteleyn vamos chamá-la de *matriz de Kasteleyn*.

Lembramos que a matriz de adjacência A de um grafo é uma matriz simétrica com uma linha (e uma coluna) correspondente a cada vértice do grafo. O coeficiente a_{ij} é igual a 1 se os vértices i e j forem adjacentes e 0 caso contrário. Se o grafo for bipartido, teremos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^t & 0 \end{pmatrix}$$

desde que listemos primeiro todos os vértices brancos e depois os vértices pretos. Assim, na matriz B, linhas correspondem a vértices brancos e colunas correspondem a vértices pretos e $b_{ij} = 1$ se o vértice branco i é vizinho do vértice preto j e 0 caso contrário. Na figura abaixo mostramos um exemplo de região quadriculada e seu grafo bipartido correspondente. Neste exemplo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Cada cobertura por arestas do grafo corresponderá a um monômio não nulo na expansão de $\det(B)$; o determinante será portanto o número de coberturas "pares" menos o número de coberturas "ímpares". Em outras palavras, o número de coberturas por arestas do grafo é o *permanente* de B; infelizmente o permanente tem muito menos propriedades algébricas interessantes do que o determinante.

No caso de coberturas por dominós, podemos construir a partir de B uma matriz K tal que

$$\det(K) = \sum_T 1.$$

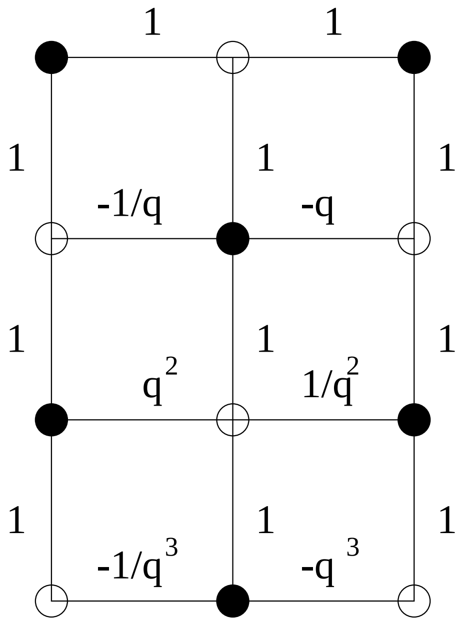
A mágica consiste em fazer com que o sinal do produto dos coeficientes correspondentes a uma cobertura tenha sempre o mesmo sinal que a permutação correspondente, de tal forma que as contribuições ao determinante sempre se somam. Podemos ainda construir uma matriz K_q multiplicando alguns coeficientes de K por potências de q de tal forma que

$$\det(K_q) = \sum_T q^{h(T)}.$$

Vejamos um exemplo: na figura abaixo indicamos os coeficientes a serem introduzidos na matriz K_q perto de cada aresta. Assim, a entrada i, j de K_q tem o valor indicado na aresta que liga o vértice i branco ao vértice j preto, ou zero se não existir tal aresta (os vértices são numerados na ordem em que se lê). Temos

$$K_q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -q^{-1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -q & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q^2 & q^{-2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -q^{-3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q^3 \end{pmatrix}$$

e $\det(K) = q^3 + q^2 + 2q + 3 + 2q^{-1} + q^{-2} + q^{-3}$.



Estes coeficientes podem ser construidos da seguinte forma: tome as arestas de uma cobertura e atribua a elas coeficientes tais que o monômio correspondente traga a contribuição correta ao determinante de K_q. A seguir, tome uma sub-árvore maximal do grafo contendo todas as arestas já consideradas na fase anterior e atribua a todas as novas arestas desta árvore coeficientes arbitrários (por exemplo, sempre 1). Procure agora um quadrado (i.e., uma posição de flip) tal que três das arestas já tenham coeficientes e atribua à aresta restante um coeficiente tal que o produto dos coeficientes sobre as duas arestas correspondentes ao flip positivo seja $-q$ vezes o produto dos coeficientes sobre as outras duas arestas. Repita o processo até que todas as arestam tenham recebido coeficientes.

A construção garante que se uma cobertura traz a contribuição correta a $\det K_q$ então toda cobertura vizinha por um flip também traz a contribuição correta. Observe que a paridade da permutação é invertida a cada flip mas o sinal do produto dos coeficientes das arestas está sendo devidamente compensado. Se a região for simplesmente conexa então todas as coberturas são ligadas por flips, o que demonstra nossa afirmação.

O caso de coberturas por lozangos é análogo, com a diferença que flips não mais invertem a paridade da permutação. Assim, para atribuir coeficientes às arestas que não pertencem à árvore maximal devemos procurar hexágonos tais que cinco das seis arestas já receberam coeficientes e fazer com que o produto dos coeficientes das três arestas correspondentes ao flip positivo seja q vezes o produto dos coeficientes sobre as outras três arestas.

1.6 Resultados de contagem

O método das matrizes de Kasteleyn, exposto na seção anterior, permite demonstrar vários resultados de contagem ou q-contagem de coberturas de lozangos ou dominós. Selecionamos para serem enunciados três resultados clássicos deste tipo, devidos a MacMahon [M], Kasteleyn [K] e Elkies, Kuperberg, Larsen e Propp [EKLP].

Teorema 1.15: [K] *Considere o retângulo de lados inteiros a e b; seja N o número de coberturas por dominós deste retângulo. Sejam $\alpha = \exp(2\pi i/(a+1))$ e $\beta = \exp(2\pi i/(b+1))$ Então*

$$N^4 = \prod_{i=1\ldots a, j=1\ldots b} \left(4 + \alpha^i + \alpha^{-i} + \beta^j + \beta^{-j}\right),$$

Para o próximo teorema, definimos o *diamante asteca* de lado n como sendo a união dos quadrados unitários inteiros

$$[i, i+1] \times [j, j+1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

para os quais

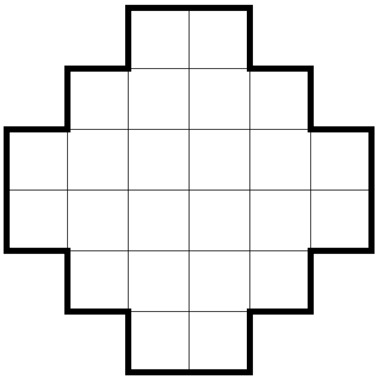
$$-n - 2 < i + j < n;$$

a figura mostra o diamante asteca de lado 3.

Teorema 1.16: [EKLP] *Considere o diamante asteca de lado n. Temos*

$$sum_T q^{h(T)} = \prod_{0 \leq k < n} (1 + q^{2k+1})^{n-k}.$$

As demonstrações destes dois teoremas serão omitidas; diga-se apenas que eles admitem demonstrações por um método razoavelmente semelhante ao que



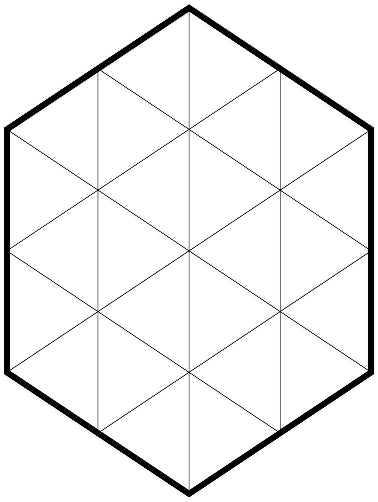
usaremos para o Teorema 1.17. Este método é conhecido como *matrizes de transferência* (transfer matrices).

Teorema 1.17: [M] *Considere o hexágono de lados inteiros a, b, c, a, b, c com todos os ângulos internos iguais a $2\pi/3$. Então*

$$\sum_T q^{h(T)} = \prod_{0 \leq i < a, 0 \leq j < b, 0 \leq k < c} \frac{q^{i+j+k+2} - 1}{q^{i+j+k+1} - 1},$$

onde T varia sobre todas as coberturas por lozangos unitários do hexágono.

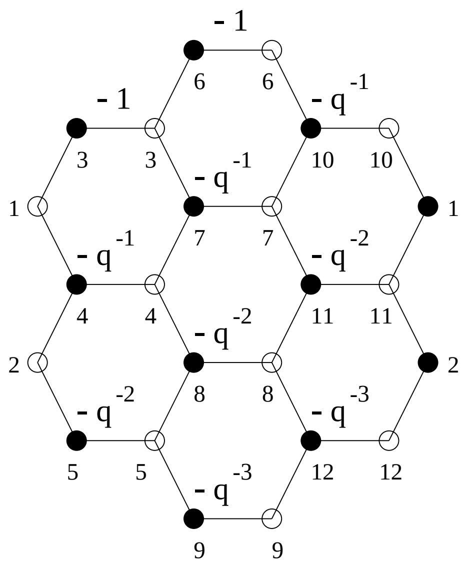
A figura mostra um hexágono de lados $2, 2, 2$. Lembramos que a interpretação tridimensional diz que estas coberturas podem ser interpretadas como pilhas de cubos.



Dem: Supomos que a é o tamanho do lado vertical e b é o tamanho do lado seguinte (no sentido anti-horário). Pelo que vimos nas seções anteriores, temos

$$\sum_T q^{h(T)} = \pm q^* \det(B)$$

onde B é definida por



sendo que o sinal e o fator q^* estão presentes para corrigir o valor do monômio correspondente à cobertura de altura zero. Os índices para os vértices podem parecer estranhos mas foram escolhidos de tal forma que se $i > a$ então os vizinhos do vértice branco i todos têm índices maiores ou iguais a i. Assim a matriz B é da forma

$$B = \begin{pmatrix} * & * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & + & * & \cdots & * & * \\ * & * & 0 & + & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & + & * \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & + \end{pmatrix},$$

onde os $+$ representam entradas da forma q^*; i.e., B tem um grande bloco triangular superior antecedido de a linhas e colunas "sujas".

Para calcular o determinante de B bastaria escaloná-la usando as linhas de baixo para limpar as duas primeiras linhas sem alterar o determinante, obtendo assim uma matriz B' da forma

$$B' = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & + & * & \cdots & * & * \\ * & * & 0 & + & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & + & * \\ * & * & 0 & 0 & \cdots & 0 & + \end{pmatrix},$$

cujo determinante é igual ao do bloquinho $a \times a$ no canto superior esquerdo; nossa missão é portanto encontrar este bloquinho $\tilde{B}$.

Mas $B' = XB$ onde X é da forma

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

a i-ésima linha ($i \leq a$) é um vetor $(v_i)^t$ tal que

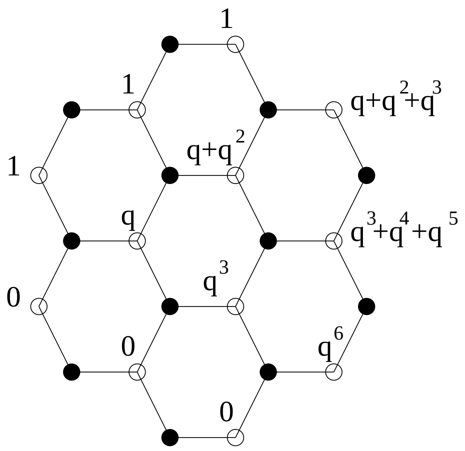
$$(v_i)^t B = (**00\cdots 00) = ((w_i)^t 00\cdots 00),$$

i.e., tal que as a primeiras coordenadas são as únicas não nulas; chamando estas a primeiras coordenadas de w_i temos

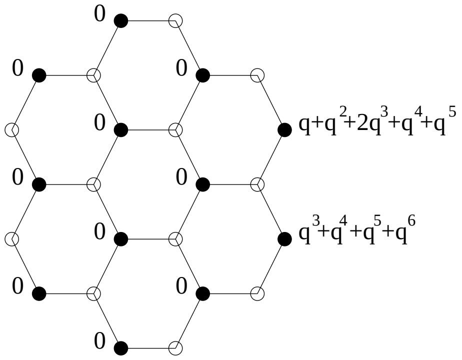
$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} (w_1)^t \\ (w_2)^t \\ \vdots \\ (w_a)^t \end{pmatrix}$$

e resta-nos encontrar os vetores v_i e w_i.

O vetor v_i associa a cada vértice branco um coeficiente em $\mathbb{C}(q)$; a figura mostra v_1 no nosso exemplo favorito (a forma como os coeficientes foram obtidos será explicada a seguir):



O vetor $(v_i)^t B$, por outro lado, associa um coeficiente a cada vértice preto. Para obter o coeficiente de um vértice devemos somar os coeficientes dos vértices vizinhos multiplicados pelos coeficientes das arestas. Vejamos w_1 no nosso exemplo:



Os coeficientes de v_i podem ser preenchidos obedecendo a ordem dos vértices brancos. Inicialmente tomamos os valores obrigatórios nas primeiras a coordenadas (1 na i-ésima coordenada, 0 nas demais). Depois preenchemos o j-ésimo vértice branco ($j > a$) com o valor necessário para que a j-ésima coordenada de $(v_i)^t B$ seja igual a 0: a estrutura da matriz B garante que isto é sempre possível de forma única. Finalmente, calculamos os primeiros a coeficientes de $(v_i)^t B$, que nos dão o vetor w_i.

Os coeficientes de B foram escolhidos de tal forma que os coeficientes de v_i são da forma

$$q^{(i-1)n+\binom{m+1}{2}}\binom{n}{m}_q$$

e o j-ésimo coeficiente de w_i é

$$q^{(b+c)(i-1)+\binom{j}{2}}\binom{b+c}{b-i+j};$$

Assim, a menos de multiplicar linhas e colunas por potências de q, $\tilde{B}$ coincide com

$$\begin{pmatrix} q^{\binom{b}{2}}\binom{b+c}{b}_q & q^{\binom{b+1}{2}}\binom{b+c}{b+1}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-1}{2}}\binom{b+c}{b+a-1}_q \\ q^{\binom{b-1}{2}}\binom{b+c}{b-1}_q & q^{\binom{b}{2}}\binom{b+c}{b}_q & \cdots & q^{\binom{b+a-2}{2}}\binom{b+c}{b+a-2}_q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q^{\binom{b-a+1}{2}}\binom{b+c}{b-a+1}_q & q^{\binom{b-a+2}{2}}\binom{b+c}{b-a+2}_q & \cdots & q^{\binom{b}{2}}\binom{b+c}{b}_q \end{pmatrix},$$

a matriz da proposição 1.14 acima. Como $\det \tilde{B} = \pm q^* \sum_T q^{h(T)}$, usando esta proposição temos

$$\sum_T q^{h(T)} = \pm q^* \prod_{0\le i<a, 0\le j<b, 0\le k<c} \frac{q^{i+j+k+2}-1}{q^{i+j+k+1}-1};$$

como o coeficiente de q^0 é igual 1 dos dois lados isto demonstra o teorema. ∎

Referências

[**CL**] J. H. Conway and J. C. Lagarias, Tilings with polyominoes and combinatorial group theory, J. Comb. Theor. **A53**, 183-208 (1990).

[**DT**] G. David and C. Tomei, The problem of the calissons, Amer. Math. Monthly, **96**, 429-431 (1989).

[**EKLP**] N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen and J. Propp, Alternating-sign matrices and domino tilings, Journal of Algebraic Combinatorics, **1**, 111-132 and 219–234 (1992).

[**K**] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, Phisica **27**, 1209-1225 (1961).

[**M**] P. A. MacMahon, Combinatory analysis, vol. 2, Cambridge University Press, 1916; reprinted by Chelsea, New York, 1960.

[**ST**] N. C. Saldanha and C. Tomei, An overview of domino and lozenge tilings, Resenhas IME-USP, **2**(2), 239–252, (1995).

[**STCR**] N. C. Saldanha, C. Tomei, M. A. Casarin Jr. and D. Romualdo, Spaces of domino tilings, Discr. Comp. Geom., to appear.

[**T**] W. P. Thurston, Conway's tiling groups, Amer. Math. Monthly, **97**, 8, 757-773 (1990).

Capítulo 2

O látice de Toda periódico

Equações (algébricas, diferenciais) que podem ser resolvidas explicitamente têm sempre algo de elementar ou de surpreendente. O látice de Toda é um sistema de equações diferenciais não lineares para o qual existe uma solução bastante explícita, que aliás não é elementar. Na verdade, existem várias mutações do látice de Toda, das quais consideramos duas nesse texto: o caso aberto e o caso periódico. O caso aberto é mais simples em vários sentidos. Sua resolução não faz uso de objetos de dimensão infinita (ou transcendentes), necessários no caso periódico. Os dois casos são representativos de uma situação freqüente: as equações são enganadoramente difíceis porque descrevem a evolução de projeções (não lineares) de objetos que, por sua vez, evoluem de forma simples. Para o látice de Toda, essas projeções são descritas em termos de uma fatoração matricial. No caso aberto, as matrizes estão em $GL(n,\mathbb{R})$. No caso periódico, o grupo de interesse — um grupo de laços, $\mathcal{L}G = \mathcal{L}GL(n,\mathbb{C})$ — é de dimensão infinita, com muitas propriedades comuns com grupos de Lie de dimensão finita. A analogia entre operações familiares em $GL(n,\mathbb{R})$ e suas contrapartidas infinitas é um dos temas da teoria dos grupos de laços. Uma excelente referência é [PS].

2.1 As equações

O látice de Toda é um modelo matemático de propagação de ondas num cristal unidimensional ([T]). Sem mais delongas, considere a hamiltoniana $H(x,y)$ para $(x,y) \in \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$H(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \exp(x_k - x_{k+1}) + P\exp(x_n - x_1),$$

onde x_k e y_k são respectivamente a posição e a velocidade da k-ésima partícula. A constante P pode ser 0 ou 1: quando P é zero, estamos tratando do látice *aberto*, e quando P é 1, do látice *periódico*. A nomenclatura indica se as partículas 1 e n estão interagindo ou não. As n partículas estão em $\mathbb{R}$, têm todas a mesma massa e ocasionalmente ultrapassam-se umas às outras. De forma mais explícita, estamos considerando as equações

$$\begin{aligned}
\dot{x_k} &= H_{y_k} = y_k, \quad k = 1, \ldots, n, \\
\dot{y_1} &= -H_{x_1} = P\exp(x_n - x_1) - \exp(x_1 - x_2) \\
\dot{y_k} &= -H_{x_k} = \exp(x_{k-1} - x_k) - \exp(x_k - x_{k+1}), \quad k = 2, \ldots, n-1, \\
\dot{y_n} &= -H_{x_n} = \exp(x_{n-1} - x_n) - P\exp(x_n - x_1),
\end{aligned}$$

onde $\dot{f}$ é a derivada no tempo da função f.

Os argumentos físicos habituais fornecem duas leis de conservação para o sistema: a própria hamiltoniana (energia) e o momento linear (que corresponde à velocidade do centro de massa do sistema). O primeiro fato milagroso associado à dinâmica desse sistema, descoberto por Flaschka ([F]), é que é possível descrever de forma simples n leis de conservação, tanto para o caso aberto quanto para o caso periódico — isso se faz em dois passos. No caso aberto, comece mudando de variáveis,

$$\begin{aligned}
a_k &= -y_k/2, \quad k = 1, \ldots, n \\
2b_k &= \exp[(x_k - x_{k+1})/2], \quad k = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned}$$

para obter

$$\begin{aligned}
\dot{a_1} &= 2b_1^2, \\
\dot{a_k} &= 2(b_k^2 - b_{k-1}^2), \quad k = 2, \ldots, n, \\
\dot{b_k} &= b_k(a_{k+1} - a_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Perdemos um grau de liberdade no processo: $2n$ variáveis (x_k, y_k) viraram $2n-1$ variáveis (a_k, b_k). O grau que falta é justamente a conservação do momento linear: os detalhes que mostram que nada se perdeu no estudo da dinâmica podem ser encontrados em [To]. Agora, considere as matrizes *tridiagonais*

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1} \\ \ldots & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & 0 & \ldots \\ b_1 & 0 & -b_2 & \ldots \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & -b_{n-1} \\ \ldots & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Uma conta mostra que as equações de evolução das variáveis a_k e b_k correspondem à evolução matricial

$$\dot{L} = [L, B] = LB - BL.$$

No caso periódico, alterações mínimas do argumento acima transformam a evolução de (x, y) na equação

$$\dot{M} = [M, C] = MC - CM,$$

onde M e C são matrizes *tridiagonais periódicas*,

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & \dots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & 0 & \dots & b_n \\ b_1 & 0 & -b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -b_{n-1} \\ -b_n & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que a diferença entre L e M, assim como entre B e C, está nas posições $(1, n)$ e $(n, 1)$ das matrizes, que apropriadamente vinculam as partículas 1 e n.

As evoluções matriciais têm uma forma especial: L e M evoluem de acordo com *pares de Lax* ([L]), e disso segue imediatamente que os autovalores de L e M não mudam no tempo, como veremos mais adiante — esse fato, descoberto poucos anos antes, orientou Flaschka na reformulação das evoluções em (x, y). Aliás, a conservação de momento e de energia correspondem à conservação do traço e da soma dos quadrados dos autovalores de L (ou M) (mais detalhes em [To]).

2.2 O caso aberto

Teorema: A solução da equação $\dot{L} = [L, B]$, $\;L(0) = L_0$, é dada por

$$L(t) = [Q(t)]^T L_0 Q(t),$$

onde $Q(t)$ é obtida pela fatoração

$$\exp(tL_0) = Q(t)R(t),$$

em que a matriz $Q(t)$ é ortogonal e $R(t)$ é triangular superior com diagonal positiva.

Esse procedimento se encontra em [S] e [STS].

Demonstração: Derivando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{L}(t) &= [\dot{Q(t)}]^T L_0 Q(t) + [Q(t)]^T L_0 \dot{Q(t)}, \\ L_0 \exp(tL_0) &= \dot{Q}(t)R(t) + Q(t)\dot{R}(t), \end{aligned}$$

das quais segue que

$$\dot{L}(t) = L(t)[Q(t)]^T\dot{Q}(t) + [\dot{Q}(t)]^T Q(t)L(t),$$
$$L(t) = [Q(t)]^T\dot{Q}(t) + \dot{R}(t)[R(t)]^{-1}.$$

Como $Q(t)$ é uma curva de matrizes ortogonais, as matrizes tangentes $[Q(t)]^T\dot{Q}(t)$ são anti-simétricas. Como $R(t)$ é uma curva de matrizes triangulares superiores, $\dot{R}(t)[R(t)]^{-1}$ também o são. Assim, a segunda equação descreve uma decomposição de $L(t)$ numa soma de matrizes anti-simétrica e triangular superior. Isso se realiza de maneira única para uma matriz arbitrária A. Escreva $A = A_- + A_0 + A_+$, onde A_- é triangular inferior, A_0 é diagonal e A_+ é triangular superior. Então

$$A = \Pi_{anti}A + \Pi_{sup}A = (A_- - (A_-)^T) + (A_0 + A_+ + (A_-)^T).$$

No caso de $L(t)$,

$$\Pi_{anti}L(t) = [Q(t)]^T\dot{Q}(t), \quad \Pi_{sup}L(t) = \dot{R}(t)[R(t)]^{-1}.$$

Agora, note que $\Pi_{anti}L(t) = B(t)$. Assim, mostramos que $\dot{L}(t) = L(t)B(t) - B(t)L(t)$. ∎

A existência de uma fatoração $\exp tL_0 = Q(t)R(t)$ com as propriedades exigidas para Q e R é fácil de justificar: Q é obtida aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt às colunas de $\exp tL_0$. O método não encontra obstruções porque $\exp tL_0$ é inversível. Unicidade também não é difícil: suponha $QR = Q_oR_o$. Então $(Q_o)^{-1}Q = R_oR^{-1}$, já que as quatro matrizes são inversíveis. Mas dessa equação aprendemos que os dois lados são matrizes ortogonais, triangulares superiores, com diagonais positivas: não restam muitas — $(Q_o)^{-1}Q = R_oR^{-1} = I$.

A solução explícita deixa claro que os autovalores de $L(t)$ são leis de conservação. Entretanto a preservação da forma tridiagonal de $L(t)$ não se vê diretamente da fórmula. O leitor pode encontrar uma outra solução explícita, bifurcando no momento adequado das contas acima, na qual $L(t)$ é descrita como uma conjugação de L_0 por uma matriz traingular superior — por essa expressão, a forma tridiagonal de $L(t)$ é obviamente mantida, mas não a simetria.

Existem muitas outras equações que são resolvidas por esse processo. De maneira mais geral, considere, para matrizes simétricas arbitrárias S e um polinômio $p(x)$ fixo, a equação

$$\dot{S} = [S, \Pi_{anti}(p(S))], \quad S(0) = S_0.$$

Sua solução é $S = Q^TS_0Q$, onde $Q = Q(t)$ é obtida pela fatoração $\exp(tp(S_0)) = QR$. A verificação dessa afirmação é idêntica à feita para o caso anterior, em que $p(x) = x$ e a condição inicial era tomada tridiagonal, por razões estritamente físicas. O caso $p(x) = \log(x)$ é especialmente interessante pelas suas relações com análise numérica ([DLT]) — como o fluxo preserva autovalores, ao longo de sua órbita a matriz $\log(S(t))$ coincide com um polinômio fixo $p(S(t))$.

Mais, todos esses fluxos comutam entre si, indicação de outra estrutura que não vamos considerar: essas equações são induzidas por hamiltonianas comutando entre si para uma escolha adequada de espaço de fase. Matrizes tridiagonais com traço constante podem ser descritas como órbitas coadjuntas (e, como tais, variedades simpléticas) associadas à ação do grupo triangular sobre si mesmo. Em particular, isso fornece uma razão geométrica para a invariância da forma tridiagonal na evolução.

Existe uma equação análoga para matrizes arbitrárias ([DLT1]), para a qual existe também uma solução explícita e uma interpretação como sistema completamente integrável (pelo menos para condições iniciais genéricas). Um último fato muito interessante associado à equação original é a convergência de $L(t)$ a uma matriz diagonal quando $t \to \pm\infty$, demonstrada por Moser [M].

2.3 O caso periódico

Vamos agora explicitar uma solução para a equação $\dot{M} = [M, C]$. A técnica a seguir foi desenvolvida por Adler e van Moerbeke [AM], e é uma área de pesquisa intensa. Apesar da analogia formal entre as equações nos dois casos, existe uma diferença substancial: C não é $\Pi_{anti}M$, porque as posições nos cantos têm sinais trocados. Isso leva a procurar um outro grupo G para o qual uma fatoração conveniente esteja relacionada a esta nova equação. Considere o *grupo de laços*, $\mathcal{L}G = \mathcal{L}GL(n, \mathbb{C})$, consistindo de funções suaves $f : \mathbb{S}^1 \to GL(n, \mathbb{C})$ do círculo unitário para as matrizes inversíveis complexas, com multiplicação definida ponto a ponto. A série de Fourier de uma função assim é da forma

$$f(z) = \ldots + \frac{f_{-2}}{z^2} + \frac{f_{-1}}{z} + a_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots,$$

onde os coeficientes a_n são matrizes decaindo rapidamente quando $|n| \to \infty$. O grupo ortogonal e o grupo de matrizes triangulares superiores são substituídos pelo subgrupo $\mathcal{L}U$ de laços $f : \mathbb{S}^1 \to U(n, \mathbb{C})$ tomando valores sobre matrizes unitárias, e o subgrupo $\mathcal{L}^+G$ dos laços que admitem continuação analítica para o interior do disco unitário consistindo de matrizes inversíveis e que sejam triangulares superiores com diagonal positiva em $z = 0$.

Para começar, não é claro, mas é verdade, que $\mathcal{L}G = \mathcal{L}U\ \mathcal{L}^+G$. O resultado que faz o papel da ortogonalização de Gram-Schmidt nesse caso pode ser encontrado em [PS] (e continua sendo Gram-Schmidt no contexto adequado). O resultado é mais estrito: os dois termos da fatoração dependem suavemente do laço inicial, e herdam a mesma suavidade — em particular, suas séries de Fourier decaem com a mesma intensidade. A demonstração de unicidade com as exigências de normalização feitas acima é um pouco diferente da habitual: vamos a ela. Suponha que o laço $L(z)$ admita duas fatorações desse tipo,

$$L(z) = U(z)R(z) = V(z)S(z).$$

Então

$$L^*(z)L(z) = R^*(z)R(z) = S^*(z)S(z), \quad z \in \mathbb{S}^1,$$

onde a estrela é a operação matricial habitual, e daí

$$(S^*)^{-1}(z)R^*(z) = S(z)R^{-1}(z), \quad z \in \mathbb{S}^1, \tag{$*$}$$

na qual o lado direito tem uma continuação analítica (inversível) para o interior do disco unitário, e o lado esquerdo pode ser escrito como

$$(S^*)^{-1}(z)R^*(z) = (S^*)^{-1}(\overline{1/z})R^*(\overline{1/z}), \quad z \in \mathbb{S}^1.$$

A segunda representação obviamente tem uma continuação analítica para *fora* do disco unitário, que pode até ser estendida para $z = \infty$. Então os dois lados da equação ($*$) descrevem um laço que admite continuação analítica para dentro e fora do círculo unitário, limitada em todo $\mathbb{C}$ — por Liouville,

$$S(z) = CR(z), \quad |z| \leq 1,$$

onde C, uma matriz constante, tem que ser triangular superior com diagonal positiva para $z = 0$. Assim, todas as fatorações do laço original são da forma

$$L(z) = U(z)C^{-1}CR(z), \quad z \in \mathbb{S}^1,$$

para $U(z)C^{-1}$ unitária, o que obriga C a ser também unitária — mais uma vez, não há muitas escolhas: $C = I$, e fica mostrada a unicidade da fatoração.

Formalmente, a decomposição do grupo induz uma decomposição aditiva na álgebra de Lie associada $\mathcal{LG}$, que consiste de séries

$$a(z) = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

sem a exigência de invertibilidade de $a(z), z \in \mathbb{S}^1$. A sub-álgebra $\mathcal{LU}$ associada ao subgrupo $\mathcal{L}U$ consiste de elementos da forma

$$\ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 - a_{-1}^* z - a_{-2}^* z^2 + \ldots,$$

com a_0 anti-hermitiana. A sub-álgebra $\mathcal{L}^+\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}^+G$ tem por elementos

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

onde agora a_0 é triangular superior. É claro que existe uma única decomposição da álgebra $\mathcal{LG}$, dada por

$$a = \Pi_{anti} a + \Pi_{sup} a,$$

onde

$$\Pi_{anti} a = \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + (\Pi_{anti} a_0) - a_{-1}^* z - a_{-2}^* z^2 + \ldots,$$
$$\Pi_{sup} a = (\Pi_{sup} a_0) + (a_1 + a_{-1}^*) z + (a_2 + a_{-2}^*) z^2 + \ldots.$$

Bom, esse é o grupo de interesse — resta ver porque. Para começar, interprete a equação original, $\dot{M} = [M, C]$, como um caso especial da família de equações

$$\dot{L}(t,z) = [L(t,z), B(t,z)], \quad z \in \mathbb{S}^1,$$

onde

$$L(t,z) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \ldots & z^* b_n \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & b_{n-1} \\ z b_n & 0 & \ldots & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

e

$$B(t,z) = \begin{pmatrix} 0 & -b_1 & 0 & \ldots & z^* b_n \\ b_1 & 0 & -b_2 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & -b_{n-1} \\ -z^* b_n & 0 & \ldots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Obviamente, $M = M(t) = L(t,1), B = B(t) = B(t,1)$. O fato surpreendente é que, para resolver essa única equação, vale a pena considerar (e resolver) *todas* as equações juntas. O acoplamento das equações só aparece no processo de solução: vem das exigências de analiticidade nas decomposições tanto a nível de grupo quanto da álgebra.

Note que para cada $z \in \mathbb{S}^1$, a forma de par de Lax das equações tem por conseqüência a preservação do espectro de $L(t,z)$, quando t varia. Isso faz pensar que obtivemos uma quantidade enorme de leis de conservação para a equação de interesse, mas essas leis são altamente dependentes: o leitor está convidado a estudar o espectro da matriz tridiagonal periódica hermitiana $L(0,z)$ para valores diferentes de $z \in \mathbb{S}^1$.

Mais interessante é o fato que as leis de conservação, independentes ou não, ganharam uma interpretação geométrica: as raízes de $p(z,\lambda) = \det(L(t,z) - \lambda I)$

não dependem do tempo — a superfície de Riemann associada a $p(z, \lambda) = 0$ expressa as leis de conservação. Isso não vem ao caso no momento: vamos em vez descrever a solução do látice de Toda periódico por meio da fatoração no grupo de laços. **Teorema:** A solução da equação $\dot{L}(t,z) = [L(t,z), B(t,z)], \quad L(0,z) = L_0(z), z \in \mathbb{S}^1$, é dada por

$$L(t,z) = [U(t,z)]^* L_0(z) U(t,z),$$

onde $U(t)$ é obtida pela fatoração

$$\exp(tL_0(z)) = U(t,z)R(t,z),$$

em que $U(t,z) \in \mathcal{L}U$ e $R(t,z) \in \mathcal{L}^+G$.

Demonstração: Imitando as contas do caso aberto, é só verificar que as fatorações foram bem escolhidas. Derivando as duas evoluções,

$$\begin{aligned} \dot{L}(t,z) &= [\dot{U}(t,z)]^* L_0 U(t,z) + [U(t,z)]^* L_0 \dot{U}(t,z), \\ L_0 \exp(tL_0) &= \dot{U}(t,z)R(t,z) + U(t,z)\dot{R}(t,z), \quad z \in \mathbb{S}^1, \end{aligned}$$

e daí, sempre para $z \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned} \dot{L}(t,z) &= L(t,z)[U(t,z)]^* \dot{U}(t,z) + [\dot{U}(t,z)]^* U(t,z) L(t,z), \\ L(t,z) &= [U(t,z)]^* \dot{U}(t,z) + \dot{R}(t,z)[R(t,z)]^{-1}. \end{aligned}$$

Como $U(t,z)$ é unitária, o laço

$$[U(t,z)]^* \dot{U}(t,z)$$

consiste de matrizes anti-hermitianas. Por sua vez, $R(t,z)$ admite uma continuação analítica para o interior do círculo unitário, que na origem é igual a uma matriz triangular superior: o mesmo vale para $\dot{R}(t,z)[R(t,z)]^{-1}$. Assim, a segunda equação descreve a decomposição de $L(t,z)$ numa soma de laços nas sub-álgebras $\mathcal{L}\mathcal{U}$ e $\mathcal{L}^+\mathcal{G}$,

$$L(t,z) = \Pi_{anti} L(t,z) + \Pi_{sup} L(t,z),$$

onde

$$\Pi_{anti} L(t,z) = [U(t,z)]^* \dot{U}(t,z), \quad \Pi_{sup} L(t,z) = \dot{R}(t,z)[R(t,z)]^{-1}.$$

Agora, a justificativa de toda a construção: $\Pi_{anti} L(t,z) = B(t,z)$. Logo, mais uma vez, $\dot{L}(t,z) = L(t,z)B(t,z) - B(t,z)L(t,z)$. ■

A partir daqui, muitos caminhos bifurcam. Mais do que no caso aberto, é difícil ver que a construção preserva a forma tridiagonal periódica de $L(t, z)$. E mais uma vez, existe uma interpretação das equações como sistemas integráveis em órbitas coadjuntas (associadas a um grupo de laços). Apesar do espaço ambiente ser de dimensão infinita, as órbitas de interesse são de dimensão finita. A dualidade necessária para identificar o dual da álgebra entretanto requer um certo cuidado técnico [DLT2]. Assim, novamente a invariância temporal da forma do laço admite uma interpretação geométrica, como no caso de dimensão finita, devida essencialmente à forma especial da órbita coadjunta em que se encontra a condição inicial $L_0(z)$. E como no caso de dimensão finita, existe uma família de equações, parametrizada por polinômios, que são resolvidas pela mesma fatoração, e cujos fluxos induzidos comutam entre si.

Uma alternativa para a solução do látice de Toda periódico, historicamente anterior, e igualmente interessante, é devida a Kac e Van Moerbeke [KM]. O laço $L(t, z)$ induz um divisor $D(t)$ na superfície de Riemann mantida fixa pela evolução. A imagem desse divisor pelo mapa de Jacobi descreve uma linha reta na imagem: nesse processo, as variáveis que linearizam a família de fluxos integráveis aparecem naturalmente.

Referências

[AM] Adler, M., Van Moerbeke, P., *Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves*, Adv. in Math. 38 (1980), 267-317.

[DNT] Deift,P., Li, L.C., Tomei, C., *Symplectic aspects of some eigenvalue algorithms*, em Important Developments in Soliton Theory, eds. A. Fokas e V. Zakharov, Springer-Verlag, 1993, 511-536.

[DLT1] Deift, P., Li, L.C., Tomei, C., *Matrix factorizations and integrable systems*, Comm. Pure Appl. Math. 49 (1989), 443-521.

[DLT2] Deift,P., Li, L.C., Tomei, C., *Loop groups, discrete versions of some classical integrable systems and rank 2 extensions*, Memoirs of the AMS 479 (1992).

[F] Flaschka, H., *The Toda Lattice I*, Phys. Rev. B 9 (1974), 1924-1925.

[KM] Kac., M., Van Moerbeke, P., *A complete solution of the periodic Toda problem*, Proc. nat. Acad. Sci. USA, 72, 8 (1975), 2879-2880.

[L] Lax, P., *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves*, Comm. Pure Appl. Math., 21 (1968), 467-490.

[M] Moser, J., *Finitely many mass points on the line under the influence of an exponential potential — an integrable system*, Dynamic Systems Theory and Applications (ed. J. Moser), Lecture Notes in Physics 38 (1975), 467-497.

[PS] Pressley, A., Segal, G., *Loop Groups*, Oxford University Press (1986), Oxford.

[S] Symes, W., *Hamiltonian group actions and integrable systems*, Physica 1D (1980),339-374.

[T] Toda, M., *Wave propagation in anharmonic lattices*, J. Phys. Soc. Japan, 23 (1967), 501-506.

[To] Tomei, C., Fluxos de Matrizes, 15^o Colóquio Brasileiro de Matemática.

Capítulo 3

Uma Visão Elementar de Supersimetria

Os físicos teóricos consideram a supersimetria uma idéia tão bela que mesmo na ausência de qualquer indício empírico direto da sua verdade, e somente um indireto de que *talvez* seja verdade ([**Wi**]), quase todas as propostas atuais de teorias fundamentais incorporam a supersimetria. Pelas suas propriedades matemáticas e conseqüências físicas marcantes, as teorias supersimétricas destacam-se entre os candidatos mais promissores para a nossa próxima visão do mundo físico. Mas o que é a supersimetria? Não é fácil formular a resposta em termos leigos. Há várias razões para isto. Em primeiro lugar, a supersimetria, do jeito que o físico a entende, combina de uma maneira não trivial a simetria do espaço-tempo e uma relação entre os dois tipos fundamentais de campos físicos, os bosônicos e os fermiônicos ([**So**]). Há muita especificidade nesta mistura, e isto oculta as propriedades essenciais das estruturas matemáticas envolvidas, apesar destas existirem independentemente de qualquer relação com o espaço-tempo. De fato, todo aluno de matemática já é familiar, sem perceber isto, com vários exemplos delas. Em segundo lugar, uma boa parte de supersimetria é *formal*, ou seja, tem mais a ver com expressões e não com objetos matemáticos "verdadeiros". Simetrias formais não tem muita graça, a qual só aparece com as interpretações. Interpretações em termos de teorias quânticas fundamentais estão longe da experiência leiga. Infelizmente as conseqüências mais notáveis e úteis aparecem só na teoria quântica. Fora deste contexto só um apelo à beleza é capaz de manter interesse. Finalmente, a abordagem matemática correta exige idéias que raramente fazem parte das matérias usuais de cursos de matemática, e o aluno de modo geral tem pouca familiaridade com elas, apesar de muitas serem bastante elementares. Tentaremos, por meio de exemplos simples, apresentar aqui uma visão elementar deste assunto tão extraordinário.

Considere a expressão xy e uma substituição ϕ para x e ψ para y. Por exemplo, $\phi = (-x)$ e $\psi = (-y)$. Temos agora $(-x)(-y)$. É tentador dizer que temos

xy de novo, mas com qual justificativa? Uma seria dizer que x e y são números, ou matrizes, ou outros objetos parecidos, e portanto as propriedades elementares destes justificam a conclusão. Ou seja, as expressões são *interpretadas* e dada a interpretação podemos *provar* que $\phi\psi = xy$. Por outro lado, numa abordagem mais formal, podemos introduzir algumas regras pelas quais uma expressão poderia ser transformada numa outra e assim, após um número finito de aplicações destas regras, $\phi\psi$ *se transforma* em xy. Assim não dizemos o que x e y *são* mas somente o que pode ser feito com expressões que os envolvem.

Digamos que α e β são quaisquer justaposições de símbolos, e admitamos as seguintes *regras de reescrita*:

$$-(-\alpha) \mapsto \alpha, \quad (\alpha)(-\beta) \mapsto -(\alpha)\beta$$

Temos agora a seguinte seqüência legitima de reescrita:

$$(-x)(-y) \mapsto -(-x)y \mapsto xy.$$

A supersimetria atua em situações intermediárias entre as interpretadas e as formais, onde certos símbolos tem interpretação em termos de objetos matemáticos "usuais", e outros não. Isto dá lugar a muita perplexidade em quem aborda o assunto pela primeira vez, especialmente aos estudiosos de matemática que tentam entender a literatura física.

Dado que contemplamos substituições pelas quais $\phi\psi$ pode ser "transformado" de volta a xy, ou seja, em que xy é "invariante", é tentador dizer que estamos diante de um "grupo de invariância". O contexto porém é muito solto e não há necessariamente um grupo a vista. Às vezes achamos grupos e às vezes não. Às vezes achamos algo que tem muitas coisa em comum com grupos mas que estritamente falando não o são. Supergrupos são exemplos destes últimos objetos. Supersimetria na sua abordagem formal é "simetria" em relação a um "grupo" que de fato não o é. É de fato um tipo de grupo quântico.

Consideremos algumas interpretações de xy. Os símbolos x e y então indicam objetos matemáticos de algum tipo e portanto ϕ e ψ devem ser objetos do mesmo tipo. Impomos a condição $\phi\psi = xy$. Se o tipo é número então simplesmente passamos de um par de números a outro par que tem o mesmo produto. Não há estrutura de grupo evidente nesta situação. Mesmo sendo possível achar um grupo de transformações $(x, y) \mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y))$ para o qual $\phi\psi = xy$, não é esta a idéia. Não estamos exigindo que ϕ e ψ *dependam* de x e y, simplesmente que *os substituam*. A situação muda um pouco se x e y agora são interpretados como *funções* definidas no plano $\mathbb{R}^2$, a saber, as funções coordenadas. Neste caso ϕ e ψ são funções também e temos $\phi(x, y)\psi(x, y) = xy$. Há muitos grupos de transformações $(x, y) \mapsto (\phi(x, y), \psi(x, y))$ que podem ser formados por tais pares de funções. O conjunto de todas as inversíveis que levam cada conjunto de nível da função xy em si mesmo, é o maior grupo deste tipo. Este tem dimensão infinita.

Uma situação mais restrita acontece quando interpretamos x e y como elementos geradores do anel polinomial $\mathcal{R} = \mathbb{R}[x, y]$. Um par de polinômios, (ϕ, ψ), satisfaz $\phi(x, y)\psi(x, y) = xy$ se e só se tem uma das seguintes formas:

$$(\lambda, \lambda^{-1}xy), \quad (\lambda^{-1}xy, \lambda), \quad (\lambda x, \lambda^{-1}y), \quad (\lambda y, \lambda^{-1}x)$$

onde $\lambda \neq 0$ é real. Ora, já que $\mathcal{R}$ é livremente gerado por x e y, qualquer substituição $x \mapsto \phi(x, y)$ e $y \mapsto \psi(x, y)$ se estende a um endomorfismo único $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$. Das quatro formas acima somente as duas últimas geram endomorfismos inversíveis e estes formam um grupo isomorfo ao grupo pseudo-ortogonal $\mathrm{O}(1, 1)$.

Um outro caso, ainda em $\mathbb{R}[x, y]$, é a expressão $x^2 + y^2$. Agora ϕ e ψ são necessariamente polinômios lineares, $\phi(x, y) = ax + by$ e $\psi(x, y) = cx + dy$, tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

pertence a $\mathrm{O}(2, \mathbb{R})$. Descobrimos o grupo ortogonal em duas dimensões.

Uma situação também interessante acontece se x e y são geradores da álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{R}^2)$ onde por xy entendemos $x \wedge y$. Temos $\phi = a + bx + cy + dxy$ e $\psi = s + tx + uy + vxy$. Do $\phi\psi = xy$ deduzimos, $as = 0$, $at + bs = 0$, $au + cs = 0$, e $bu - ct + av + ds = 1$. Entre as soluções destas equações estão aquelas com $a = s = d = v = 0$ e $bu - ct = 1$. Estas definem um grupo isomorfo a $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, dado pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} b & c \\ t & u \end{pmatrix}$$

de determinante 1. Note que este grupo contem $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$, a componente da identidade do grupo $\mathrm{O}(2.\mathbb{R})$ encontrado no exemplo de $x^2 + y^2$, um fato que usaremos em exemplos mais adiante, embora seja particular a dimensão dois.

O caso de álgebras pode ser considerado algo intermediário entre o interpretado e o formal. Para $\mathbb{R}[X]$, por exemplo, não precisamos dizer o que X *é*, só que algumas regras, tais como $X^n X^m = X^{n+m}$, são válidas. Assim há algo de "formal". Os coeficientes c_n em $\sum_n c_n X^n$, porém, são números, e portanto há também algo de "interpretado". Uma lição que podemos tirar destes exemplos é que a medida que introduzimos elementos "formais" nos objetos designados por x e y, mais possibilidade temos de perceber alguma estrutura de grupo presente, mas pelo fato de "substituição" não ser exatamente a mesma coisa que "transformação", é possível esperar outras possibilidades.

No resto deste capítulo, vamos explorar algumas estruturas algébricas inspiradas por teorias físicas. A título de conveniência, supomos que todas as álgebras são reais. O caso complexo em geral é uma fácil adaptação, e a maioria das considerações valem para corpos gerais de característica diferente de 2.

A mecânica quântica divide os objetos físicos em bosônicos e fermiônicos. Este fato é expresso algebricamente por comutação de operadores no primeiro caso e por anti-comutação no segundo. Esta diferença é fundamental para toda a teoria.

Lembramos que numa álgebra associativa $\mathcal{A}$ dizemos que a comuta com b se o *comutador* $[a,b] = ab - ba = 0$. Dizemos que a *anti-comuta* com b se o *anti-comutador* $\{a,b\} = ab + ba = 0$. Ora, se a e b comutam com c, então ab também comuta com c. Porém, se a e b *anti-comutam* com c, então ab em geral não anti-comuta com c mas *comuta* com ele. Mais ainda, se a comuta com c, e b anti-comuta com c (ou vice-versa), então ab anti-comuta com c. Se denotamos por $\mathcal{C}_0$ a subálgebra de elementos que comutam com c, e por $\mathcal{C}_1$ o *subespaço* daqueles que anti-comutam com c, então têm-se $\mathcal{C}_0\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_0$ e $\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_1\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1$, o que nos leva a introduzir as álgebras graduadas.

Seja S um semigrupo. Uma álgebra $\mathcal{A}$ é uma álgebra S-*graduada* se existem subespaços vetoriais $\mathcal{A}_s$ para $s \in S$ tais que $\mathcal{A} = \oplus_{s\in S}\mathcal{A}_s$ e $\mathcal{A}_s\mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_{sr}$. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito *homogêneo* de *grau* s se $a \in \mathcal{A}_s$. Neste caso denotamos o grau de a por $|a|$. No que segue, vamos introduzir expressões que são válidas somente para elementos homogêneos, sem chamar atenção para este fato, entendendo que a presença na expressão do grau de um elemento já indica que ele deve ser homogêneo.

Um morfismo entre duas álgebras S-graduadas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ é um morfismo de álgebras ϕ que preserva a graduação, isto é $\phi(\mathcal{A}_s) \subset \mathcal{B}_s$.

A supersimetria utiliza álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, também conhecidas como *superálgebras*. Se $\mathcal{A}$ é uma superálgebra então $\mathcal{A}_0$ é conhecida como a subálgebra *bosônica*, e $\mathcal{A}_1$ como o subespaço *fermiônico* (o qual não é uma subálgebra). No caso de dimensão finita vamos indicar em geral uma base de $\mathcal{A}_0$ por $b_1, \ldots, b_n$ e uma base de $\mathcal{A}_1$ por $f_1, \ldots, f_m$, e dizer que $\mathcal{A}$ é de *tipo* (n, m).

Seja $\mathcal{A}$ uma superálgebra. A aplicação bilinear $[\cdot,\cdot]_s$ definida por

$$[a,b]_s = ab - (-1)^{|a||b|}ba \tag{3.1}$$

chama-se o *supercomutador*, ou o *supercolchete*. Note que para dois elementos fermiônicos o supercomutador é o anti-comutador e que para todas as demais combinações de elementos homogêneos é o comutador. Para elementos não homogêneos o supercomutador é bem definido usando a bilinearidade. Nas definições daqui em diante, tais extensões além dos elementos homogêneos, quando pertinente, serão sempre subentendidas.

O supercolchete combina propriedades do comutador e do anti-comutador de uma maneira sistemática. Na literatura física vê-se freqüentemente a expressão muito feia, $[a, b\}$, com o colchete a esquerda e a chave a direita, para denotar o supercomutador.

As propriedades do supercomutador assemelham-se às propriedades do colchete de Lie, porém, com algumas mudanças de sinal. Em primeiro lugar, tem-se a relação de simetria graduada

$$[a, b]_s = (-1)^{|a||b|}[b, a]_s \tag{3.2}$$

o que poderíamos estar tentados a chamar de "supersimetria" mas esta palavra já tem outro sentido. Seja $\mathcal{A}$ agora associativa. É fácil mostrar o análogo da identidade de Jacobi:

$$[a, [b, c]_s]_s + (-1)^{|a|(|b|+|c|)}[b, [c, a]_s]_s + (-1)^{|c|(|a|+|b|)}[c, [a, b]_s]_s = 0 \tag{3.3}$$

e o análogo da propriedade de derivação:

$$[a, bc]_s = [a, b]_s c + (-1)^{|a||b|} b[a, c]_s \tag{3.4}$$

O expoente de -1 nos vários termos de (3.2), (3.3), e (3.4) pode ser descrito como o número de permutações de posições de elementos fermiônicos necessários para permutar os símbolos do termo mais a esquerda para se ter a ordem no termo em questão. Esta regra determina o sinal na maioria dos casos de expressões em superálgebras. Com cada troca de elementos fermiônicos há uma mudança de sinal.

É possível reescrever (3.3) numa maneira mais simétrica como

$$(-1)^{|a||c|}[a, [b, c]_s]_s + (-1)^{|a||b|}[b, [c, a]_s]_s + (-1)^{|c||b|}[c, [a, b]_s]_s = 0 \tag{3.5}$$

que é a maneira usual, embora nesta forma a razão para os sinais não seja tão aparente.

É notável que o anti-comutador $\{\cdot, \cdot\}$ por si só, não satisfaça nenhuma identidade parecida com a de Jacobi.

Algumas álgebras familiares já são superálgebras de forma natural. A álgebra polinomial real $\mathbb{R}[X]$ da variável X é naturalmente $\mathbb{R}[X^2] \oplus X\mathbb{R}[X^2]$. Outros dois exemplos são a álgebra exterior $\Lambda(\mathbb{V})$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ e a álgebra de Clifford $\mathcal{C}\ell(\mathbb{V}, \beta)$ de um espaço vetorial $\mathbb{V}$ com uma forma bilinear simétrica não-degenerada β. A subálgebra bosônica consiste de somas de produtos (exterior ou de Clifford, conforme o caso) de um número par de elementos de $\mathbb{V}$, e o subespaço fermiônico de somas de produtos de um número ímpar. Note que a álgebra *comutativa* $\mathbb{R}[X]$ *não é supercomutativa*, já que $[X, X]_s = 2X^2 \neq 0$

enquanto a álgebra *supercomutativa* $\Lambda(\mathbb{V})$ *não é comutativa* já que para $v, w \in \mathbb{V}$ tem-se $v \wedge w = -w \wedge v$.

No mundo de objetos $\mathbb{Z}_2$-graduados o análogo correto de comutatividade é a supercomutatividade. Álgebras comutativas no sentido usual devem ser consideradas como essencialmente não comutativas neste contexto.

Uma *superálgebra de Lie* é uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada $\mathcal{A}$ cujo produto, denotado por $[\cdot,\cdot]_s$, satisfaz as propriedades (3.2) e (3.5) acima. Qualquer superálgebra associativa é uma superálgebra de Lie com o produto sendo o supercomutador. Uma representação de uma superálgebra de Lie $\mathcal{A}$ é uma aplicação linear $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ para uma superálgebra associativa $\mathcal{B}$, preservando a graduação, tal que

$$\phi([a,b]_s) = [\phi(a), \phi(b)]_s = \phi(a)\phi(b) - (-1)^{|a||b|}\phi(b)\phi(a) \tag{3.6}$$

Vários teoremas usuais sobre álgebras de Lie têm análogos muito parecidos para superálgebras de Lie. Assim, superálgebras de Lie podem ser representadas universalmente numa superálgebra associativa envolvente. Seja $\mathcal{A}$ uma superálgebra de Lie e seja $\tilde{\mathcal{A}}$ a álgebra tensorial plena do *espaço vetorial* $\mathcal{A}$. Tem-se

$$\tilde{\mathcal{A}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \mathcal{A}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{\alpha_n}$$

onde $\alpha_i \in \{0,1\}$. Defina $\tilde{\mathcal{A}}_0$ como a soma direta de termos $\mathcal{A}_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{\alpha_n}$ onde $\alpha_i = 1$ para um número par de índices e $\tilde{\mathcal{A}}_1$ a soma direta onde $\alpha_i = 1$ para um número ímpar de índices. Seja $[\cdot,\cdot]_s^{\otimes}$ o supercomutador em $\tilde{\mathcal{A}}$ e considere o ideal bilateral $\mathcal{I}$ gerado pelos elementos $[a,b]_s - [a,b]_s^{\otimes}$ para todos os elementos $a, b \in \mathcal{A}$. Defina a *superálgebra universal envolvente* $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ como o quociente $\tilde{\mathcal{A}}/\mathcal{I}$. Não é difícil mostrar, imitando a demonstração no caso de álgebra de Lie usual, que a aplicação canônica $\mathcal{A} \to \mathcal{U}(\mathcal{A})$ é uma representação, e que qualquer representação fatora de uma maneira única através desta aplicação canônica.

Vale também o análogo do teorema de Birkoff-Witt. Seja $\mathcal{A}$ de tipo (n,m), então uma base para $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ é dado por produtos de forma $b_1^{k_1} \cdots b_n^{k_n} f_1^{\ell_1} \cdots f_m^{\ell_m}$ onde $k_i \geq 0$ são inteiros e $\ell_i \in \{0,1\}$. O caso de todos os k_i e ℓ_j iguais a zero corresponde ao elemento unidade.

Como um exemplo considere a superálgebra de Lie com $\mathcal{A}_0 = \{0\}$ e $\mathcal{A}_1$ sendo um espaço vetorial qualquer. Neste caso $[a,b]_s = 0$ para qualquer par de elementos, e o ideal $\mathcal{I}$ é gerado por todos os produtos tensoriais $a \otimes b + b \otimes a$ para todos os $a, b \in \mathcal{A}_1$. Disso vê-se que $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ é $\Lambda(\mathcal{A}_1)$, a álgebra exterior de $\mathcal{A}_1$. Como outro exemplo ilustrativo seja $\mathcal{A}$ de tipo (n,m). Assuma que $\mathcal{A}_0$ seja uma álgebra de Lie *abeliana* e que $[b_i, f_j]_s = 0$. Temos $[f_i, f_j]_s = \sum_k c_{ijk} b_k$. Vemos de (3.1) que $c_{ijk} = c_{jik}$, mas (3.3) não impõe mais nenhuma relação. Considere o caso particular de $n = 1$, $m = 2$ com $[f_1, f_1]_s = 2\alpha b$, $[f_1, f_2]_s = [f_2, f_1]_s = \beta b$, e $[f_2, f_2]_s = 2\gamma b$. Em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$ há relações $f_1^2 = \alpha b$, $f_1 f_2 + f_2 f_1 = \beta b$, e $f_2^2 = \gamma b$. É fácil ver que como espaço vetorial tem-se $\mathcal{U}(\mathcal{A}) = \mathbb{R}[b] \oplus \mathbb{R}[b] f_1 \oplus \mathbb{R}[b] f_2 \oplus \mathbb{R}[b] f_1 f_2$.

É instrutivo considerar a álgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{A})$ gerada por $\mathcal{A}$ contida em $\mathcal{U}(\mathcal{A})$. Suponha $\alpha = 1$ e $\beta = \gamma = 0$. Vamos demonstrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ contém todos os monômios de forma $b^k f_1$ para k natural.

Primeiro, $[f_1, f_2] = 2 f_1 f_2$, e portanto $f_1 f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Note que b comuta com tudo. Suponha, por indução em n, que $b^n f_2$ e $b^n f_1 f_2$ pertencem a $\mathcal{L}(\mathcal{A})$. A hipótese é verdadeira para $n = 0$. De $[f_1, f_1 f_2] = 2 b f_2$ tem-se $[f_1, b^n f_1 f_2] = 2 b^{n+1} f_2$ e assim $b^{n+1} f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$. Também $[f_1, b^{n+1} f_2] = 2 b^{n+1} f_1 f_2$ e portanto $b^{n+1} f_1 f_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$, o que completa a demonstração.

O ponto essencial deste resultado é que $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ *tem dimensão infinita*. Assim uma *superálgebra* de Lie $\mathcal{A}$ de dimensão *finita* foi usada para codificar uma *álgebra* de Lie $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ usual de dimensão *infinita*.

Interessa à física as simetrias da matriz de espalhamento S. Este é um operador unitário no espaço de Hilbert dos estados físicos que descreve os detalhes de processos elementares. Existem duas noções de simetria, (1) um operador unitário[1] U tal que $USU^* = S$, e (2) um operador auto-adjunto K tal que $[K, S] = 0$. No segundo caso, sob condições adequadas, o grupo unitário $U(\tau) = \exp(i\tau K)$ para $\tau \in \mathbb{R}$, fornecido pelo teorema espectral, satisfaz $U(\tau) S U(\tau)^* = S$, e portanto é um grupo de de simetrias unitárias. Um tal operador K é conhecido como *simetria infinitesimal*. Formalmente, se K e L são simetrias infinitesimais, então pela identidade de Jacobi temos $[[K, L], S] = 0$. Assim, ainda formalmente, as simetrias infinitesimais, multiplicados pelo número imaginário i, formam uma álgebra de Lie. Na teoria relativista do campo quântico, a álgebra de Lie de simetrias infinitesimais contém, como subálgebras, uma imagem isomorfa à álgebra de Lie do grupo de Poincaré (gerado por translações no espaço-tempo e transformações de Lorentz) e uma álgebra de Lie de dimensão finita de *simetrias internas* que relaciona propriedades de espécies diferentes de partículas (por exemplo prótons e nêutrons). Esforços iniciais de combinar de uma maneira não trivial as simetrias do espaço-tempo e as simetrias internas, o que daria uma teoria com poder de previsão maior, encontrou um obstáculo no famoso "no-go theorem" de Coleman e Mandula ([**CM**]). Este afirma que na teoria relativista de campo quântico, qualquer álgebra de Lie de dimensão finita de simetrias infinitesimais que estende a simetria de Poincaré, é necessariamente uma *soma direta* (e portanto uma combinação trivial) da álgebra de Poincaré com a álgebra de simetrias internas. A supersimetria evita este teorema postulando uma *superálgebra*

[1] Estritamente falando, pode haver o caso de um operador anti-unitário, mas consideremos somente o caso unitário.

de Lie de dimensão finita de simetrias infinitesimais, a qual, como vimos no exemplo anterior, é capaz de gerar uma álgebra de Lie de dimensão infinita e portanto foge das hipótese do teorema de Coleman-Mandula.

Retornando ao contexto físico em discussão, uma álgebra de Lie de dimensão finita de simetrias infinitesimais, pode ser, em princípio, exponenciada a uma representação unitária do grupo de Lie correspondente, formando assim um grupo de simetrias unitárias. Se porém temos uma *superálgebra* de Lie de simetrias infinitesimais, uma exponenciação, em princípio, nos levaria a elementos de um problemático grupo de Lie de dimensão infinita. Seria genial se tivermos um processo análogo ao de exponenciação que resultaria num objeto que codificaria o suposto grupo de Lie de dimensão infinita de maneira parecida com a codificação de álgebras de Lie de dimensão infinita por superálgebras de Lie de dimensão finita. Isto nos leva a considerar *supergrupos*.

Um *espaço vetorial* $\mathbb{Z}_2$*-graduado* é um espaço vetorial $\mathbb{V}$ junto com uma decomposição numa soma direta de dois subespaços $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$. A álgebra $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ tem agora uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural. Temos $L \in \mathrm{End}_i(\mathbb{V})$ se $L(\mathbb{V}_j) \subset \mathbb{V}_{i+j}$. Em termos de matrizes em blocos temos

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{00} & 0 \\ 0 & L_{11} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & L_{01} \\ L_{10} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

onde o primeiro termo é a parte bosônica e o segundo a fermiônica.

Um dos subespaços $\mathbb{V}_i$ é usualmente considerado como bosônico e o outro como fermiônico, embora a definição não faça distinção entre os dois. A $\mathbb{Z}_2$-graduação de $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ não depende de qual dos subespaços é identificado como bosônico. Uma tal identificação, quando é feita, tem que ser baseada em considerações adicionais.

Seja $\mathcal{A}$ uma superálgebra de Lie e $\mathbb{V}$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$-graduado. Por uma *representação* de $\mathcal{A}$ em $\mathbb{V}$ entendemos uma representação em $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ como definida anteriormente.

Sejam $\mathcal{A}$ uma superálgebra de Lie, $\mathcal{B}$ uma superálgebra associativa de dimensão finita e $\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma representação. Temos as exponenciais $\exp(\lambda(a)) \in \mathcal{B}$, mas em geral não podemos compô-las: $\exp(\lambda(a))\exp(\lambda(b))$ em geral não é da forma $\exp(\lambda(c))$ para algum $c \in \mathcal{A}$, nem para o caso de a e b serem restritos a uma vizinhança suficientemente pequena de zero, como seria o caso de álgebras de Lie usuais.

Para apreciar este fato considere a formula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$\exp(A)\exp(B) = \exp(C) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n\right) \tag{3.8}$$

onde cada C_n é uma combinação linear de comutadores aninhados $n-1$-vezes de A e B. Até ordem três

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A,B] + \frac{1}{12}[A,[A,B]] + \frac{1}{12}[B,[B,A]]) + \cdots$$

Esta formula obviamente é formal, mas em contextos adequados a série formal converge e C existe no mesmo sentido que A e B existem. Em particular, suponha que $A = \sum_i x_i X_i$ e $B = \sum_i y_i X_i$ onde os X_i formam uma base de uma álgebra de Lie de dimensão finita. Cada C_n então é da forma $C_n = \sum_i p_i^{(n)}(x,y) X_i$ onde os $p_i^{(n)}(x,y)$ são polinômios homogêneos de grau n em x_i e y_i. Assim podemos escrever

$$\exp\left(\sum_i x_i X_i\right)\exp\left(\sum_i y_i X_i\right) = \exp\left(\sum_i z_i X_i\right)$$

onde cada z_i é uma serie formal de potências em x e y. Para eslementos suficientemente próximos de zero, as séries convergem e a aplicação $(x,y)\mapsto z$ é a lei de produto, perto da unidade, de um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é a dada. Este procedimento para criar um grupo de Lie (ou pelo menos um grupo de Lie formal ([**Bo**])) não procede se os X_i formam uma base de uma superálgebra de Lie pois a formula de Baker-Campbell-Hausdorff envolve colchetes de Lie e não supercolchetes. Sejam agora $\mathcal{A}$ uma superálgebra de Lie de tipo (n,m), $A = \sum_i x_i b_i + \sum_j \theta_i f_i$, e $B = \sum_i y_i b_i + \sum_j \eta_i f_i$. Uma aplicação direta da formula de Baker-Campbell-Hausdorff não nos permite escrever $C = \sum_i z_i b_i + \sum_j \zeta_i f_i$, nem formalmente, se os coeficientes x, y, θ e η são números reais. Mas se assumirmos que eles também vêm de uma superálgebra, isto torna-se possível, pelo menos formalmente. O problema claro é que o comutador formal $[\theta_i f_i, \theta_j f_j]$ não pode ser interpretado como o $[\theta_i f_i, \theta_j f_j]_s$ se os θ são reais, pois para elementos fermiônicos o supercolchete se comporta como *anti-comutador*. Não obstante, se os θ são elementos fermiônicos de uma superálgebra então uma tal interpretação é possível.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas superálgebras. Definimos o produto tensorial $\mathbb{Z}_2$-*graduado* $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$. Como espaço vetorial, $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B}$ é o produto tensorial $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ usual. A multiplicação, porém, é definida por

$$(a\otimes b)(c\otimes d) = (-1)^{|b||c|} ac\otimes bd$$

A $\mathbb{Z}_2$-graduação é dada por $(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_0 = (\mathcal{A}_0\otimes\mathcal{B}_0)\oplus(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_1)$ e $(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{B})_1 = (\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_0)\oplus(\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{B}_0)$.

Suponha agora $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ associativo. Uma conta fácil demonstra

$$[a\otimes b, c\otimes d]_s = (-1)^{|b||c|}\left((-1)^{|a||c|} ca\otimes[b,d]_s + [a,c]_s\otimes bd\right) \tag{3.9}$$

Consideremos agora que b e d são "elementos" com propriedades fixas *a-priori* e que a e c são "coeficientes" cujas propriedades podemos escolher à vontade. Se estamos interessados nas propriedades dos "elementos" em relação ao supercolchete, então o lado direito tem o supercolchete conveniente $[b, d]_s$ mas também o produto incômodo bd. Porém, se assumirmos que $\mathcal{A}$ é *supercomutativo*, então $[a, c]_s = 0$ e temos

$$[a \otimes b, c \otimes d]_s = (-1)^{|b||c|} ac \otimes [b, d]_s \tag{3.10}$$

Baseado nestas considerações, é de fato fácil provar que se $\mathcal{A}$ é uma superálgebra supercomutativa e $\mathcal{L}$ é uma superálgebra de Lie, então $\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{L}$ é uma superálgebra de Lie se definirmos o supercolchete por (3.10). Note que a subálgebra bosônica, que é uma álgebra de Lie usual, corresponde a $|a| = |b|$ e $|c| = |d|$, e assim tanto a parte bosônica quanto a fermiônica de $\mathcal{L}$, isto é a *superálgebra* de Lie inteira, é codificada na álgebra de Lie usual $(\mathcal{A}\hat{\otimes}\mathcal{L})_0$. Isto nos permite usar a formula de Baker-Campbell-Hausdorff para tratar superálgebras de Lie.

Ao introduzir superálgebras, descobrimos que para explorar as suas propriedades somos forçados a estender a idéia de $\mathbb{Z}_2$-graduação a quase todos os outros objetos matemáticos em volta. Assim entramos no mundo da "supermatemática", com superespaços, supervariedades, etc. O prefixo "super", que soa tão pomposo, significa simplesmente "estendido para objetos $\mathbb{Z}_2$-graduados". Vem junto a idéia de que os elementos "fermiônicos" de qualquer um destes objetos anticomutam, e que as noções, e definições da matemática costumeira devem ser modificados pela introdução de um sinal negativo cada vez que uma permuta de dois elementos fermiônicos aparece nas fórmulas usuais. Assim comutador vira anticomutador para elementos fermiônicos, a identidade de Jacobi vira a identidade (3.3) e assim por diante.

Interprete agora a soma $A = \sum_i x_i b_i + \sum_j \theta_j f_j$ como $A = \sum_i x_i \otimes b_i + \sum_j \theta_j \otimes f_j$ onde os x_i e θ_j são bases para o subespaço bosônico e fermiônico respectivamente de uma superálgebra associativa supercomutativa que denotaremos por $\mathcal{R}^{[n|m]}$.

Podemos agora interpretar A como um elemento de $\mathcal{R}^{[n|m]}\hat{\otimes}\mathcal{A}$. Do mesmo jeito $B = \sum_i y_i b_i + \sum_j \eta_i f_j$ pode ser reescrito como $B = \sum_i y_i \otimes b_i + \sum_j \eta_j \otimes f_j$ e interpretado também como elemento de $\mathcal{R}^{[n|m]}\hat{\otimes}\mathcal{A}$. Infelizmente se precisamos trabalhar com A e B ao mesmo tempo, não podemos considerar os dois como elementos de $\mathcal{R}^{[n|m]}\hat{\otimes}\mathcal{A}$. Podemos porém considerar todos os coeficientes como elementos de $\mathcal{R}^{[2n|2m]}$ e assim tanto A quanto B como elementos de $\mathcal{R}^{[2n|2m]}\hat{\otimes}\mathcal{A}$.

Aplicando agora a formula de Baker-Campbell-Hausdorff a $e^A e^B$ e usando (3.10), vemos que podemos escrever $e^A e^B = e^C$ onde $C = \sum_i z_i \otimes b_i + \sum_j \zeta_j \otimes f_j$ e os coeficientes z_i e ζ_j são séries formais de potências em x_i, y_i, θ_j e η_j. Tais séries formais podem ser um pouco simplificadas. Devido à natureza anticomutativa dos elementos fermiônicos de $\mathcal{R}^{[2n|2m]}$, qualquer produto destes com mais que $2m$ elementos é zero e qualquer outro produto é igual a um da forma

$\theta_1^{\mu_1}\theta_2^{\mu_2}\cdots\theta_m^{\mu_m}\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_m^{\nu_m}$ onde $\mu_i,\ \nu_j \in \{0,1\}$. Escreva este produto como $\theta^\mu\eta^\nu$. Temos então $z_i = \sum_{\mu\nu} z_{i\mu\nu}\theta^\mu\eta^\nu$ e $\zeta_j = \sum_{\mu\nu} \zeta_{j\mu\nu}\theta^\mu\eta^\nu$ onde cada $z_{i\mu\nu}$ e $\zeta_{j\mu\nu}$ é uma série formal de potências agora somente nos x_i e y_i.

Neste ponto podemos adotar uma de duas atitudes. A primeira (que pode ser chamada de "híbrida") é considerar os x_i e y_i como variáveis reais, do mesmo jeito que acontece no caso de álgebra de Lie. Neste caso as séries formais convergem para $|x_i|$ e $|y_j|$ suficientemente pequenos. Temos então uma coisa parecida com uma lei de produto de um grupo de Lie local: de fato, os z_{i00} definem precisamente uma tal lei. Isto pode ser elaborado para definir um *supergrupo* de Lie como sendo um grupo de Lie cuja álgebra de Lie é precisamente a subálgebra bosônica $\mathcal{L}_0$ e que possui estrutura adicional para levar em conta o subespaço fermiônico $\mathcal{L}_1$. A outra atitude é continuar considerando os x_i e y_i como elementos bosônicos de uma superálgebra supercomutativa e considerar que o processo de exponenciação gera um *supergrupo de Lie formal* análogo a um grupo de Lie formal.

Não vamos explorar em profundidade nenhuma destas atitudes. A híbrida é que prevalece na literatura física e portanto vamos adotá-la no restante deste capítulo. Apresentamos agora alguma nomenclatura e algumas convenções da literatura física. Dada a álgebra $\mathcal{R}^{[n|m]}$, o *subespaço* $\mathbb{R}^{[n|m]}$ gerado por $x_1,\ldots,x_n$ e $\theta_1,\ldots,\theta_m$ é conhecido como *superespaço*. Os x_i e os θ_j são conhecidos como *coordenadas* do superespaço. Já que um elemento geral da álgebra tem a forma $F = \sum_\mu f_\mu\theta^\mu$ onde os f_μ são polinômios em $x_1,\ldots,x_n$, dizemos mais geralmente que $F(x,\theta)$ é uma *superfunção*, ou uma *função no superespaço* se é da forma $F(x,\theta) = \sum_\mu f_\mu(x)\theta^\mu$ onde os f_μ são agora simplesmente funções reais de x e não mais restritos a ser polinômios. Uma superfunção então é simplesmente uma coleção de funções reais. O conjunto de superfunções obviamente forma uma nova álgebra que estende $\mathcal{R}^{[n|m]}$. A derivada parcial de F em relação a x_i é definida da maneira natural,

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_\mu \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}\theta^\mu, \tag{3.11}$$

mas a derivada parcial em relação a θ_j é mais sutil. Dada uma superálgebra $\mathcal{A}$ dizemos que uma aplicação linear $\delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma *derivação fermiônica* se satisfaz a regra de Leibnitz modificada $\delta(ab) = (\delta a)b + (-1)^{|a|}a(\delta b)$. Um exemplo é $\delta(a) = [f,a]_s$ com f fermiônico. Seja agora δ_j a derivação fermiônica em $\mathcal{R}^{[n|m]}$ definida pelas formulas $\delta_j x_i = 0$, $\delta_j\theta_j = 1$, e $\delta_j\theta_k = 0$ para $k \neq j$, e estendida a elementos gerais pela regra de Leibnitz. Defina agora

$$\frac{\partial F}{\partial \theta_j} = \sum_\mu f_\mu \delta_j \theta^\mu \tag{3.12}$$

Assim temos, por exemplo,

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\theta_1\theta_2 = \theta_2, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_2}\theta_1\theta_2 = -\theta_1$$

Quanto à integração, a integral em relação a x_i é a usual de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} F(x,\theta)\,dx_i = \sum_{\mu} \left(\int_{\mathbb{R}} f_\mu(x)\,dx_i \right) \theta^\mu$$

mas em relação a θ_j é definida como sendo igual à derivada em relação à mesma variável,

$$\int F(x,\theta)\,d\theta_j = \frac{\partial}{\partial\theta_j} F(x,\theta).$$

Em particular temos, para uma variável fermiônica θ,

$$\int \theta\,d\theta = 1, \quad \int d\theta = 0.$$

Esta regra, em analogia com a integral de Lebesgue, é adotada para fazer a integral invariante em relação a translação por qualquer elemento fermiônico η que anticomute com todos os θ_k.

$$\int F(x,\ldots,\theta_j+\eta,\ldots)\,d\theta_j = \int F(x,\ldots,\theta_j,\ldots)\,d\theta_j$$

Apesar da estranheza da integral ser igual a derivada, este é o análogo correto para a integral em relação a uma variável fermiônica.

Com isto a integral de $F(x,\theta)$ sobre o superespaço fica bem definido

$$\int\cdots\int F(x,\theta)\,dx_1dx_2\cdots dx_n d\theta_1 d\theta_2\cdots d\theta_m = \int\cdots\int f_{1\cdots1}(x)\,dx_1dx_2\cdots dx_n$$

onde $f_{1\cdots1}$ é o coeficiente de $\theta_1\theta_2\cdots\theta_m$ em F.

Finalmente é necessário interpretar o que significaria a "composição"

$$F(X_1(x,\theta),\ldots,X_n(x,\theta),\Theta_1(x,\theta),\ldots,\Theta_m(x,\theta))$$

onde os X_i e Θ_j são também superfunções. Se $F(x,\theta) = \sum_\mu f_\mu \theta^\mu$ então pelo menos $\Theta_1^{\mu_1}\cdots\Theta_m^{\mu_m}$ é bem definida sendo simplesmente o produto destas superfunções. Precisamos então interpretar $f_\mu(X_1(x,\theta),\ldots,X_n(x,\theta))$. Temos

$$X_i(x,\theta) = \xi_i(x) + \zeta_i(x,\theta)$$

onde ξ_i é o coeficiente da unidade e ζ_i é nilpotente, $\zeta_i^m = 0$. Formalmente, a expansão na série de Taylor em torno de $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ só tem um número finito de termos, e portanto definimos para uma função $f(x)$ de classe $\mathcal{C}^m$

$$f(X(x,\theta)) = \sum_\alpha \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}(\xi(x))(\zeta_1)^{\alpha_1}\cdots(\zeta_n)^{\alpha_n} \tag{3.13}$$

onde a soma é sobre os multi-índices $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \leq m$.

Passamos agora a considerar certos exemplos simples. Seja $\mathcal{L}$ de tipo $(1, 1)$. Suponha que o único supercolchete não zero entre os geradores seja $[f, f]_s = 2b$. Agora é fácil calcular pela formula de Baker-Campbell-Hausdorff que

$$\exp(xb + \theta f)\exp(yb + \eta f_1) = \exp((x + y - \theta\eta)b + (\theta + \eta)f) \tag{3.14}$$

É fácil encarar isto ingenuamente como definindo um "produto de grupo"

$$(x, \theta) \cdot (y, \eta) = (x + y - \theta\eta, \theta + \eta) \tag{3.15}$$

Vamos denotar este *supergrupo* por $\mathbb{G}$. Servirá como exemplo para o resto deste capítulo.

O produto ingênuo (3.15) deixa muito a desejar. A medida que "multiplicamos" cada vez mais elementos, precisamos introduzir uma superálgebra $\mathcal{R}^{[k|k]}$ cada vez maior para expressar um número cada vez maior de "valores de parâmetros". Em geral, nenhum número finito de variáveis pode dar conta da estrutura algébrica de um supergrupo nesta visão ingênua, pois, como já vimos, a álgebra de Lie em $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ gerado por $\mathcal{L}$ tem dimensão infinita em geral, e assim, qualquer "produto de grupo" de dimensão finito é incapaz de capturar o conteúdo matemático de um supergrupo. Interpretando x e y como números reais não ajuda pois as variáveis fermiônicas não podem ser interpretados desta maneira e assim somas como $x + y - \theta\eta$ não teriam nenhuma interpretação clara.

A literatura física de modo geral simplesmente ignora estes fatos, pois as regras para fazer cálculos com superalgebras são de qualquer maneira bastante claras e eficazes. Uma abordagem um pouco mais sistemática é apresentada em ([**DeW**]) onde, em primeiro lugar, introduz-se um estoque infinito de variáveis fermiônicas $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ e, em segundo lugar, a noção de número complexo é estendida a tais chamados *supernúmeros* que são somas $z = z_b + z_s$ onde $z_b \in \mathbb{C}$ e z_s é uma série formal com coeficientes complexos de produtos finitos dos ζ_i. Num gesto poético, z_b é chamado o "corpo" de z e z_s a "alma". Embora isto produza um cálculo formal bem definido, deixa muito a desejar quanto a matemática.

Felizmente todas as dificuldades podem ser facilmente resolvidas se interpretamos supegrupos em termos de álgebras de Hopf. Deste ponto de vista se grupos clássicos são álgebras de Hopf comutativas, então supergrupos são superálgebras de Hopf supercomutativas. A álgebra universal envolvente de uma álgebra de Lie é, de uma forma natural, uma álgebra de Hopf cocomutativa na qual o processo de exponenciação para o grupo de Lie formal correspondente é simplesmente a passagem para o dual, que é uma álgebra de Hopf comutativa. O caso de superálgebras de Lie está em perfeita analogia com isto. Não vamos porém desenvolver aqui esta teoria. Veja ([**Ko**]) para um tratamento da "supermatemática" em termos de superálgebras de Hopf.

Agora que chegamos a um entendimento elementar de supergrupos, estamos prontos para abordar o conceito de supersimetria. Primeiro devemos entender o que seria uma ação de um supergrupo. Adotando a idéia de que todos os objetos devem ser entendidos como "superobjetos", isto é, a abordagem inteira deve ser em termos de $\mathbb{Z}_2$-graduação, o objeto mais simples sobre o qual um supergrupo poderia agir parece ser o superespaço $\mathbb{R}^{[n|m]}$. Na literatura física o superespaço é descrito como um "espaço no qual, além de um conjunto de coordenadas comutativas usuais $x_1, \ldots, x_n$, há também um conjunto de coordenadas anti-comutativas $\theta_1, \ldots, \theta_m$". Nas teorias físicas os $x_1, \ldots, x_n$ são considerados coordenadas de um ponto no espaço-tempo e portanto o superespaço é visto como uma extensão do espaço tempo. Não vamos tentar aqui dar qualquer sentido a esta idéia além de puramente metafórico ou formal, apesar de que a idéia possa ser levada mais a sério. Os superespaços estão entre os exemplos mais simples de "geometrias não comutativas", mas por serem supercomutativas ainda devem ser consideradas "clássicas".

Vamos abordar aqui uma versão ingênua de ação. Já que os nossos supergrupos são "exponenciações" de superálgebras de Lie, é natural tentar definir uma ação de um supergrupo "exponenciando" uma representação de uma superálgebras de Lie $\mathcal{L}$ de tipo (n, m). Sejam $\mathbb{V}$ um espaço vetorial $\mathbb{Z}_2$-graduado e $\hat{\cdot} : \mathcal{L} \to \mathrm{End}(\mathbb{V})$ um homomorfismo de superálgebras. Ingenuamente a "ação" de um "elemento" $\exp(t_1 b_1 + \cdots t_n b_n + \theta_1 f_1 + \cdots \theta_m f_m)$ do supergrupo sobre um elemento $v \in \mathbb{V}$ seria dado por $\exp(t_1 \hat{b}_1 + \cdots + t_n \hat{b}_n + \theta_1 \hat{f}_1 + \cdots + \theta_m \hat{f}_m)v$. Como antes, adotando a atitude híbrida podemos considerar os t_i como números reais, mas os θ_i devem ser considerados objetos externos.

Vamos agora construir um ação do nosso supergrupo $\mathbb{G}$. Como b comuta com tudo, temos que $\exp(t\hat{b} + \theta\hat{f}) = \exp(t\hat{b})\exp(\theta\hat{f})$. Dado que $(\theta f)^2 = 0$, o segundo fator é formalmente igual a $I + \theta\hat{f}$. Assim

$$\exp(t\hat{b} + \theta\hat{f}) = \exp(tb)(I + \theta\hat{f})$$

É fácil achar todas as representações do nosso $\mathcal{L}$ num espaço $\mathbb{V}$ qualquer. Uma conta fácil mostra que em relação à decomposição $\mathbb{V} = \mathbb{V}_0 \oplus \mathbb{V}_1$ as condições $[\hat{b}, \hat{f}] = 0$ e $\{\hat{f}, \hat{f}\} = 2\hat{b}$ impõem as seguintes formas:

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} uv & 0 \\ 0 & vu \end{pmatrix}, \quad \hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & u \\ v & 0 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

onde u e v são aplicações lineares quaisquer. Em $\mathbb{R}^{[1|1]}$ portanto temos

$$\exp(t\hat{b} + \theta\hat{f}) : (x, \alpha) \mapsto e^{tuv}(x + u\theta\alpha, \alpha + v\theta x) \tag{3.17}$$

Note que do lado direito temos elementos que não mais pertencem ao superespaço original $\mathbb{R}^{[1|1]}$ devido a presença de θ. A presença destes elementos externos usualmente causa uma certa confusão aos iniciantes, pois assim é difícil explicar como o que acabamos de definir possa ser "ação sobre $\mathbb{R}^{[1|1]}$". Este problema é contornado pelo uso de álgebras de Hopf.

Representações em $\mathbb{R}^{[2|2]}$ são mais interessantes. Um caso particularmente instrutivo é dado por

$$\hat{b} : (x, y, \alpha, \beta) \mapsto (-y, x, -\beta, \alpha) \tag{3.18}$$
$$\hat{f} : (x, y, \alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \beta, -y, x) \tag{3.19}$$

Temos como antes $\exp(t\hat{b} + \theta\hat{f}) = \exp(t\hat{b})(I + \theta\hat{f})$. Ora, $\exp(t\hat{b})$ é uma rotação no plano x-y simultaneamente com uma no plano α-β. O mais interessante é o "isomorfismo" $(I + \theta\hat{f})$ que é dado por

$$(x, y, \alpha, \beta) \mapsto (x + \theta\alpha, y + \theta\beta, \alpha - \theta y, \beta + \theta x) \tag{3.20}$$

Considere a expressão

$$x^2 + y^2 + 2\alpha\beta \tag{3.21}$$

e faça nela as substituições indicadas em (3.20). Temos

$$(x + \theta\alpha)^2 + (y + \theta\beta)^2 + 2(\alpha - \theta y)(\beta + \theta x)$$

que após um pequeno cálculo volta a $x^2 + y^2 + 2\alpha\beta$. Assim apesar da presença do elemento externo θ no "isomorfismo" acima, este desaparece e a expressão $x^2+y^2+2\alpha\beta$ é invariante pela substituição indicada. Então, além dos isomorfismos usuais da álgebra $\mathcal{R}^{[2|2]}$ que deixam a expressão invariante, esta tem simetrias adicionais por ação de supergrupos. O supergrupo que deixa a expressão (3.21) invariante é conhecido como $\mathrm{OSp}(2,2)$, uma extensão do grupo $\mathrm{O}(2) \times \mathrm{Sp}(2)$, combinando assim as estruturas ortogonais e simpléticas. Vemos que aqui retornamos ao ponto de partida de invariância por substituição. Não precisamos saber o que x, y, α, β, e θ *são*, somente quais são as regras legítimas de reescrita.

Para apreciar como a física constrói teorias supersimétricas de campos quânticos, é preciso elaborar um pouco mais as nossa construções. As teorias física são quase exclusivamente lagrangianas. Isto quer dizer que são determinadas por um funcional dos campos. Para simplicidade suponha que $\phi(x)$ é um campo escalar e $x \in \mathbb{R}^4$ é um ponto do espaço-tempo com x_4 sendo o tempo. Seja $\phi_i(x)$ a derivada parcial de ϕ em relação a x_i. Uma função de $\phi(x)$ e das suas derivadas, $\mathcal{L}(\phi(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \phi_4(x), \phi_4(x))$, onde $\mathcal{L}(v_0, v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma função em $\mathbb{R}^5$, chama-se uma *lagrangiana* de ϕ. A integral $S(\phi) = \int_{\mathbb{R}^4} \mathcal{L}(\phi(x), \phi_i(x))dx$ chama-se o *funcional ação* de ϕ (não confunda este uso da palavra "ação" com ação de grupo e outros conceitos semelhantes). Um campo ϕ é um ponto crítico deste funcional (no sentido de cálculo de variações) se e somente se satisfaz a *equação de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_0}(\phi(x), \phi_i(x)) - \sum_{i=1}^{4} \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_i}(\phi(x), \phi_i(x)) = 0$$

que é a equação dinâmica do campo físico. Uma teoria quântica parte da mesma lagrangiana mas, em vez de focalizar a equação de Euler-Lagrange, segue um processo de *quantização* que define a teoria específica. Não vamos aqui discutir este processo. Obviamente podemos generalizar estas idéias para vários campos de natureza variada (escalar, vetorial, etc.), equivalente a introduzir campos com vários componentes. Um exemplo de lagrangiana é $\phi_1^2+\phi_2^2+\phi_3^2-\phi_4^2$ cuja equação de Euler-Lagrange é a equação de onda

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_4^2} = 0$$

Considere agora uma ação $\phi \mapsto g \cdot \phi$ de um grupo de Lie G sobre os campos. Dizemos que a teoria lagrangiana é simétrica por ação de G se o conjunto de soluções das equações de Euler-Lagrange é invariante. Em determinadas condições, para criar uma teoria simétrica, é suficiente que a ação $S(\phi)$ seja invariante, isto é $S(g \cdot \phi) = S(\phi)$. É portanto importante poder achar integrais de funções de campos e suas derivadas que são invariantes por ação de grupos de Lie. Este é um assunto próprio já suficientemente sofisticado que não podemos abordar aqui. Apresentamos somente um exemplo simples. Seja $A = \sum_{i=1}^{3} A_i\, dx_i$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$ e seja G o grupo SO(3) de rotações que age sobre A de modo usual de mudança de coordenadas, a saber, se $R \in \mathrm{SO}(3)$ então $(R \cdot A)(Rx) = A(x)$. Em termos de componentes (A_1, A_2, A_3) temos então $(R \cdot A)_i(x) = \sum_j R_{ij} A_j(R^{-1}x)$. Usando o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ como métrica Riemanniana, fica óbvio que a integral de $||A||^2$ e $||dA||^2$ são invariantes por esta ação e que a integral de A_1^2 não o é. No caso particular de $A = d\phi$, temos a lagrangiana $||d\phi||^2$ com a equação de Euler-Lagrange sendo $\Delta\phi = 0$.

Teorias supersimétricas são aquelas cujo funcional S é invariante sob ação de supergrupos. Os campos agora são funções definidos não no espaço-tempo mas no superespaço que estende espaço-tempo. Aparece porém mais uma consideração que também vem da física quântica. Como já falamos, existem dois tipos de campos quânticos fundamentais, os bosônicos e os fermiônicos. O valor do campo no superespaço portanto também deve pertencer a um superespaço, isto é, poderia ter componentes bosônicos e fermiônicos.

Retornamos ao nosso simples exemplo em $\mathbb{R}^{[1|1]}$. Por uma função neste superespaço $\Lambda(x, \alpha)$ nós já entendemos uma expressão $f(x) + g(x)\alpha$ onde f e g são funções reais. Agora devemos considerar que $f(x) = F(x) + \phi(x)$ e

$g(x) = G(x) + \psi(x)$ onde $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são fermiônicos. Com isto, e com a idéia que estamos ainda lidando com a situação clássica, e tomando a atitude híbrida, podemos considerar que F e G são funções reais mas que $\phi(x)$ e $\psi(x)$ pertencem a uma superalgebra supercomutativa sem que haja qualquer relação entre estes elementos além de anticomutatividade. Ou seja, estamos contemplando uma superálgebra supercomutativa com um número não enumerável de geradores fermiônicos, a saber, alem do $\alpha \in \mathcal{R}^{[1|1]}$ todos os $\phi(x)$ e $\psi(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. A literatura física diz que ψ e ϕ são campos com "valores grassmanianos". Como base de regras formais de reescrita isto não deve causar nenhuma objeção, mas a interpretação destes objetos dentro de construções matemáticas mais estruturadas ainda é um ponto polêmico ([**Sc**]).

O nosso supergrupo $\mathbb{G}$ age sobre (x, α) pela regra (3.17), mas devemos também considerar que possa agir sobre os "componentes" (F, G, ϕ, ψ) em cada ponto como acontece com a ação de $SO(3)$ sobre os componentes de uma 1-forma, como discutido acima. Assim por exemplo a ação $\Lambda \mapsto \tilde{\Lambda}$ do "elemento" $I + \theta f$ de $\mathbb{G}$, seria dado por

$$\begin{aligned}\tilde{\Lambda}(x,\alpha) = \tilde{F}(x+u\theta\alpha) + \tilde{\phi}(x+u\theta\alpha) + \\ (\tilde{G}(x+u\theta\alpha) + \tilde{\psi}(x+u\theta\alpha))(\alpha+v\theta x)\end{aligned}$$

onde $(F, G, \phi, \psi) \mapsto (\tilde{F}, \tilde{G}, \tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ é a ação de $I + \theta f$ sobre os componentes de Λ. Temos também $\tilde{F}(x + u\theta\alpha) = \tilde{F}(x) + u\tilde{F}'(x)\theta\alpha$ conforme (3.13), e o mesmo para os outros componentes. Este exemplo não é muito natural. Um melhor, ainda sob a ação de $\mathbb{G}$, é de campos definidos no superespaço $\mathbb{R}^{[2|2]}$. Uma superfunção bosônica $\Lambda(x, y, \alpha, \beta)$ tem a forma $F + \phi\alpha + \psi\beta + G\alpha\beta$ onde F e G são bosônicos e ϕ e ψ fermiônicos. Suponha que o nosso supergrupo aja sobre $\mathcal{R}^{[2|2]}$ da forma previamente definida, e que sobre Λ aja trivialmente, isto é, Λ é um supercampo "escalar". Considere agora o "superdiferencial"

$$d\Lambda = \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Lambda}{\partial \alpha}\,d\alpha + \frac{\partial \Lambda}{\partial \beta}\,d\beta$$

Não é preciso elaborar aqui o sentido exato de $d\alpha$ e $d\beta$, considere que são ainda elementos formais. A ação de $\mathbb{G}$ sobre os componentes da superdiferencial é igual à sua ação sobre o superespaço com parâmetros $(-t, -\theta)$, isto é, com sinais trocados, em perfeita analogia com o caso de rotação de uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$. Portanto o produto interno $< d\Lambda, d\Lambda >$ onde a métrica é dada por (3.21) é de novo um supercampo escalar. A "medida" $dxdyd\alpha d\beta$ é invariante sob a ação de $\mathbb{G}$. Em primeiro lugar, é invariante pela ação da rotação $\exp(t\hat{b})$, pois $dxdy$ é invariante por rotação no plano x-y, e $\alpha\beta$ é invariante por rotação no plano α-β como já vimos. A "matriz Jacobiana" da transformação $I + \theta\hat{f}$ é formalmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ \theta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante formalmente é 1. Assim a integral

$$\int\int\int\int < d\Lambda, d\Lambda > \ dxdyd\alpha d\beta$$

é invariante pela ação do supergrupo. Esta integral se reduz a

$$2\int\int(\nabla F \cdot \nabla G + \nabla\phi \cdot \nabla\psi + G^2)\, dxdy$$

onde ∇ é o gradiente comum em relação a (x, y).

Neste ponto podemos esquecer os passos que levaram a esta integral e simplesmente considerá-lo como o funcional de um problema de cálculo de variações clássico cujas equações de Euler- Lagrange são

$$\Delta F = 2G, \qquad \Delta G = 0 \tag{3.22}$$
$$\Delta\phi = 0, \qquad \Delta\psi = 0 \tag{3.23}$$

Toda a máquina de supersimetria agora desapareceu e podemos encarar a supersimetria como simplesmente uma maneira de construir lagrangianas. As propriedade marcantes de sistemas físicos supersimétricos somente aparecem na teoria quântica, portanto equações acima são muito sem graça. O exemplo também é muito simplificado. O que é extraordinário é que os sistemas assim construídos por meio de supersimetria que estendem a simetria clássica do espaço-tempo não só constituem candidatos muito atraentes para teorias físicas básicas, mas também têm fornecido instrumentos para novas descobertas na matemática pura como invariantes de nós, tranças e variedades de dimensão três e quatro.

Podemos agora, pelo menos em palavras, resumir o que são as teorias físicas supersimétricas. São sistemas lagrangianos de campos físicos que podem ser descritos da seguinte maneira:

- Há um superespaço que estende o espaço-tempo.
- Há uma superálgebra de Lie, agindo sobre o superespaço, e que estende a álgebra de Lie das simetrias clássicas do espaço-tempo
- Há um conjunto de campos, bosônicos e fermiônicos, definidos no superespaço, que carrega uma representação da superálgebra.
- Há uma lagrangiana que é invariante pela ação do supergrupo que corresponde à superálgebra.

No final, como no exemplo anterior, podemos encarar estas teorias como simplesmente teorias lagrangianas comuns para um certo conjunto de campos, mas a supersimetria escolhe certas lagrangianas muito particulares que têm propriedades muito especiais.

Uma lagrangiana é supersimétrica se é invariante por um conjunto de regras de reescrita. Embora o funcional ação de um conjunto de campos seja escrito como $\int \mathcal{L}\, dx_1 \cdots dx_n d\theta_1 \cdots d\theta_m$, para saber se isto é supersimétrico ou não, não é necessário interpretar nem os campos, nem as coordenadas no superespaço, nem a integral. Não é necessário saber o que *são* estas coisas. Temos simplesmente uma expressão, mais sofisticada que o nosso xy no início, é verdade, mas nada essencialmente diferente. A expressão é invariante por um conjunto de regras de reescrita que são ditadas por uma superálgebra de Lie. Eis a supersimetria neste nível. Uma vez que a teoria é quantizada, a superalgebra de Lie que deu lugar ao conjunto de regras de reescrita agora se incorpora numa superálgebra de Lie de simetrias infinitesimais, e esta superálgebra de operadores traz conseqüências extraordinárias para a teoria quantizada. Isto não é mais formal mas concreto. Nisto temos o próprio milagre de supersimetria e a sua beleza tão admirada pelos físicos.

Referências

[Bo] S. Bochner "Formal Lie Groups", *Annals of Mathematics* **47** 192 (1946)

[CM] S. Coleman e J. Mandula *Physical Review* **159**, 1251 (1967)

[DeW] Bryce DeWitt "Supermanifolds", Cambridge University Press, Cambridge, 1984

[Ko] Bertram Konstant "Graded Manifolds, Graded Lie Theory, and Prequantization" *Lecture Notes in Mathematics* **570**, 177, Springer Verlag (1977)

[Sc] T. Schmitt, "Supergeometry and Quantum Field Theory, or: What is a Classical Configuration?" *Review of Mathematical Physics* **9** 993 (1997) e hep-th/9607132

[So] Martin F. Sohnius "Introducing Supersymmetry" *Physics Reports*, **128**, Nos 2 & 3, pp. 39–204, (1985)

[Wi] Frank Wiczek "The Future of Particle Physics as a Natural Science" *International Journal of Modern Physics A*, **13** 863 (1998) e hep-ph/9702371

Capítulo 4

A integral de Kontsevich

Em [**Ko**] Kontsevich definiu um invariante de nós, usando integrais múltiplas, e mostrou que o invariante é o "melhor possível" invariante de tipo finito. A classe dos invariantes de tipo finito inclui muitos invariantes já conhecidos, entre eles todos os invariantes definidos a partir de grupos quânticos.

O objetivo aqui é de descrever uma versão do invariante de Kontsevich devido a Roger Picken [**P**]. Este invariante é um pouco mais fraco que o invariante de Kontsevich mas tem a vantagem de ser mais fácil de se calcular. A idéia atrás do invariante é a seguinte. Primeiro o nó em questão é representado por uma trança. Tranças correspondem a caminhos fechados no espaço de configuracões (finitas) de pontos no plano e o invariante é construido a partir de transporte paralelo com respeito a uma certa conexão plana (conexão de Knizhnik-Zamolodchikov) no espaco de configuracões.

4.1 Tranças

Será conveniente representar o espaço tridimensional como $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ com coordenadas (z, t) onde $z = x + iy$ e $t \in \mathbb{R}$. Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_n$ aplicacões suaves do intervalo $[0, 1]$ em $\mathbb{C}$ tais que os gráficos dos z_j (ou seja as curvas $(z_j(t), t)$ em $\mathbb{C} \times [0, 1]$) são disjuntas e encontram os planos $\mathbb{C} \times 0$ e $\mathbb{C} \times 1$ em $\{1, 2, \ldots, n\} \times 0$ e $\{1, 2, \ldots, n\} \times 1$. Uma *$n$-trança* é uma união (disjunta) de n tais gráficos (os *fios* da trança). Cada fio liga um ponto $(j, 0)$ a um ponto $(S(j), 1)$ onde $j = 1, 2, \ldots, n$ e S é uma permutacão de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por exemplo, a 2-trança σ_1 é dada por

$$z_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{\pi i t}, \qquad z_2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{\pi i t}.$$

Mais geralmente, na trança σ_j, dois dos fios são dados por

$$\frac{2j+1}{2} \pm \frac{1}{2}e^{\pi i t},$$

os outros fios sendo todos verticais (ou seja da forma $j \times [0,1]$).

Se b_s é uma família contínua de tranças, onde $s \in [0,1]$ então as tranças b_0 e b_1 são chamadas de *equivalentes*.

Se b e c são duas tranças, onde b é definida por $w_1, w_2, \ldots, w_n$ e c é definida por $z_1, z_2, \ldots, z_n$ então o *produto* bc é a trança definida por $z_j(2t)$ se $0 \leq t \leq 1/2$ e por $w_j(2t-1)$ se $1/2 \leq t \leq 1$. Em outras palavras, b e c são comprimidos por um fator $1/2$ na direção t é então b é colocada em cima de c.

A *inversa* b^{-1} de uma trança b é obtida refletindo b no plano $\mathbb{C} \times 1/2$, ou seja usando as funções $z_j(1-t)$ no lugar de $z_j(t)$.

As classes de equivalência das n-tranças formam um grupo B_n com elemento neutro a trança cujos fios são todos verticais. A demonstração (bastante trabalhosa) de que B_n é um grupo lembra a demonstração de que o grupo fundamental é um grupo. De fato, B_n é o grupo fundamental do espaço X_n das configurações de n partículas (não ordenadas) no plano. Mais precisamente, se C_n é o aberto de $\mathbb{C}^n$ que consiste de todos os $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tais que $z_i \neq z_j$ se $i \neq j$ então X_n é o quociente de C_n pela ação do grupo simétrico S_n. O ponto base de X_n é $\{1, 2, \ldots, n\}$ e as funções $z_i(t)$ que definem uma n-trança também definem um caminho $\{z_1(t), \ldots, z_n(t)\}$ em X_n com pontos iniciais e finais iguais ao ponto base.

O grupo B_n é gerado por $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$. As relações $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ (se $|i-j| \neq 1$) e $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ podem ser facilmente verificadas e, de fato, toda relação entre os geradores σ_i é conseqüência destas relações.

Todo nó em $\mathbb{R}^3$ é equivalente a (isto é, pode ser deformado continuamente em) um nó que sempre gira na mesma direção em torno de um determinado eixo (teorema clássico de Alexander, que vale também para enlaçamentos, ou seja nós com mais que uma componente conexa). É fácil deduzir que todo nó ou enlaçamento orientado é equivalente ao fecho de uma trança. O *fecho* de uma n-trança é o nó ou enlaçamento obtido unindo as extremidades da trança por n curvas disjuntas no plano $y = 0$. Alternativamente, o fecho pode ser visto como a imagem da trança pela aplicação de $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ em $\mathbb{R}^3$ que leva o ponto (x, y, t) em (x, y, u) onde $u + iv = e^{2\pi(x+it)}$.

Para cada nó existem infinitas tranças cujos fechos são equivalentes ao nó. Por exemplo, se b_1 e b_2 são duas tranças é fácil ver que os fechos de b_1b_2 e b_2b_1 são equivalentes como nós. Outro exemplo: se a n-trança b está contida em $\{x \leq n\}$ então a união de b com o fio vertical $n+1 \times [0,1]$ é uma $n+1$-trança b^* e os fechos de $b^+ = \sigma_n b^*$, $b^- = \sigma_n^{-1} b^*$ e b são todos equivalentes como nós.

Se $I(K)$ é um invariante de nós (isto é: $I(K) = I(L)$ se K e L são equivalentes) então o valor de I é igual para os fechos de b, b^+ e b^-. A recíproca também vale (Teorema de Markov). Seja $J(b)$ um invariante de tranças (isto é $J(b_1) = J(b_2)$ se b_1 e b_2 são equivalentes como tranças). Se (Markov I) para todas n-tranças

c_1 e c_2 temos $J(c_1c_2) = J(c_2c_1)$ e (Markov II) para toda n-trança b contida em $\{x \leq n\}$ temos que $J(b^+) = J(b) = J(b^-)$ então J define um invariante I de nós pela regra $I(\text{fecho}(b)) = J(b)$.

Uma maneira de se construir invariantes de tranças é usando transporte paralelo, como segue.

4.2 Monodromia

Considere primeiro o exemplo prototípico de transporte paralelo, a EDO matricial

$$\frac{dW}{dt} = A(t)W(t)$$

com condição inicial $W(0) = I$ (identidade). $A(t)$ é uma função suave do intervalo $[0,1]$ nas matrizes reais $N \times N$. Existe uma única solução (suave) $W(t)$. Transporte paralelo leva um N-vetor v no vetor $W(1)v$.

Numa variedade M podemos definir transporte paralelo ao longo de caminhos suaves em M usando uma 1-forma em M com valores matriciais. A forma Ω consiste de aplicações lineares dos espaços tangentes de M nas matrizes $N \times N$. Dado um caminho $\sigma : [0,1] \to M$, temos a equação

$$\frac{dW}{dt} = \Omega(\frac{d\sigma}{dt})W(t)$$

com condição inicial $W(0) = I$.

Seja T_σ a matriz inversivel $W(1)$ (transporte paralelo ao longo de σ). Se σ e τ são caminhos em M tais que $\sigma(0) = \tau(1)$ então o caminho $\sigma\tau$ é definido por $\tau(2t)$ para $0 \leq t \leq 1/2$ e $\sigma(2t-1)$ para $1/2 \leq t \leq 1$. Pela unicidade de soluções de EDO's, temos que $T_{\sigma\tau} = T_\sigma T_\tau$.

Se a 1-forma é plana (flat) então pequenas variações do caminho, fixando os pontos iniciais e finais não afetam T_σ. Em outras palavras, T_σ é invariante por homotopias do caminho σ que fixam $\sigma(0)$ e $\sigma(1)$. Obtemos assim um homomorfismo (a *monodromia*) do grupo fundamental de M nas matrizes $N \times N$ inversíveis.

No artigo [**KZ**], os físicos Knizhnik e Zamolodchikov definiram uma conexão plana em C_n pela fórmula

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{i<j} \frac{dz_i - dz_j}{z_i - z_j} A_{ij}$$

onde, para $1 \leq i < j \leq n$, os A_{ij} são matrizes constantes complexas $N \times N$ que satisfazem as relações

- $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$ se i, j, k, l sao distintos
- $[A_{ij}, A_{jk}] = [A_{jk}, Aik] = [A_{ik}, A_{ij}]$ onde $i < j < k$.

Aqui, $[A, B]$ significa o colchete $AB - BA$.

Estas relações e propriedades das formas $(dz_i - dz_j)/(z_i - z_j) = d\log(z_i - z_j)$ garantem que a conexão é plana, ou seja que a 2-forma de curvatura da conexão é identicamente nula. A verificação deste fato pode ser encontrada no livro [**Ka**], capítulo XIX.

Voltando à situação geral, o transporte paralelo T_σ pode ser visto como limite de produtos de matrizes. Considere primeiro a equação

$$\frac{dW}{dt} = A(t)W(t).$$

Temos que

$$W(t + \Delta t) - W(t) \approx \Delta t A(t)W(t)$$

ou seja

$$W(t + \Delta t) \approx [I + \Delta t A(t)]W(t).$$

Então W(1) deveria ser o limite quando $m \to \infty$ do produto

$$(I + \Delta t_1 A(t_1))(I + \Delta t_2 A(t_2)) \cdots (I + \Delta t_m A(t_m))$$

onde $1 > t_1 > t_2 > \cdots > t_m > 0$ e $\Delta t_1 = 1 - t_1, \Delta t_2 = t_1 - t_2, \cdots$. Este produto pode ser re-escrito na forma

$$I + \sum_i \Delta t_i A(t_i) + \sum_{i<j} \Delta t_i \Delta t_j A(t_i)A(t_j) + \cdots$$

ou seja

$$W(1) = I + \int A(t_1)dt_1 + \int\int A(t_1)A(t_2)dt_1dt_2 + \cdots ,$$

os limites de integração no termo geral sendo $1 > t_1 > t_2 > \cdots > t_m > 0$ (ou seja $(t_1, t_2, \cdots , t_m)$ pertence a um simplexo aberto apropriado). Por exemplo, para A constante, é fácil verificar que o resultado é $I + A + A^2/2 + \cdots = \exp(A)$, como deveria ser.

No caso da conexão KZ, a fórmula para o transporte paralelo é

$$I + \frac{1}{2\pi i}\int \sum_{i<j} dl_{ij}(t_1)A_{ij} + \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \iint \sum_{i<j}\sum_{k<l} dl_{ij}(t_1)dl_{kl}(t_2)A_{ij}A_{kl} + \cdots$$

onde $l_{ij}(t) = \log(z_i(t) - z_j(t))$.

Se b é uma trança, a cada produto $A_{ij}A_{kl}\cdots A_{uv}$ (de m fatores) corresponde um conjunto de m pares de pontos em b (um par para cada t_i)

$$\begin{gathered}(z_i(t_1),t_1),(z_j(t_1),t_1)\\(z_k(t_2),t_2),(z_l(t_2),t_2)\\\cdots\\(z_u(t_m),t_m),(z_v(t_m),t_m)\end{gathered}$$

onde $1 > t_1 > t_2 > \cdots > t_m > 0$. Este é um exemplo de um diagrama em b. O invariante será definido re-escrevendo a fórmula $I + \cdots$ acima em termos de diagramas.

4.3 Diagramas

Seja b uma trança. Um *par* em b consiste de dois pontos distintos em $b \cap \mathbb{C}\times(0,1)$ (não necessariamente no mesmo nivel. Um *m-diagrama* (chord diagram) em b consiste de m pares disjuntos em b. Dois diagramas em b são *equivalentes* se existe um difeomorfismo de b fixando as extremidades de b e levando um diagrama no outro. Por exemplo, numa 1-trança, todos os 1-diagramas são equivalentes e há exatamente três classes de equivalencia de 2-diagramas. Um diagrama numa 1-trança pode ser representado por uma palavra $a_1a_2\ldots a_{2m}$ (lendo de cima para baixo). Cada par é representado por uma letra. Assim os três tipos de 2-diagramas numa 1-trança são $aabb$, $abab$ e $abba$. Observe que $aabb$ e $bbaa$ representam o mesmo diagrama.

Seja $D_m(b)$ o conjunto (finito) das classes de equivalência de m-diagramas em b e $\mathbb{C}D_m(b)$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial das combinações $\mathbb{C}$-lineares formais (finitas) de elementos de $D_m(b)$.

Se $\alpha \in D_m(b_1)$ e $\beta \in D_n(b_2)$ então o *produto* $\alpha\beta \in D_{m+n}(b_1b_2)$ é definido da maneira óbvia, colocando α em cima de β. Este produto se estende linearmente a um produto $\mathbb{C}D_m(b_1) \times \mathbb{C}D_m(b_2) \to \mathbb{C}D_{m+n}(b_1b_2)$.

Seja agora D um diagrama em b e xx,yy dois pares de D. Retire um dos x's e insira-o imediatamente abaixo de (resp acima de) cada um dos y's, obtendo assim diagramas D_1, D_2 (resp D_3 e D_4). Por exemplo, se (numa 1-trança) $D = abcadbdc$, podemos escolher os pares bb e dd, obtendo assim $D_1 = abcadbdc$, $D_2 = acadbbdc$, $D_3 = acadbbdc$ e $D_4 = acadbdbc$. Uma *relação 4T* é uma relação em $\mathbb{C}D_m(b)$ do tipo

$$D_1 + D_2 - D_3 - D_4.$$

Definimos $A_m(b)$ a ser o quociente do $\mathbb{C}$-espaço vetorial pelo subespaço gerado pelas relações 4T.

Como o produto de uma relação 4T com um diagrama é uma relação 4T, o produto de diagramas induz um produto

$$A_m(b_1) \times A_n(b_2) \to A_{m+n}(b_1 b_2)$$

e consequentemente a um produto

$$A(b_1) \times A(b_2) \to A(b_1 b_2).$$

Por definição, $A(b)$ consiste de somas infinitas formais $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$ onde x_m pertence a $A_m(b)$ para $0 \leq m$. Observe que $A_0(b)$ é isomorfo a $\mathbb{C}$, gerado pelo diagrama vazio, denotado por 1.

Da mesma maneira podemos definir $D_m(S^1)$ (onde S^1 é o círculo) como m-diagramas em S^1 módulo difeomorfismos de S^1 que preservam a orientação de S^1 e $A_m(S^1)$ como o quociente de $\mathbb{C}D_m(S^1)$ pelo subespaço gerado pelas relações 4T. Um elemento de $D_m(S^1)$ pode ser representado por uma palavra cíclica composta de m pares de letras diferentes. Por exemplo, como palavras cíclicas, as seis palavras $abcbca, bcbcaa, \dots, aabcbc$ representam a mesma palavra cíclica, ou seja o mesmo elemento de $D_3(S^1)$.

De fato, $A(S^1)$ não é só um $\mathbb{C}$-espaço vetorial mas uma $\mathbb{C}$-álgebra. O produto é dado (aparentemente de forma ambígua) por juxtaposição de palavras. Por exemplo, o produto de $abba$ e $xyxy$ é $abbaxyxy$. Mas, usando as relações 4T, temos

$$xabbayxy + abbxayxy = axbbayxy + abbaxyxy$$

$$axbbayxy + abxbayxy = abxbayxy + abbxayxy.$$

Segue-se que, em $A_4(S^1)$,

$$abbaxyxy = xabbayxy.$$

Mas, tratando-se de palavras cíclicas,

$$xabbayxy = abbayxyx.$$

Consequentemente

$$abbaxyxy = abbayxyx.$$

Continuando assim, vemos que, módulo as relações 4T, o produto em $A(S^1)$ é bem definido. É claro que o produto é comutativo. Por exemplo,

$$abbaxyxy = xyxyabba$$

simplesmente porque as duas palavras representam a mesma palavra cíclica.

Embora a dimensão de $A_m(S^1)$ cresce muito rapidamente com m, é fácil ver, pelo menos, que $A_1(S^1)$ e $A_2(S^1)$ e $A_3(S^1)$ têm $\mathbb{C}$-bases aa e $abab, aabb$ e

$$aabbcc, abcacb, abcabc$$

respectivamente.

Se b é uma trança cujo fecho é um nó então cada diagrama em b define (por inclusão) um diagrama no fecho, ou seja em S^1. Assim temos uma aplicação $\mathbb{C}$-linear

$$p : A(b) \to A(S^1)$$

(pois é fácil ver que inclusão leva relações 4T em relações 4T).

Em geral os fechos de $b_1 b_2$ e $b_2 b_1$ são equivalentes como nós ou enlaçamentos. Em particular, se o fecho de $b_1 b_2$ é um nó então o fecho de $b_2 b_1$ também o é e se $\alpha \in D_m(b_1)$ e $\beta \in D_n(b_2)$ então

$$p(\alpha\beta) = p(\beta\alpha).$$

4.4 O invariante

Seja

$$Z(b) = 1 + \sum_{m>0} \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^m \sum \int dl_{ij}(t_1) dl_{kl}(t_2) \cdots dl_{uv}(t_m) D_{ij,kl,\cdots,uv}$$

onde os limites de integração são $1 > t_1 > t_2 > \cdots > t_m > 0$ e a segunda soma $\sum$ é sobre todo $i < j, k < l, \cdots, u < v$ e $D_{ij,kl,\cdots,uv} \in A_m(b)$ é o m-diagrama em b que consiste dos pares $(z_i(t_1), t_1), (z_j(t_1), t_1), \cdots, (z_u(t_m), t_m), (z_v(t_m), t_m)$.

Esta fórmula é a fórmula antiga com $D_{ij,kl,\cdots,uv}$ no lugar do produto $A_{ij} A_{kl} \cdots A_{uv}$. As relações entre os A_{ij} correspondem às relações 4T. Por exemplo, temos a relação 4T

$$D_{ij,jk} - D_{jk,ij} + D_{ij,ik} - D_{ik,ij} = 0$$

que corresponde à relação $[A_{ij}, A_{jk}] = [A_{ik}, A_{ij}]$. Também $D_{ij,kl}$ é $D_{kl,ij}$ são equivalentes como diagramas se i, j, k, l são distintos, o que corresponde à relação $[A_{ij}, A_{kl}] = 0$.

$Z(b)$ tem propriedades análogas às do transporte paralelo respeito à conexão KZ:

- Se b e c são tranças equivalentes então $Z(b) = Z(c)$
- $Z(b_1 b_2) = Z(b_1)Z(b_2)$.

Para simplificar a discussão só consideraremos tranças cujos fechos são nós. Para tais tranças, temos a aplicação $p : A(b) \to A(S^1)$

Teorema: $pZ(b_1 b_2) = pZ(b_2 b_1)$

Demonstração: $pZ(b_1 b_2) = p(Z(b_1)Z(b_2)) = p(Z(b_2)Z(b_1)) = pZ(b_1 b_2)$. ■

Então pZ satisfaz a primeira condição de Markov. A segunda condição, porém, não é satisfeita. Por exemplo, calculemos pZ para a 2-trança σ_1. O resultado é

$$pZ(\sigma_1) = 1 + \sum_{m>0} \frac{1}{2^m m!} \bigcirc_m$$

onde $\bigcirc_m \in A_m(S^1)$ é o m-diagrama $a_1 a_2 \cdots a_m a_1 a_2 \cdots a_m$ em S^1. Para σ_1 temos que $z_1 - z_2 = -e^{\pi i t}$. Então o coeficiente de $\bigcirc_m$ é

$$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)^m \int (\pi i)^m \, dt_1 \cdots dt_m,$$

ou seja 2^{-m} vezes o volume $1/m!$ do m-simplexo aberto $1 > t_1 > \cdots > t_m > 0$. A fórmula para σ_1^{-1} é

$$pZ(\sigma_1^{-1}) = 1 + \sum_{m>0} \frac{1}{2^m m!} (-1)^m \bigcirc_m$$

.

A idéia de Picken é de passar ao quociente pelas relações $pZ(\sigma_1^{\pm 1}) = 1$ para garantir a segunda condição de Markov. Sejam então r_+ e r_- os elementos de A dados por $r_\pm = pZ(\sigma_1^{\pm 1}) - 1$ e seja $\bar{A}$ o quociente de A pelo ideal $r_+ A + r_- A$ gerado por r_+ e r_- e seja $\bar{p}$ a composta de p com a aplicação quociente $A \to \bar{A}$.

O resultado principal de **[P]** (cuja demonstração será omitida) é que $\bar{p}Z(b)$ satisfaz a segunda condição de Markov e, portanto, define um invariante de nós.

Como exemplo de como calcular com o invariante, esboçaremos uma demonstração de que o invariante distingue entre o trevo e a sua reflexão num plano. O trevo é o fecho da 2-trança σ_1^3 dada pelas duas funções $3/2 \pm e^{3\pi i t}/2$, enquanto a sua reflexão σ_1^{-3} é dada por $3/2 \pm e^{-3\pi i t}/2$. Como no caso de σ_1, temos que

$$pZ(\sigma_1^3) = 1 + \frac{3}{2} \bigcirc_1 + \frac{9}{8} \bigcirc_2 + \frac{9}{16} \bigcirc_3 + \cdots$$

que, depois de uma pequena conta, é igual a

$$1 + 6r_+ + 3r_- + \frac{1}{2} \bigcirc_3 + \cdots$$

onde os pontinhos representam termos em A_m para $m > 3$.

O trevo refletido é o fecho da 2-trança σ_1^{-3} e temos

$$pZ(\sigma_1^{-3}) = 1 + 3r_+ + 6r_- - \frac{1}{2}\bigcirc_3 + \cdots .$$

Subtraindo, temos que

$$pZ(\sigma_1^{3}) - pZ(\sigma_1^{-3}) = 3r_+ - 3r_- + \bigcirc_3 + \cdots$$

.

Examinando as relações 4T em A_3 não é dificil verificar que nenhuma soma da forma $\bigcirc_3 + \cdots$ pode pertencer ao ideal $r_+A + r_-A$. Então $\bar{p}Z(\sigma_1^3) \neq \bar{p}Z(\sigma_1^{-3})$, ou seja o valor do invariante é diferente para o trevo e a sua reflexão.

Referências

[**Ka**] C.Kassel, *Quantum Groups*, Springer-Verlag GTM, 1995.

[**Ko**] M.Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, Gelfand Seminar, Adv. Sov. Math. 16 (1993) 137-150.

[**KZ**] V.G.Knizhnik and A.B.Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. B247 (1984) 83-103.

[**P**] R.Picken, *Knot Invariants from a Kohno-Kontsevich integral for braids*, Instituto Superior Técnico preprint 10/97 (1997).

Capítulo 5

Grupos Quânticos

1. Aqui se pretende expor os elementos de grupos quânticos de forma simples e direta. As construções não serão apresentadas da maneira mais geral possível, e serão sempre acompanhadas no exemplo (já extremamente interessante) do grupo quântico "mais simples" $Sl_q(2)$, deformação do grupo algébrico semisimples $Sl(2)$. Um contexto definitivamente algébrico será adotado: por exemplo, evitaremos menções a álgebras C^*, e outros objetos analíticos. A virtude maior desta filosofia é destacar claramente a natureza (co- ou contra- variante) das operações envolvidas, dos diversos tipos de produtos, de cada conceito.

2. Não há definição satisfatória universalmente reconhecida do que seja um grupo quântico. Todas as propostas em vigor sugerem a idéia de *deformação* de um objeto clássico, que pode ser, por exemplo, um grupo algébrico, ou um grupo de Lie. E em todas as propostas os objetos deformados perdem as propriedades de grupo: assim, "grupos" quânticos não são grupos. O que sempre se procura preservar nas deformações é o entendimento das diversas representações que os objetos admitem.

3. Fixemos as idéias postulando uma dualidade básica que a Matemática deste século refletiu em uma quantidade de linguagens diferentes: por um lado, são estudados objetos X que possuem uma estrutura geométrica ou topológica. A tais objetos são associadas construções algébricas $A(X)$, que podem ser, por exemplo, álgebras de funções definidas no conjunto X, ou o espaço de seções de um fibrado vetorial. Frequentemente gostaríamos de reler nestas álgebras as estruturas geométricas originais, isto é, gostaríamos de recuperar em $A(X)$ nossos objetos iniciais X através de alguma noção de *espectro* $S(A(X))$ da álgebra $A(X)$: a situação mais desejada é quando voltamos a ter alguma forma de isomorfismo $X \simeq S(A(X))$. O retorno à Geometria a partir das álgebras $A(X)$ através de um espectro sugere considerarmos espectros $S(A)$ de álgebras mais gerais A. Tais espectros são objetos que possuem ainda uma Geometria reminescente, quase sempre muito interessante.

4. Esta separação básica, por um lado a Álgebra em A, e por outro a Geometria (ou Topologia) em X ou em $S(A)$, é uma situação ideal: os objetos que vemos na realidade matemática nos chegam frequentemente misturados. São, por exemplo, grupos topológicos, ou espaços vetoriais topológicos, objetos que tem simultaneamente estruturas algébricas e geométricas de alguma forma compatíveis. A aplicação dos funtores usuais A de algebrização em um objeto X assim fornece estruturas algébricas adicionais sobre os objetos já algébricos $A(X)$, que passam então a admitir, por dualidade, co-multiplicações.

5. Como um exemplo-paradigma tomamos um grupo algébrico linear X: algebricamente, um grupo, geometricamente uma variedade... algébrica (a notação consagrada não pode evitar armadilhas); além disso, as operações de grupo são morfismos de variedades algébricas. O exemplo que nos será mais caro é o grupo algébrico $Sl_2(k)$. Como para toda variedade algébrica, podemos considerar um funtor de algebrização que associa a cada variedade X seu anel de funções regulares $R(X)$. A estrutura adicional de grupo em X doa, por dualidade à la Yoneda, uma estrutura de co-algebra em $R(X)$ (definições precisas mais tarde).

Como segundo exemplo-paradigma tomemos X um grupo de Lie, isto é: geometricamente uma variedade, algebricamente um grupo, com a compatibilidade fundamental de serem diferenciáveis as operações algébricas. Também aqui se manifesta o ubíquo Sl_2. Um funtor de algebrização básico para uma variedade é a consideração de seu fibrado tangente; no caso do grupo de Lie X, este funtor fornece a álgebra de Lie $\mathcal{L}(X)$, o espaço tangente na identidade. Um funtor intra-algébrico agora asocia a cada álgebra de Lie $\mathcal{L}$ a álgebra (associativa) envolvente $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ de forma universal (este funtor, que deve ser chamado de funtor de Poincaré-Birkhoff-Witt, é o adjunto à esquerda do funtor que a cada álgebra associativa A associa a álgebra de Lie com o colchete dado da forma "usual": $[a, b] = ab - ba$).

Estes exemplos serão nossos guias.

6. Se o objeto inicial X for um objeto assim misto, dotado de estruturas algébricas e geométricas simultaneamente, as deformações que procuramos operam nas álgebras $A(X)$, enriquecidas por co-multiplicações, para gerar objetos $A_q(X)$ da mesma natureza igualmente enriquecida. O parâmetro q de deformação intervem nas definições das álgebras $A(X)$ (ou mais simplesmente A) de uma forma que a primeira vista pode parecer arbitrária: confiamos então na relevância destas definições distorcidas que uma quantidade de aplicações físicas, muitas vezes não relacionadas entre si, indica.

Poderíamos pensar em aplicar espectros e obter alguma Geometria em $S(A_q(X))$, mas a ênfase maior das aplicações tem sido em recuperar a teoria de representações de X, que em geral é equivalente à de $A(X)$, para as álgebras deformadas $A_q(X)$.

7. *(Sobre estas notas)* O conceito de grupos quânticos foi motivado por problemas vindos de um grande número de situações físicas, e com isso o entendimento das idéias que motivaram a teoria requer naturalmente um amplo conhecimento anterior. No entanto, o trabalho de manipulação da teoria pode ser efetuado em um nível muito mais modesto; estas notas procuram contemplar situações de pré-requisitos bastante diversas. Idealmente, qualquer leitor com algum interesse poderia achar nelas um lugar de trabalho matemático ativo. Alguma informação categórica está recolhida em apêndice: a mistura de estruturas que os grupos quânticos exemplificam torna a linguagem categórica um dado essencial.

Índice do Capítulo 5

I. Bons Antecedentes Algébricos

- **I.1** Grupos Clássicos: Definições
- **I.2** A Geometria dos Grupos Clássicos
- **I.3** A Álgebra dos Grupos Clássicos
- **I.4** Álgebras de Lie e Álgebras Envolventes
- **I.5** Representações

II. Grupos Quânticos

- **II.1** O Plano Quântico, as Matrizes Quânticas e os Grupos Quânticos
- **II.2** A Álgebra Envolvente
- **II.3** Módulos

5.1 Bons Antecedentes Algébricos

5.1.1 Grupos Clássicos: Definições

Grupos clássicos é uma denominação empregada para alguns grupos de matrizes, ou de classes de matrizes, em que a operação do grupo provêm do produto matricial. Cada matriz-elemento de um grupo assim deve ser inversível, e logo seu determinante não se anula. O primeiro grupo clássico é $Gl_n(A)$, dito o grupo *linear geral*, tendo como conjunto subjacente o conjunto das matrizes $n \times n$ com determinante não-nulo e coeficientes em um anel comutativo A; dotado do produto matricial, $Gl_n(A)$ é um grupo.

Se $\mathcal{U}(A)$ denota o grupo das unidades de um anel A então o determinante é um morfismo de grupos

$$\det : Gl_n(A) \longrightarrow \mathcal{U}(A), \qquad \textbf{(I.1.1)}$$

cujo núcleo é o grupo clássico denotado por $Sl_n(A)$ e dito o grupo *linear especial*. Assim $Sl_n(A)$ é subgrupo normal de $Gl_n(A)$.

Se o anel A de constantes for um corpo (comutativo) k então o centro Z_n de $Gl_n(k)$ consiste nos múltiplos escalares λId da matriz identidade Id, e logo Z_n é isomorfo ao grupo multiplicativo $\mathcal{U}(k) = k^* = k \setminus \{0\}$. O grupo quociente $Gl_n(k)/Z_n$ é denotado $PGl_n(k)$ e é chamado de grupo *linear geral projetivo*. O centro de $Sl_n(k)$ é $Z_n \cap Sl_n(k)$ e consiste nos múltiplos escalares λId da matriz identidade Id tais que $\lambda^n = 1$. Assim, o centro de $Sl_n(k)$ é sempre finito, e $PSL_n(k) := Sl_n(k)/Z_n \cap Sl_n(k)$ é dito grupo *linear especial projetivo*. Por exemplo, se $n = 2$ e a característica de k for diferente de 2 então

$$\begin{aligned}
Gl_2(k) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc \neq 0 \right\} \\
Sl_2(k) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} \\
PSl_2(k) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1 \right\} / \pm Id.
\end{aligned}$$

Outros grupos clássicos dependem de formas bilineares ou semi-lineares em $V = k^n$; tais formas são funções

$$\begin{aligned}
f(\bullet, \bullet) : V \times V &\longrightarrow k \\
(x, y) &\mapsto f(x, y),
\end{aligned}$$

e são simétricas (resp., anti-simétricas) se, para todo $x, y \in V$, tivermos

$$f(x, y) = f(y, x) \qquad \text{resp. } f(y, x) = -f(x, y).$$

Se uma tal forma é linear nas duas coordenadas ela é dita *bilinear*, e é dita *não-singular* se não existe x_0 tal que $f(x_0, x) = 0$ para todo x. Trataremos ainda de formas no caso em que o corpo k tem uma involução $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ (o caso paradigma é $k = \mathbf{C}$, o corpo dos complexos, com a conjugação), e a forma é *hermitiana*, no sentido em que satisfaz

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$$

Neste caso assume-se que a forma é linear na primeira coordenada e anti-linear na segunda, isto é,

$$f(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \overline{\alpha_1} f(x, y_1) + \overline{\alpha_2} f(x, y_2).$$

Dado um espaço vetorial V de dimensão n sobre um corpo k e uma forma $f(\bullet,\bullet)$ de qualquer destes tipos, as matrizes M em $Gl_n(k)$ que preservam esta forma, no sentido de satisfazerem

$$f(Mx, My) = f(x, y) \qquad \text{para todos } x, y \in V$$

formam um grupo clássico. Se a forma $f(\bullet,\bullet)$ é não-singular e anti-simétrica então o grupo de matrizes $n \times n$ com coeficientes em k que preservam esta forma é chamado o *grupo simplético*, denotado por $Sp_n(k)$. A estrutura de grupo de $Sp_n(k)$ independe da escolha da forma bilinear antisimétrica, que pode ser tomada como

$$f(x,y) = \sum_{1\le i\le n/2} (x_{2i-1}y_{2i} - x_{2i}y_{2i-1}) = x^tAy,$$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, n é sempre um número par. As matrizes $M \in Sp_n(k)$ são descritas pela condição

$$M^tAM = A.$$

O centro $Z(Sp_n(k)$ de $Sp_n(k)$ consiste nas matrizes $M = \lambda Id$ onde $\lambda = \pm 1$, e o quociente $Sp_n(k)/Z(Sp_n(k))$ é dito o grupo *simplético projetivo*. Se $n = 2$ então

$$Sp_2(k) = Sl_2(k) \text{ e } PSp_2(k) = PSl_2(k).$$

No caso de $f(\bullet,\bullet)$ ser não-singular, bilinear e simétrica, e o corpo k ter característica diferente de 2, os grupos de matrizes que preservam $f(\bullet,\bullet)$ são os chamados *grupos ortogonais*; em geral a classe de isomorfismo destes grupos depende da escolha de $f(\bullet,\bullet)$, e logo estes grupos devem vir denotados por $O_n(k,f)$. O número de formas $f(\bullet,\bullet)$ que geram grupos não isomorfos depende do corpo de constantes k. O determinante de qualquer matriz em $O_n(k,f)$ é ± 1, e o grupo de matrizes de determinante um em $O_n(k,f) \cap Sl_n(k)$ é denotado por $SO_n(k,f)$. O centro $Z(O_n(k,f))$ consiste nas matrizes $M = \lambda Id$ onde $\lambda = \pm 1$, e o quociente $SO_n(k,f)/Z(O_n(k,f)) \cap SO_n(k,f)$ é denotado $PSO_n(k,f)$. O núcleo $SO_n(k,f)$ de

$$\det : O_n(k,f) \longrightarrow \{\ \pm 1\ \}$$

é abeliano, e deve conter os comutadores $M_1M_2M_1^{-1}M_2^{-1}$. O grupo comutador $\Omega_n(k,f)$, gerado por estes comutadores, é assim um subgrupo de $SO_n(k,f)$. Definimos

$$P\Omega_n(k,f) = \Omega_n(k,f)/(Z(O_n(k,f)) \cap \Omega_n(k,f)).$$

No caso de k ser dotado de uma involução $\alpha \mapsto \alpha$ e $f(\bullet, \bullet)$ ser hermitiana os grupos de matrizes não-singulares que preservam esta forma são os *grupos unitários*; como no caso dos grupos ortogonais, os grupos unitários dependem da escolha de $f(\bullet, \bullet)$, e devem ser denotados por $U_n(k, f)$. As matrizes em $U_n(k, f)$ de determinante um formam um subgrupo $SU_n(k, f)$. O centro $Z(U_n(k, f)$ de $U_n(k, f)$ é formado por $\{\lambda Id \mid \lambda\overline{\lambda} = 1\}$, e

$$Z(SU_n(k, f)) = Z(U_n(k, f)) \cap SU_n(k, f).$$

Denotamos

$$PU_n(k, f) = U_n(k, f)/Z(U_n(k, f)) \qquad \text{e} \qquad PSU_n(k, f) = SU_n(k, f)/Z(SU_n(k, f)).$$

Exemplos e Exercícios

1. Grupos clássicos sobre um corpo finito. O corpo finito com $q = p^r$ elementos será denotado por $\mathbf{F}_q$. Temos

$$\begin{aligned} PSl_2(\mathbf{F}_2) &= Sl_2(\mathbf{F}_2) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

donde $PSl_2(\mathbf{F}_2)$ é isomorfo ao grupo S_3 e o subgrupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é normal em $PSl_2(\mathbf{F}_2)$.

Sobre $\mathbf{F}_3$ o grupo PSl_2 consiste de classes de matrizes; a descrição abaixo identifica cada matriz com a classe a que pertence:

$$\begin{aligned} PSl_2(\mathbf{F}_2) &= Sl_2(\mathbf{F}_2)/\pm Id \\ &= \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ &\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \}. \end{aligned}$$

donde $PSl_2(\mathbf{F}_3)$ é isomorfo ao grupo A_4 e o subgrupo

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

isomorfo a $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, é normal em $PSl_2(\mathbf{F}_3)$.

Estes são, no entanto, os únicos casos em que $PSl_2(\mathbf{F}_q)$ não é simples. Para $n = 2$ e $q \geq 4$, e para $n > 2$ os grupos $PSl_2(\mathbf{F}_q)$ são simples e formam a família mais tratável (a parte os grupos cíclicos de ordem prima e os grupos alternados A_n para $n \geq 5$) no grande teorema de classificação de grupos finitos simples (ver o material recolhido em **3.** abaixo). A ordem de $PSl_n(\mathbf{F}_q)$ é dada por

$$card(PSl_n(\mathbf{F}_q)) = \frac{q^{\binom{n}{2}}}{\mathrm{mdc}(n, q-1)} \prod_{2 \leq i \leq n} (q^i - 1).$$

Temos $PSp_2(\mathbf{F}_2) = PSl_2(\mathbf{F}_2)$ isomorfo a S_3 e $PSp_2(\mathbf{F}_3) = PSl_2(\mathbf{F}_3)$ isomorfo a A_4. Também $PSp_4(\mathbf{F}_2)$ não é simples; estes são, contudo, os únicos exemplos de $PSp_n(\mathbf{F}_q)$ não-simples. A ordem de $PSp_n(\mathbf{F}_q)$ é dada por

$$card(PSp_n(\mathbf{F}_q)) = \frac{q^{\binom{n}{2}^2}}{\mathrm{mdc}(n, q-1)} \prod_{1 \leq i \leq n/2} (q^{2i} - 1).$$

Se a característica do corpo k for diferente de dois e $n = 2l + 1$ for ímpar então o grupo $P\Omega_n(\mathbf{F}_q)$ é simples se $l > 1$, e tem sua ordem dada por

$$card(P\Omega_n(\mathbf{F}_q)) = \frac{q^{(\frac{n-1}{2})^2}}{\mathrm{mdc}(2, q-1)} \prod_{1 \leq i \leq (n-1)/2} (q^{2i} - 1).$$

Se $n = 2l$ for par então existem dois grupos não isomorfos e simples se $l > 2$, dependendo da escolha da forma bilinear simétrica. Estes grupos são denotados por $P\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)$ e $P\Omega_n^-(\mathbf{F}_q)$, e tem ordens dadas por

$$card(P\Omega_n^+(\mathbf{F}_q)) = \frac{q^{l(l-1)}}{\mathrm{mdc}(4, q-1)} \prod_{1 \leq i \leq n/2} (q^{2i} - 1)$$

e

$$card(P\Omega_n^-(\mathbf{F}_q)) = \frac{q^{l(l-1)}}{\mathrm{mdc}(2, q+1)} [\prod_{1 \leq i \leq (n/2)-1} (q^{2i} - 1)](q^l + 1).$$

Um grupo unitário finito depende de uma forma sesqui-linear, que por sua vez depende do automorfismo involutivo $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$. Só existe um tal automorfismo se a cardinalidade do corpo for um quadrado q^2. Sobre um corpo de constantes fixo $\mathbf{F}_{q^2}$ os grupos unitários são isomorfos entre si, e os grupos $PSU_n(\mathbf{F}_{q^2})$ são simples exceto quando $n = 2$ e $q = 2$ ou 3 e $n = 3$ e $q = 2$. A ordem é dada por

$$card(PSU_n(\mathbf{F}_{q^2})) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{\mathrm{mdc}(n, q-1)} \prod_{2 \leq i \leq n} (q^i - (-1)^i 1).$$

2. A simplicidade de $PSL_2(\mathbf{F}_q)$. No caso de $A = k$ ser um corpo o determinante (**I.1.1**) como homomorfismo de grupos admite uma seção

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(k) &\longrightarrow Gl_n(k)\\ \mu \mapsto D(\mu) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ & & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \mu \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e realiza $Gl_n(k)$ como produto semi-direto de $Sl_n(k)$ e $\mathcal{U}(k) = k^*$. Isto significa que toda matriz $A \in Gl_n(k)$ se escreve de forma única

$$A = U_A.D(\det(A)). \tag{2.1}$$

Se $E_{ij} = (\delta_{ij})$ é a matriz com entradas nulas exceto pela entrada na i^{esima} linha e j^{esima} coluna, que é igual a um, então para $i \neq j$ a matriz $B_{ij}(\mu) = Id + \mu E_{ij}$ é dita uma *transvecção.* Vale

$$B_{ij}(\mu)B_{ij}(\lambda) = B_{ij}(\mu + \lambda), \tag{2.2}$$

e $B_{ij}(\mu) \in Sl_n(k)$, e de fato $Sl_n(k)$ é o subgrupo de $Gl_n(k)$ gerado por transvecções.

Se $n = 2$ e $k = \mathbf{F}_q$ então o grupo $Sl_2(\mathbf{F}_q)$ se manifesta como o grupo de *transformações lineares fracionárias*

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \qquad \text{onde } ad - bc = 1. \tag{2.3}$$

Seja H subgrupo normal de $Sl_2(\mathbf{F}_q)$. Se a transvecção $B_{ij}(\mu)$ estiver em H então $H = Sl_2(\mathbf{F}_q)$. De fato, para $\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbf{F}_q)$ a normalidade de H implica

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\\ &\qquad = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \mu\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\\ &\qquad = \begin{pmatrix} 1-\mu ac & \mu a^2\\ -\mu c^2 & 1+\mu ac\end{pmatrix}\\ &\qquad = \begin{cases} B_{12}(\mu a^2) & \text{se } c = 0\\ B_{21}(-\mu c^2) & \text{se } a = 0.\end{cases} \qquad \in Sl_2(\mathbf{F}_q).\end{aligned}$$

O endomorfismo $x \mapsto x^2$ de $\mathbf{F}_q^*$ tem como núcleo as raízes de $x^2 - 1$. Como existem no máximo duas destas raízes, pelo menos metade dos elementos de $\mathbf{F}_q^*$ são quadrados.

Por causa de (**2.2**) o conjunto

$$L = \{\ \lambda \in \mathbf{F}_q \mid B_{12}(\lambda) \in H\ \} \cup \{0\}$$

é subgrupo do grupo aditivo de $\mathbf{F}_q$, que contem todos os elementos do tipo $B_{12}(\mu a^2)$, e logo contem mais da metade dos elementos de $\mathbf{F}_q$. Pelo Teorema de Lagrange $L = \mathbf{F}_q$ e H contem todas as transvecções $B_{12}(\lambda)$. Analogamente, $B_{21}(\lambda) \in H$, e H contem todas as transvecções, isto é, $H = Sl_2(\mathbf{F}_q)$.

Para provar a simplicidade de $PSl_2(\mathbf{F}_q)$ é suficiente provar que se H for um subgrupo normal de $Sl_2(\mathbf{F}_q)$ contendo o centro $Z(Sl_2(\mathbf{F}_q)) = \{\lambda Id \mid \lambda^2 = 1\}$ então necessariamnete $H = Sl_2(\mathbf{F}_q)$. Se H contiver a matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$, para $a \neq \pm 1$ então H também contem, para $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbf{F}_q)$, a matriz

$$SAS^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 - d^2 & 1 \end{pmatrix} \in H.$$

Como $\det(A) = 1 = ad$ vale $d \neq \pm 1$ e $1 - d^2 \neq 0$, e $SAS^{-1}A^{-1} = B_{21}(1 - d^2)$, e logo $H = Sl_2(\mathbf{F}_q)$ pelo visto acima.

Assim, resta mostrar que H contem alguma matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ com $a \neq \pm 1$. Seja $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H$ matriz em H não no centro $Z(Sl_2(\mathbf{F}_q))$ com polinômio mínimo $x^2 + \gamma x + 1$. Se este polinômio se fatorar em $\mathbf{F}_q$ então M é similar a uma matriz diagonal, caso contrário M é similar à matriz na forma canônica racional

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix}.$$

A matriz $S \in Gl_2(\mathbf{F}_q)$ que realiza a similaridade se decompõe como em (**2.1**) $S = U_S.D(\delta)$, onde $\delta = \det(S)$ e $U_S \in Sl_2(\mathbf{F}_q)$, e logo no primeiro caso

$$M = S \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} S^{-1} = U_S \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} U_S^{-1}$$

(porque matrizes diagonais comutam), e logo $A = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = U_S^{-1} M U_S \in Sl_2(\mathbf{F}_q)$ satisfaz as exigências, já que $\alpha^{-1} \neq \pm 1$ porque M não está no centro $Z(Sl_2(\mathbf{F}_q))$. Se M não for diagonalizável então de qualquer forma por normalidade H conterá a matriz

$$C = U_S^{-1} M U_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{-1} \\ \delta & -\gamma \end{pmatrix}.$$

Para $T = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in Sl_2(\mathbf{F}_q)$ vale que H certamente conterá

$$U = TCT^{-1}C^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha^{-2} & 0 \\ \delta\gamma(\alpha^2 - 1) & \alpha^2 \end{pmatrix},$$

e só resta escolher α tal que $\alpha^2 \neq \pm 1$, isto é, α não sendo raiz de $x^4 - 1$. Isto é possível se $q = 4$ e se $q > 5$. Para $q = 5$ o grupo $PSl_2(\mathbf{F}_5)$ é também simples, com uma escolha mais delicada de matrizes $M \in H$.

Valem os isomorfismos

$$PSl_2(\mathbf{F}_5) \simeq PSl_2(\mathbf{F}_4) \simeq A_5,$$

o grupo alternado de 60 elementos. Para $q = 7$ o grupo $PSl_2(\mathbf{F}_7)$ é um grupo simples não abeliano nem isomorfo a um grupo alternado, já que sua ordem 168 não é da forma $\frac{1}{2}n!$. No entanto, $PSl_2(\mathbf{F}_9)$ volta a ser isomorfo ao grupo alternado A_6.

3. Um olhar de relance sobre grupos simples. Para listar todos os grupos simples finitos nos é possível, ao final do século XX, enfim seguir o fenomenal conselho do rei de copas em *Alice no País das Maravilhas*: "Comece pelo começo e vá prosseguindo até chegar ao fim, e então pare". Esta lista, agora afinal completa (ao que parece, *pace* opiniões divergentes sobre a insuficiência da documentação de certas provas), começa de uma forma modesta: os grupos cíclicos $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ de ordem finita p são simples, não tendo nenhum subgrupo normal, de fato não tendo subgrupo algum. Em ordem de complexidade vem os grupos alternados A_n para $n \geq 5$, mas não só a prova da simplicidade destes grupos é mais complicada como existem as "exceções" A_3 e A_4.

Os próximos grupos simples da lista são os grupos clássicos sobre corpos finitos listados em **1.**, que tem uma forte tendência à simplicidade, embora existam exceções. O padrão da procura é as provas de simplicidade ficarem cada vez mais complexas em cada família infinita, com esta complexidade atestada pela existência de exceções, até o ponto em que aparecem exceções fora das famílias: os grupos simples *esporádicos*, vinte e seis grupos simples que não se enquadram em nenhuma das famílias infinitas.

Os grupos alternados e os grupos clássicos se manifestam a partir de uma ação natural, os grupos alternados A_n aparecendo como permutações pares do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e os grupos clássicos como homorfismos de espaços vetoriais ou de espaços projetivos (submetidos a restrições de preservar formas). Outros grupos simples finitos foram descobertos em situações similares, como grupos de permutação de sistemas combinatórios. A situação geral pode ser formalizada da seguinte forma: dada uma categoria $\mathbf{C}$ e um objeto C de $\mathbf{C}$, uma *representação* de um grupo G em C é um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \longrightarrow Aut_{\mathbf{C}}(C, C),$$

onde $Aut_{\mathbf{C}}(C, C)$ são os homomorfismos em $Hom_{\mathbf{C}}(C, C)$ que admitem inversa. O conjunto $Aut_{\mathbf{C}}(C, C)$ tem uma estrutura de grupo dada pela composição categórica $\circ$ (ver **A.1**). Para $\mathbf{C} = \mathbf{Vect}_k$, a categoria de espaços vetoriais sobre um corpo k, esta situação é chamada de representação linear, e para $\mathbf{C} = \mathbf{Conj}$, a categoria dos conjuntos, é usada a terminologia *ação*. A representação é *fiel* se ρ for monomorfismo, e o *grau* da representação é a cardinalidade de C.

Tipicamente $\mathbf{C}$ é uma categoria concreta, admitindo um funtor de esquecimento $\mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$: os objetos de $\mathbf{C}$ são conjuntos dotados de estrutura. Se ρ for uma representação em C, para $c \in C$ o *grupo de isotropia* G_c é o subgrupo de G dado por

$$G_c := \{ \ g \in G \mid \rho(g)(c) = c \ \}.$$

A representação é *transitiva* se para $c_1, c_2 \in C$ existir um $g \in G$ com $\rho(g)(c_1) = c_2$, e é *regular* se, além de transitiva, o grupo de isotropia G_c de qualquer $c \in C$ é trivial, de forma que em uma representação regular para $c_1, c_2 \in C$ existe um único $g \in G$ com $\rho(g)(c_1) = c_2$. Vale que se ρ for transitiva (resp., regular) então

$$card(G) = card(C).card(G_c) \text{ para todo } c \in C \qquad (\text{resp., } card(G) = card(C)).$$

Dada uma representação ρ de G em C define-se, para n inteiro positivo,

$$C^{[n]} := \{ \ (c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \neq c_j \text{ para } i \neq j \ \} \subset C^n,$$

e a representação ρ se estende para uma representação ρ_n

$$\rho_n(g)((c_1, \ldots, c_n)) = (\rho(g)(c_1), \ldots, \rho(g)(c_n)).$$

A representação ρ é chamada *n-transitiva* de ρ_n for transitiva e *estritamente n-transitiva* se ρ_n for regular. Como exemplos: o grupo simétrico S_n é estritamente n-transitivo, e se $n > 2$ o grupo alternado A_n é estritamente $(n-2)$-transitivo; além disso, os únicos grupos $(n-2)$-transitivos de grau n são S_n e A_n, e o único grupo $(n-1)$-transitivo de grau n é S_n.

O grupo clássico $PGl_2(\mathbf{F}_q)$ age naturalmente na reta projetiva $\mathbf{F}_q \cup \{\infty\}$, o grupo de isotropia de ∞ sendo dado por

$$PGl_2(\mathbf{F}_q)_\infty = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid ad \neq 0 \ \},$$

(identificando a classe de equivalência com alguma matriz representante). Com esta representação $PGl_2(\mathbf{F}_q)_\infty$ é estritamente 2-transitivo de grau q e $PGl_2(\mathbf{F}_q)$ é estritamente 3-transitivo de grau $q + 1$.

Se $q = (q')^2$ for um quadrado então $\sigma : \alpha \mapsto \alpha^{q'}$ é automorfismo involutivo de $\mathbf{F}_q$, que pode ser extendido a um automorfismo da reta projetiva $\mathbf{F}_q \cup \{\infty\}$ por $\sigma(\infty) = \infty$. Vendo $PGl_2(\mathbf{F}_q)$ como grupo de transformações lineares fracionárias ((**2.3**), isto é, identificando $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$), e considerando o grupo $H(\mathbf{F}_q)$ de transformações na reta projetiva $\mathbf{F}_q \cup \{\infty\}$ dado por

$$H(\mathbf{F}_q) = \{\ x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \mid ad - bc \in \mathbf{F}_{q'} \backslash \{0\}\ \} \cup \{\ x \mapsto \frac{a\sigma(x)+b}{c\sigma(x)+d} \mid ad - bc \in \mathbf{F}_q \backslash \mathbf{F}_{q'}\ \},$$

o grupo de isotropia de ∞ é dado por

$$H(\mathbf{F}_q)_\infty = \{\ x \mapsto ax + b \mid a \in \mathbf{F}_{q'} \setminus \{0\}\ \} \cup \{\ x \mapsto a\sigma(x) + b \mid a \in \mathbf{F}_q \setminus \mathbf{F}_{q'}\ \}.$$

Com estas representações o grupo $H(\mathbf{F}_q)_\infty$ é estritamente 2-transitivo de grau q e o grupo $H(\mathbf{F}_q)$ (que não é isomorfo a $PGl_2(\mathbf{F}_q)$) é estritamente 3-transitivo de grau $q + 1$. Um teorema de Zassenhaus, algo no espírito do teorema de classificação, afirma que isto esgota a lista de grupos estritamente 3-transitivos: qualquer grupo estritamente 3-transitivo ou é um $PGl_2(\mathbf{F}_q)$ ou é um $H(\mathbf{F}_q)$.

Existem grupos estritamente 4-transitivos e grupos 5-transitivos (não isomorfos a grupos simétricos e alternados), mas segue do teorema de classificação que não existem grupos n-transitivos para $n \geq 6$. De fato, Jordan mostrou em 1872 que para $n \geq 4$ só podem existir grupos estritamente n-transitivos (não isomorfos a grupos simétricos ou alternados) se $n = 4$, e neste caso o grau da representação é 11, ou $n = 5$, e neste caso o grau da representação é 12. Estas cotas são atingidas: existem grupos assim. De fato, existem grupos assim que são grupos simples e esporádicos (isto é, não isomorfos a nenhum elemento das famílias clássicas). Estes grupos são os grupos M_{11} e M_{12} descobertos por Mathieu em 1861.

Frequentemente a categoria $\mathbf{C}$ em que se representa um grupo tem aspectos combinatórios interessantes. Por exemplo, um *sistema de Steiner* $\mathcal{S}_{r,s,t}$ de tipo (r, s, t) consiste em um conjunto A de cardinalidade t e um conjunto $\{B_i\}$ de subconjuntos $B_i \subset A$, com $card(B_i) = s$ tal que para cada subconjunto $C \subset A$ com $card(C) = r$ existe exatamente um i com $C \subset B_i$. Uma estrutura assim admite morfismos evidentes (os subconjuntos B_i de um sistema sendo levados nos subconjuntos do outro), definindo uma categoria $\mathbf{St}$ que, por serem como são as coisas, é muito pequena: neste mundo existem poucos sistemas de Steiner. Por exemplo, a menos de isomorfismo só existe um sistema de Steiner $\mathcal{S}_{r,s,t}$ de tipo $(r, s, t) = (5, 6, 12)$, ou de tipo $(5, 8, 24)$. No entanto, uma surpresa:

$$M_{12} = Aut_{\mathbf{St}}(\mathcal{S}_{5,6,12}, \mathcal{S}_{5,6,12}),$$

isto é o grupo de automorfismo do sistema de Steiner $\mathcal{S}_{5,6,12}$ é o grupo de Mathieu M_{12}. O grupo

$$M_{24} = Aut_{\mathbf{St}}(\mathcal{S}_{5,8,24}, \mathcal{S}_{5,8,24})$$

é ainda outro grupo simples descoberto por Mathieu; M_{12} e M_{24} são os únicos grupos 5-transitivos conhecidos (a parte os grupos simétricos e alternados).

Dado um sistema de Steiner de tipo (r, s, t) sobre um conjunto A, destacando um elemento $a \in A$ define-se um sistema de Steiner de tipo $(r-1, s-1, t-1)$ sobre $A \setminus \{a\}$ tomando como subconjuntos $B_i \setminus \{a\}$ onde B_i são todos os subconjuntos do sistema original que contem a. Dado o sistema $\mathcal{S}_{5,6,12}$, o sistema $\mathcal{S}_{4,5,11}$ que resulta deste processo tem como grupo de automorfismos o grupo de Mathieu M_{11}, e dado o sistema $\mathcal{S}_{5,8,24}$, o sistema $\mathcal{S}_{4,7,23}$ que resulta deste processo tem como grupo de automorfismos um quarto grupo simples M_{23} ainda descoberto por Mathieu. O grupo M_{11} é o grupo de isotropia de um símbolo de M_{12}, e o grupo M_{23} é o grupo de isotropia de um símbolo de M_{24}. O grupo de isotropia de um símbolo de M_{23} é ainda um último grupo simples M_{22} descoberto por Mathieu; este grupo M_{22} é um subgrupo de $Aut_{\mathbf{St}}(\mathcal{S}_{3,5,22}, \mathcal{S}_{3,6,22})$ de índice dois, onde $\mathcal{S}_{3,5,22}$ é o sistema de Steiner obtido a partir de $\mathcal{S}_{4,5,23}$.

Outros grupos começam a se repetir, ou não são simples: por exemplo, o grupo de isotropia de um símbolo de M_{23} é o grupo clássico $PSl_3(\mathbf{F}_4)$ (e logo não é um grupo novo, esporádico), enquanto que o grupo de isotropia de um símbolo de M_{11} tem um subgrupo (isomorfo a $PSl_2(\mathbf{F}_9)$) de índice dois (e logo normal) e assim este grupo não é simples.

Os grupos de Mathieu $M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}$ e M_{24} foram os únicos grupos esporádicos descobertos no século XIX. Suas ordens são dadas por:

$$\begin{aligned}
card(M_{11}) &= 2^4.3^2.5.11 \\
card(M_{12}) &= 2^6.3^3.5.11 \\
card(M_{22}) &= 2^7.3^2.5.7.11 \\
card(M_{23}) &= 2^7.3^2.5.7.11.23 \\
card(M_{24}) &= 2^{10}.3^3.5.7.11.23.
\end{aligned}$$

Os demais vinte e cinco grupos esporádicos foram descobertos no século XX; de fato, foram decobertos entre 1950 e 1980.

Referências.

A bibliografia sobre grupos clássicos é imensa. Os livros de Weyl [**W**] e de Dieudonné [**D**] são clássicos.

A classificação dos grupos simples deveria ser cantada em versos épicos. Enquanto tal não acontece, permanece dispersa em uma quantidade de artigos feitos por e para especialistas. Quem mais trabalhou para remediar este estado de coisas foi Daniel Gorenstein, do qual citamos [**Go**].

5.1.2 A Geometria dos Grupos Clássicos

Os grupos clássicos podem ser submetidos à dissecação por uma variedade de técnicas. De fato, eles intervêem em quase qualquer área da matemática. Nesta seção e na próxima são colocados os pontos de vista com os quais um geômetra e um algebrista os estudam.

Um geômetra, admirando grupos clássicos, fica inebriado como estes grupos dependem suavemente das coordenadas-entradas das matrizes, e como as operações algébricas envolvidas, a multiplicação e a inversão, são operações suaves. De fato um geômetra, ao ver mencionada a palavra corpo, só se lembra dos reais e dos complexos, e então reconhece estes grupos como variedades diferenciáveis em que as operações algébricas envolvidas são suaves. Na verdade o que o fascina é o fato de grupos clássicos serem objetos da categoria **Diff** (ver apêndice **B**), de fato objetos de Hopf desta categoria (ver (**A.6**)). A denominação consagrada é, claro, indicar que grupos clássicos são grupos de Lie.

Rastreando definições, um *grupo de Lie* é um grupo, objeto de **Grp**, que é uma variedade diferenciável, objeto de **Diff**, tal que a multiplicação e a inversão

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, g') &\mapsto gg' \\ \iota : G &\longrightarrow G \\ g &\mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

são morfismos em **Diff**.

Muita coisa é necessária para tornar esta definição possível: em primeiro lugar, o produto cartesiano, que é o produto categórico em **Conj**, pode ser dotado de uma estrutura de produto em **Grp** (isto é consequência de ter o funtor de esquecimento $\mathcal{E}$: **Grp** $\to$ **Conj** um adjunto à esquerda, dado pela estruturação livre; ver (**A.4**)), e também pode ser dotado de uma estrutura de produto em **Diff**. Isto permite que o morfismo em **Grp** dado pela multiplicação $\mu : G \times G \to G$ seja morfismo em **Diff**. A aplicação do funtor derivada D : **Diff** $\to$ **Diff** ao morfismo μ resulta num morfismo em **Diff** $D(\mu) : D(G \times G) \to D(G)$; em particular, derivando na origem $(I, I) \in G \times G$ resulta numa aplicação linear entre os espaços tangentes ((**B.5**))

$$D(\mu)_{(I,I)} : D(G \times G)_{(I,I)} \longrightarrow D(G)_I.$$

Uma *álgebra de Lie* $\mathcal{A}$ sobre um corpo k é um espaço vetorial sobre k dotado de uma operação bilinear

$$[\bullet, \bullet] : A \times A \longrightarrow A$$

que satisfaz $[a, a] = 0$ para qualquer $a \in A$ e a *identidade de Jacobi*

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0. \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Dado um grupo de Lie G, a estrutura de grupo em G dota o espaço tangente na identidade $D(G)_I$ da estrutura de uma álgebra de Lie (ver (**B.5**)). Esta estruturação se manifesta de várias maneiras: por exemplo, derivando o morfismo μ de multiplicação. Para calcular esta derivada na identidade $I \in G$ toma-se uma parametrização local (U, V, h) onde U é aberto em $\mathbf{R}^n$; sem perda de generalidade pode ser exigido $0 \in U$ com $h(0) = I$, a identidade em G. Então $h \times h : U \times U \to V \times V$ é parametrização local de $G \times G$ em torno da identidade (I, I) de $G \times G$. A parametrização faz recair o cálculo da derivada de μ em (I, I) no cálculo da derivada de $f := h^{-1} \circ \mu \circ (h \times h) : U \times U \to U$, onde

$$U \times U \xrightarrow{h \times h} G \times G \xrightarrow{mu} G \xrightarrow{h^{-1}} U,$$

é definido em uma vizinhança apropriada de $(0, 0)$. Expandindo a série de Taylor de f em torno de $(0, 0)$, e usando $E_1, E_2 \in \mathbf{R}^n$, resulta em

$$f(E_1, E_2) = E_1 + E_2 + B(E_1, E_2) + \cdots,$$

onde $B(\bullet, \bullet)$ é uma aplicação bilinear e as reticências indicam termos de ordem superior. Com esta forma bilinear define-se

$$[E_1, E_2] = B(E_1, E_2) - B(E_2, E_1).$$

A associatividade de μ implica $f(f(E_1, E_2), E_3) = f(E_1, f(E_2, E_3))$, que levada à série de Taylor implica

$$B(B(E_1, E_2), E_3) = B(E_1, B(E_2, E_3)).$$

Daí segue que

$$[[E_1, E_2], E_3] =$$
$$B(B(E_1, E_2)E_3) - B(E_3, B(E_1, E_2)) + B(E_3, B(E_2, E_1)) - B(B(E_2, E_1), E_3).$$

Somando as equações correspondentes para os termos $[[E_2, E_3], E_1]$ e $[[E_3, E_1], E_2]$ há cancelamento completo de todos os termos à direita, e logo é satisfeita a identidade de Jacobi

$$[[E_1, E_2], E_3] + [[E_2, E_3], E_1] + [[E_3, E_1], E_2] = 0.$$

Assim, identificando E_i com o vetor tangente de $t \mapsto tE_i$, o espaço tangente $D(G)_I$ de um grupo de Lie na identidade tem a estrutura de uma álgebra de Lie. Esta estrutura se manifestará sempre que a estrutura diferencial (do grupo como objeto de **Diff**) e algébrica (dele como objeto de **Grp**) forem usadas em conjunto. Por exemplo, para qualquer variedade diferenciável M, objeto de **Diff**, o espaço de campos vetoriais (ou, equivalentemente, de derivações da álgebra $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$; ver (**B.5**)),

$$Vect(M) \simeq Der(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})) \qquad \textbf{(1.2.2)}$$

tem naturalmente a estrutura de uma álgebra de Lie (em geral de dimensão infinita). Esta estrutura, presente em qualquer variedade diferenciável, *não* é a estrutura relevante se $M = G$ for um grupo de Lie: neste caso observa-se que G age em $Vect(G)$ da seguinte maneira. A multiplicação à esquerda

$$\begin{aligned} \mu_g : G &\longrightarrow G \\ g' &\mapsto gg' \end{aligned}$$

é isomorfismo em **Diff** (não sendo sequer morfismo em **Grp**), e se $\chi \in Vect(G)$ então

$$\begin{aligned} \chi^{\mu_g} := D(\mu_g)(\chi \circ \mu_{g^{-1}}) : G &\to D(G) \\ g' &\mapsto D(\mu_g)(\chi(g^{-1}g')) \in D(G)_{g'} \end{aligned}$$

é um campo vetorial em $Vect(G)$. Isto define uma ação de G em $Vect(G)$, e um campo $\chi \in Vect(G)$ é dito *invariante à esquerda* se $\chi^{\mu_g} = \chi$. O subconjunto ${}^G Vect(G)$ de campos invariantes à esquerda é uma sub-álgebra de Lie de $Vect(G)$; esta sub-álgebra ${}^G Vect(G)$ é isomorfa à álgebra de Lie de G definida como o espaço tangente na identidade $D(G)_I$ com a operação definida como acima, através do isomorfismo $\chi \mapsto \chi(1)$. Visto na encarnação de derivações (**1.2.2**), um campo χ encarado como uma derivação de $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$ é invariante à esquerda se comutar com a transformação linear

$$\begin{aligned} \mu_g : Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) &\longrightarrow Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) \\ f &\mapsto \mu_g(f) : M \to \mathbf{R} \\ &\qquad m \mapsto f(\mu_{g^{-1}}(m) = f(g^{-1}m). \end{aligned}$$

Além destas duas aparições da álgebra de Lie de um grupo de Lie G, é necessário ao que segue considerar ainda uma terceira, obtida através da ação de G dada por conjugação:

$$\begin{aligned} A : G &\longrightarrow Hom_{\mathbf{Grp}}(G, G) \\ g &\mapsto A(g) : G \to G \\ &\qquad g' \mapsto gg'g^{-1}. \end{aligned}$$

O morfismo $A(g)$ é isomorfismo em **Grp** e em **Diff**, sendo composta de translações à direita e à esquerda. Considerando-o como isomorfismo em **Diff** podemos tomar sua derivada na identidade I de G: esta derivada se denota por

$$Ad(g) := D(A(g))_I : D(G)_I \longrightarrow D(G)_I,$$

e $g \mapsto Ad(g)$ define uma ação de G em $Aut_k(D(G)_I, D(G)_I)$ (isto é, automorfismos de $D(G)_I$ como espaço vetorial sobre k). Como $Aut_k(D(G)_I, D(G)_I)$ tem uma estrutura de grupo de Lie (ver exemplo **1.** abaixo), é possível tomar a derivada de $g \mapsto Ad(g)$ na identidade I, obtendo uma aplicação de $D(G)_I$ no espaço tangente de $Aut_k(D(G)_I, D(G)_I)$ em sua identidade $I : D(G)_I \to D(G)_I$. Como $Aut_k(D(G)_I, D(G)_I)$ (sendo imagem inversa do aberto $k \setminus \{0\}$ pela função contínua det) é aberto em $Hom_k(D(G)_I, D(G)_I)$, este espaço tangente é simplesmente $Hom_k(D(G)_I, D(G)_I)$, e a derivada $D(Ad)_I$ define uma ação de álgebras de Lie, denotada por

$$\begin{aligned} ad : D(G)_I &\longrightarrow Hom_k(D(G)_I, D(G)_I) \\ E &\mapsto ad(E) : D(G)_I \to D(G)_I. \end{aligned}$$

A operação

$$\begin{aligned} D(G)_I \times D(G)_I &\longrightarrow D(G)_I notag \\ (E, E') &\mapsto [E, E'] := ad(E)(E') \end{aligned} \tag{5.1}$$

é uma (terceira) forma de dotar $D(G)_I$ de uma estrutura de álgebra de Lie. Assim, com um *embarras de richesses*, foi indicado o

Teorema de Estruturação do Espaço Tangente na Identidade como álgebra de Lie. *Se G for um grupo de Lie então o espaço tangente $D(G)_I$ na identidade tem naturalmente a estrutura de uma álgebra de Lie.*

O que falta para ser visto da prova do teorema depende de como se interprete a palavra "naturalmente". As três maneiras de definir esta estrutura devem servir como uma justificativa da qualificação "natural", mas então deve ser provado que estas três maneiras coincidem; isto não é difícil: a *representação adjunta* $ad : D(G)_I \to Hom_k(D(G)_I, D(G)_I)$, que foi a última forma de apresentar a estrutura, é calculada pela série de Taylor, como na primeira definição. Em cada uma das formas de apresentar foram omitidos detalhes (como a prova da identidade de Jacobi), que são rotineiros. O Teorema acima define um funtor da categoria de **GrpLie** de grupos de Lie para a categoria **AlgLie** de álgebras de Lie:

$$\mathcal{L} : \mathbf{GrpLie} \longrightarrow \mathbf{AlgLie}.$$

Exemplos e Exercícios

1. A álgebra de Lie de $Gl_n(\mathbf{R})$. O grupo de Lie $Gl_n(\mathbf{R})$ é o grupo de transformações lineares inversíveis de $\mathbf{R}^n$; o cálculo que se segue se aplica para o grupo de transformações lineares de qualquer espaço vetorial V de dimensão finita sobre k.

Para tomar uma parametrização local em torno da identidade $I \in Gl_n(\mathbf{R})$ satisfazendo as condições descritas acima basta fazer

$$\begin{aligned} h : U \subset \mathbf{R}^{n^2} &\longrightarrow Gl_n(\mathbf{R}) \\ (c_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} &\mapsto I + (c_{ij}), \end{aligned}$$

com (c_{ij}) matriz $n \times n$ tomada em uma vizinhança apropriada U da origem em $\mathbf{R}^{n^2}$. A expansão de Taylor de $f = h^{-1} \circ \mu \circ (h \times h)$ é então simplesmente

$$f(A, B) = A + B + (AB - BA),$$

onde A, B estão no espaço $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ de matrizes $n \times n$ com coeficientes reais. Assim, a álgebra de Lie de $Gl_n(\mathbf{R})$ é o espaço $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ com a operação dada por $[A, B] = AB - BA$. Esta álgebra é denotada por $gl_n(\mathbf{R})$.

2. O caso de $Sl_2(\mathbf{R})$. Um cálculo análogo pode ser feito para $Sl_2(\mathbf{R})$ tomando a parametrização em torno de $I \in Sl_2(\mathbf{R})$ dada por

$$\begin{aligned} h : U \subset \mathbf{R}^3 &\longrightarrow Sl_2(\mathbf{R}) \\ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} &\mapsto I + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde a entrada d é obtida implicitamente. De fato, vale $1 = \det(I + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = 1 + \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, e a condição para o determinante ser 1 requer $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$. Pelo teorema da função implícita esta condição define implicitamente d como função suave perto da origem.

A álgebra de Lie de $Sl_2(\mathbf{R})$ é dada pela subálgebra de $gl_2(\mathbf{R})$ dada pelas matrizes de traço nulo, como segue de uma aplicação da aplicação exponencial abaixo. Ela é denotada por $sl_2(\mathbf{R})$.

3. A aplicação exponencial. Dado um vetor tangente $E \in D(G)_I$ na álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ de um grupo de Lie G, pelo teorema de existência e unicidade de equações diferenciais ordinárias existe uma caminho $p_E : (-\epsilon, \epsilon) \to G$ tendo E como vetor tangente. A associação

$$exp : tE \mapsto p_E(t)$$

define a aplicação exponencial

$$exp : \mathcal{L}(G) \to G.$$

A aplicação exponencial é uma transformação natural $exp : \mathcal{L} \overset{\bullet}{\longrightarrow} \mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ denota o funtor identidade na categoria de grupos de Lie.

Para $G = Gl_n(\mathbf{R})$ a álgebra de Lie é o conjunto das matrizes $n \times n$ com $[A, B] = AB - BA$, como visto em **1.**. O sistema $x'(t) = Ax(t)$ com condição inicial $x(0) = 1$ tem solução

$$x(t) = e^{At} = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} t^k,$$

e logo a aplicação exponencial neste caso é a exponencial usual $exp(A) = e^A$.

Se G é um grupo de Lie e H um subgrupo conexo (ou, pelo menos, com um número de componentes conexas enumerável) então

$$\mathcal{L}(H) = \{X \in \mathcal{L}(G) \mid exp(X) \in H \ \}.$$

Se $A \in G = Gl_n(\mathbf{R})$ é tal que $A = MJM^{-1}$, onde J é sua forma de Jordan, então

$$\det(e^A) = \det(e^{MJM^{-1}}) = Me^J M^{-1},$$

e logo $\det(e^A) = \prod_i e^{\lambda_i} = e^{\mathrm{tr} A}$. Pelo cálculo da exponencial obtido para $G = Gl_n(\mathbf{R})$ e usando o enunciado acima com $H = Sl_n(\mathbf{R})$, segue que a álgebra de Lie $sl_n(\mathbf{R}) = \mathcal{L}(Sl_n(\mathbf{R}))$ de $Sl_n(\mathbf{R})$ é dada pelas matrizes $n \times n$ de traço nulo, conforme anunciado em **2.**.

5.1.3 A Álgebra dos Grupos Clássicos

Um algebrista, admirando grupos clássicos, fica fascinado como suas definições independem grandemente do corpo (ou anel) de constantes k (no caso de grupos unitários é necessário um automorfismo involutivo em k, mas isto é tudo). Mais ainda, grupos clássicos definidos sobre anéis comutativos A e A' podem ser comparados através de um morfismo $A \to A'$, que define um morfismo dos grupos clássicos por "mudança de base". Na verdade, o que o fascina é o fato de grupos clássicos serem *funtores*. Assim, por exemplo, $Gl_n(A)$ é o funtor da categoria de anéis comutativos para a categoria de grupos

$$Gl_n : \mathbf{AnCom} \longrightarrow \mathbf{Grp}$$

que a cada anel A associa $Gl_n(A)$. A aplicação determinante aparece agora como uma transformação natural $\det : Gl_n \overset{\bullet}{\to} Gl_1$; a naturalidade de det se expressa na comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccc} Gl_n(A) & \longrightarrow & Gl_n(B) \\ \det\Big\downarrow & & \Big\downarrow\det \\ Gl_1(A) & \longrightarrow & Gl_1(B) \end{array}$$

que resulta da expressão polinomial do determinante nas coordenadas-entradas das matrizes: um morfismo de anel nestas entradas forçosamente preserva esta expressão polinomial, e o diagrama então comuta.

O núcleo de det é, como esperado, o funtor Sl_n, que associa a cada anel A o grupo $Sl_n(A)$. Assumindo que o anel A é comutativo e contem o corpo k, ou seja, considerando os funtores definidos na categoria $\mathbf{AlgCom}_k$ de álgebras comutativas sobre k, algo ainda mais interessante acontece: existe um elemento universal para estes funtores ou, equivalentemente, Sl_n é representável: para cada álgebra comutativa sobre k vale

$$Sl_n(A) = Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(k[\{X_{ij}\}]/(1 - \det), A).$$

Isto significa: o funtor Sl_n é representado pela álgebra $k[\{X_{ij}\}]/(1 - \det(X_{ij}))$. Em última análise o que se usa é a propriedade universal de anéis de polinômios. Por exemplo,

$$Sl_2(A) = Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/(1 - (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})).$$

Também Gl_n é representável na categoria $\mathbf{AlgCom}_k$: neste caso é adicionada uma variável extra T ao conjunto $\{X_{ij}\}$ de variáveis, e vale

$$Gl_n(A) = Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(k[\{X_{ij}\}, T]/(1 - T\det(X_{ij})), A).$$

Também as condições que definem os outros grupos clássicos podem ser expressas funtorialmente: os grupos ortogonais, por exemplo, são grupos dados por matrizes A que satisfazem $AA^t = I$, que é uma condição polinomial nas entradas de A.

O fato de grupos clássicos serem dados por funtores representáveis se traduz dizendo que estes objetos que os representam são co-objetos de Hopf da categoria $\mathbf{AlgCom}_k$ (ver (**A.6**)). A categoria $\mathbf{AlgCom}_k$ é completa e cocompleta, o co-produto de A e B sendo dado pelo produto tensorial $A \otimes_k B$. Um co-objeto de Hopf é uma álgebra A, comutativa sobre k, para a qual existem os morfismos em $\mathbf{AlgCom}_k$ dados por

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A,$$

dito *co-multiplicação*,

$$\epsilon : A \longrightarrow k,$$

dito *co-unidade* ou *aumentação*, e

$$S : A \longrightarrow A,$$

dito *antípoda*. Estes dados estão submetidos aos axiomas que se resumem na comutatividade dos diagramas

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \stackrel{id\otimes\Delta}{\longleftarrow} & A \otimes A \\ \Delta \otimes id \Big\uparrow & & \Big\uparrow \Delta \\ A \otimes A & \stackrel{\Delta}{\longleftarrow} & A, \end{array}$$

que garante a associatividade do grupo $Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(A,B)$,

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\epsilon\otimes id"'] \\
A \arrow[u, "\simeq"] & A, \arrow[l, "="'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

que garante que a co-unidade $\epsilon : A \to k$ é o morfismo dual da “escolha de unidade” $\{*\} \to G$ em um grupo G, e

$$\begin{tikzcd}
A & A \otimes A \arrow[l, "(S,id)"'] \\
k \arrow[u] & A \arrow[l, "\epsilon"'] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd},$$

que garante que o morfismo antípoda funcione como o dual da inversão no grupo.

Uma álgebra comutativa sobre k, objeto de $\mathbf{AlgCom}_k$, dotada de morfismos Δ, ϵ e S que funcionam, respectivamente, como co-multiplicação, co-unidade e antípoda (e logo tornam comutativos os diagramas acima), é dita uma *álgebra de Hopf comutativa* sobre k.

O lema de Yoneda (**A.2**) garante que funtores representáveis $\mathbf{AlgCom}_k \to \mathbf{Grp}$ (como os grupos clássicos) correspondem a álgebras de Hopf comutativas sobre k. São, também, os co-objetos de Hopf de $\mathbf{AlgCom}_k$.

Funtores representáveis formam naturalmente uma categoria, em que morfismos são dados quer por transformações naturais quer (via o lema de Yoneda), por morfismos em $\mathbf{AlgCom}_k$ das álgebras de Hopf comutativas sobre k correspondentes. Álgebras de Hopf comutativas sobre k formam naturalmente uma categoria $\mathbf{AlgHopfCom}_k$; contrariamente ao caso de álgebras de Lie, uma álgebra de Hopf é uma álgebra associativa, e assim existe um funtor de esquecimento

$$\mathcal{E}_{\mathbf{HopfCom}} : \mathbf{AlgHopfCom}_k \longrightarrow \mathbf{AlgCom}_k. \qquad \textbf{(I.3.1)}$$

Uma álgebra A, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, pode ser vista como um espaço vetorial dotado de morfismos

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A, \qquad u : k \longrightarrow A,$$

que fornecem, respectivamente, a multiplicação e a estrutura de álgebra sobre k. Estes morfismos devem satisfazer as condições usuais, que podem ser expressas por comutatividade de diagramas apropriados. No caso de uma álgebra de Hopf sobre k temos morfismos

$$\begin{aligned}
\Delta : A &\longrightarrow A \otimes A \\
\epsilon : A &\longrightarrow k \\
S : A &\longrightarrow A \\
\mu : A \otimes A &\longrightarrow A \\
u : k &\longrightarrow A,
\end{aligned}$$

que satisfazem propriedades duais. A subcategoria $\mathbf{AlgHopfComCocom}_k$ de álgebras de Hopf comutativas e cocomutativas admite assim um processo de *dualização* natural $A \to A^D$, em que a co-multiplicação de A^D é o morfismo dual da multiplicação em A, a co-unidade é o dual da estruturação sobre k, e assim por diante.

Exemplos e Exercícios

1. O caso de Sl_2. O grupo clássico Sl_2, visto como funtor representável, é representado pela álgebra de Hopf comutativa (o co-objeto de Hopf):

$$A = k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/(1 - (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})).$$

A co-multiplicação é dada por

$$\begin{aligned}
\Delta : A &\longrightarrow A \otimes A \\
X_{11} &\mapsto X_{11} \otimes X_{11} + X_{12} \otimes X_{21} \\
X_{12} &\mapsto X_{11} \otimes X_{12} + X_{12} \otimes X_{22} \\
X_{21} &\mapsto X_{21} \otimes X_{11} + X_{22} \otimes X_{21} \\
X_{22} &\mapsto X_{21} \otimes X_{12} + X_{22} \otimes X_{22},
\end{aligned}$$

a co-unidade por

$$\begin{aligned}
\epsilon : A &\to k \\
X_{11}, X_{22} &\mapsto 1 \\
X_{12}, X_{21} &\mapsto 0,
\end{aligned}$$

e o antípoda por

$$\begin{aligned}
S : A &\to A \\
X_{11} &\mapsto X_{22} \\
X_{22} &\mapsto X_{11} \\
X_{12} &\mapsto -X_{12} \\
X_{21} &\mapsto -X_{21}.
\end{aligned}$$

Referências.

O uso de álgebras de Hopf comutativas em Geometria Algébrica é exposto de forma clara e elegante em [**Wa**].

5.1.4 Álgebras de Lie e Álgebras Envolventes

Tal como definidas em **I.2**, as álgebras de Lie formam naturalmente uma categoria **AlgLie**, que já foi invocada naquela seção. Morfismos de álgebras de Lie são as transformações lineares que preservam as operações $[\bullet, \bullet]$, ideais (núcleos de morfismos) em uma álgebra de Lie V são subálgebras J tais que $[J, V] \subset J$ e em geral esta categoria funciona confortadoramente próxima da categoria **AnCom**.

Uma álgebra de Lie V é *abeliana* se $[V, V] = 0$. Todo espaço vetorial pode ser dotado de uma estrutura de álgebra de Lie abeliana definindo a operação $[\bullet, \bullet]$ desta maneira trivial. Mais interessante, para toda espaço vetorial V sobre k o conjunto das transformações lineares $Hom_k(V, V)$ tem naturalmente a estrutura de álgebra de Lie com a definição

$$[A, B] = AB - BA.$$

Por causa do exemplo **1.** em **I.2**, em que esta definição aparece como a álgebra de Lie $\mathcal{L}(Gl_n(\mathbf{R}))$, esta álgebra de Lie é denotada $gl(V)$. Mais geralmente, cada álgebra (associativa) A sobre k origina uma álgebra de Lie $gl(A)$ definindo, para $a, b \in A$,

$$[a, b] = ab - ba.$$

Assim, $gl(V) = gl(Hom_k(V, V))$.

Esta associação define um funtor

$$gl : \mathbf{Alg}_k \longrightarrow \mathbf{AlgLie}_k.$$

(A notação $\mathbf{Alg}_k$ designa a categoria de álgebras associativas, mas não necessariamente comutativas, sobre k). Se A, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, for comutativa então $gl(A)$ é abeliana.

Este funtor gl tem um adjunto à esquerda, geralmente denotado por $\mathcal{U}$ por lembrar "universal", diretamente ligado ao Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt. Para uma álgebra de Lie A define-se uma álgebra associativa $\mathcal{U}(A)$ denominada a *álgebra envolvente* ou a *álgebra envolvente universal* de A, da seguinte maneira. Sobre o espaço vetorial subjacente de A (que será denotado confusamente pela mesma letra A), é tomada a álgebra tensorial

$$T = \oplus_{i \geq 0} T^i, \qquad \text{onde } T^i = \otimes_{1 \leq j \leq i} A.$$

Em T é considerado o ideal bilateral J gerado por $a \oplus b - b \oplus a - [a, b]$ para todos os pares $(a, b) \in A \times A$, e a álgebra envolvente é definida como uma álgebra quociente por $\mathcal{U}(A) = T/J$. Como morfismo de espaços vetoriais existe um mergulho canônico $A \to T \to \mathcal{U}(A)$. A adjunção

$$\mathcal{U} : \mathbf{AlgLie}_k \leftrightarrow \mathbf{Alg}_k : gl$$

se expressa por

$$Hom_{\mathbf{Alg}_k}(\mathcal{U}(A), B) \xrightarrow{\simeq} Hom_{\mathbf{AlgLie}_k}(A, gl(B)).$$

A verificação é imediata.

O Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt garante mais do que esta adjunção: mostra como construir uma base de $\mathcal{U}(A)$ a partir de uma base de A (de dimensão não necessariamente finita).

Sendo adjunto à esquerda o funtor $\mathcal{U}$ naturalmente preserva colimites (ver (**A.4**)). Assim vale, para álgebras de Lie A e B, que são isomorfas em $\mathbf{Alg}_k$ as álgebras

$$\varphi : \mathcal{U}(A \oplus B) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{U}(A) \otimes \mathcal{U}(B).$$

Dada uma álgebra de Lie A aplicando o funtor $\mathcal{U}$ ao morfismo diagonal

$$\begin{aligned} \delta : A &\longrightarrow A \oplus A \\ a &\mapsto (a, a) \end{aligned}$$

e depois compondo com o isomorfismo φ definido acima resulta em um morfismo

$$\varphi \circ \mathcal{U}(\delta) : \mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathcal{U}(A) \otimes \mathcal{U}(A).$$

Este morfismo resultante satisfaz a propriedade co-associativa necessária para defini-lo como uma co-multiplicação $\delta = \varphi \circ \mathcal{U}(\delta)$ que é essencialmente a diagonal. Por outro lado, o espaço vetorial trivial $\{0\}$, objeto inicial e final em $\mathbf{Vect}_k$, é trivialmente uma álgebra de Lie que é objeto inicial e final em $\mathbf{AlgLie}_k$. Aplicando $\mathcal{U}$ ao único morfismo $A \to 0$ obtemos um morfismo $\epsilon : \mathcal{U}(A) \to k$ que é compatível com a co-multiplicação Δ definida acima.

A categoria $\mathbf{AlgLie}_k$ admite um processo de dualização: a cada álgebra de Lie A pode ser considerada a álgebra oposta A^{op} definida sobre o mesmo espaço subjacente com a operação

$$[a, b]^{op} = [b, a] = -[a, b].$$

As álgebras A e A^{op} são isomorfas pelo isomorfismo $\omega : a \mapsto -a$. Aplicando $\mathcal{U}$ a ω obtemos um morfismo $S = \mathcal{U}(\omega)$ que é compatível com a co-multiplicação Δ e com a co-unidade ϵ definidas acima, e logo a álgebra envolvente $\mathcal{U}(A)$ tem uma estrutura natural de álgebra de Hopf, agora não mais comutativa. álgebras de Hopf sobre k (não necessariamente comutativas) formam naturalmente uam categoria $\mathbf{AlgHopf}_k$, e existe, como em (**I.3.1**) um funtor de esquecimento

$$\mathcal{E}_{\mathbf{Hopf}} : \mathbf{AlgHopf}_k \longrightarrow \mathbf{Alg}_k.$$

A operação descrita acima define um funtor

$$\mathcal{H} : \mathbf{AlgLie}_k \longrightarrow \mathbf{AlgHopf}_k.$$

Para uma álgebra de Lie A a álgebra de Hopf $\mathcal{H}(A)$ não é, em geral comutativa, já que a multiplicação em $\mathcal{U}(A)$ é essencialmente o produto tensorial, que não tem porque comutar. No entanto $\mathcal{H}(A)$ é co-comutativa, isto é, o diagrama abaixo é comutativo, onde τ é troca de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(A)\times\mathcal{H}(A) & \xrightarrow{\tau} & \mathcal{H}(A)\times\mathcal{H}(A) \\ & \Delta \nwarrow & \uparrow \Delta \\ & & \mathcal{H}(A). \end{array}$$

A comutatividade deste diagrama é consequência da definição de $\mathcal{H}$ e da comutatividade de

$$\begin{array}{ccc} A\oplus A & \xrightarrow{\tau} & A\oplus A \\ & \delta \nwarrow & \uparrow \delta \\ & & A, \end{array}$$

onde, aqui também, τ é (outra) troca de coordenadas.

Exemplos e Exercícios

1. O caso de Sl_2. Algebricamente Sl_2 é um funtor representável $\mathbf{AlgCom}_k \to \mathbf{Grp}$, representado pela álgebra de Hopf comutativa mas não co-comutativa

$$A = k[X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}]/(1 - (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}))$$

com co-multiplicação, co-unidade e antípoda dado no exemplo **1.** de **I.3**.

Geometricamente, pelo menos para $k = \mathbf{R}$ o grupo $Sl_2(\mathbf{R})$ é um grupo de Lie, e como tal tem associado sua álgebra de Lie $\mathcal{L}(Sl_2(\mathbf{R})) = sl_2(\mathbf{R})$, calculada no exemplo **2.** de **I.2**. Tomando a álgebra envolvente

$$\mathcal{UL}(Sl_2(\mathbf{R})) = \mathcal{U}(sl_2(\mathbf{R})$$

temos uma álgebra de Hopf $\mathcal{H}(sl_2(\mathbf{R}))$, co-comutativa mas não comutativa. Naturalmente se coloca o problema de investigar a relação entre A e $\mathcal{H}(sl_2(\mathbf{R})$. De fato, estas álgebras são duais uma da outra.

A álgebra envolvente $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{R}))$ é gerada pelos elementos

$$X := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Y := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } H := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Valem as relações em $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{R}))$

$$\begin{gathered} [X,Y] = H, \qquad [H,X] = 2X, \qquad [H,Y] = -2Y, \\ X^i H^j = (H-2i)^j X^i, \qquad Y^i H^j = (H+2i)^j Y^i, \\ [X, Y^i] = iY^{i-1}(H-i+1), \qquad [X^i, Y] = iX^{i-1}(H+i-1). \end{gathered}$$

Como espaço vetorial $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{R}))$ admite a base

$$\{X^i Y^j H^k \mid i,j,k \in \mathbf{N}\ \}.$$

O centro de $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{R}))$ é gerado, como álgebra, pelo *elemento de Casimir*

$$C = XY + YX + \frac{H^2}{2}.$$

2. Mecânica algébrica na categoria $\mathbf{AlgHopf}_k$. Uma álgebra A, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, é um espaço vetorial dotado de morfismos

$$\mu : A \otimes A \longrightarrow A, \qquad u : k \longrightarrow A.$$

Se A tiver dimensão finita então o espaço vetorial dual $A^* = Hom_k(A,k)$ não tem uma estrutura de ágebra, mas uma de *co-álgebra*, isto é, um espaço vetorial dotado de morfismos

$$\Delta : A \longrightarrow A \otimes A, \qquad \epsilon : A \longrightarrow k.$$

Estes morfismos são chamados de co-multiplicação e de co-unidade, respectivamente. Co-álgebras, claro, definem uma categoria $\mathbf{CoAlg}_k$.

Uma álgebra A que é uma co-álgebra é algo interessante quando a multiplicação μ e a unidade u forem morfismos de co-álgebras, e isto acontece exatamente a co-multiplicação Δ e a co-unidade forem morfismos de álgebras. Neste caso a álgebra é dita uma *bi-álgebra*.

O morfismo que troca componentes em um produto tensorial será denotado por $\tau : A \otimes A \to A \otimes A$. Se A é bi-álgebra então A^{op} á a bi-álgebra que tem como multiplicação $\mu \circ \tau$, e as outras operações como A, A^{cop} é a bi-álgebra que tem como co-multiplicação $\tau \circ \Delta$, e as outras operações como A, e $A^{op\ cop}$ é a bi-álgebra que tem como multiplicação $\mu \circ \tau$, como co-multiplicação $\tau \circ \Delta$, e as outras operações como A. O dual de uma bi-álgebra tem uma estrutura de bi-álgebra.

Álgebras de Hopf são bi-álgebras que admitem um antípoda S. O dual de uma álgebra de Hopf de dimensão finita com antípoda S é uma álgebra de Hopf com antípoda S^*, a adjunta linear de S. Em uma álgebra de Hopf H, o antípoda é um morfismo de bi-álgebras

$$S : H \longrightarrow H^{op\ cop}.$$

Não é sempre verdade que $S^2 = id$; isto se passa exatamente quando para todo $x \in H$ vale

$$\mu \circ (S, id) \circ \Delta(x) = \epsilon(x).1,$$

que á equivalente a exigir que para todo $x \in H$ vale

$$\mu \circ (id, S) \circ \Delta(x) = \epsilon(x).1.$$

Se H for comutativa, isto é, se

$$\mu \circ \tau = \mu,$$

ou se H for co-comutativa, isto é, se

$$\tau \circ \Delta = \Delta,$$

então estas condições são satisfeitas.

Estes jogos de contas de vidro prosseguem indefinidamente: para uma álgebra de Hopf H a bi-álgebra $H^{op\ cop}$ é álgebra de Hopf com multiplicação $\mu \circ \tau$ e co-multiplicação $\tau \circ \Delta$, o antípoda S sendo morfismo de álgebra de Hopf.

A hipótese de dimensão finita, duas vezes formulada na discussão acima, é necessária. Uma co-álgebra C com co-multiplicação Δ traz naturalmente para seu dual linear $C^* = Hom_k(C, k)$ uma estrutura de álgebra através da adjunta $\Delta^* : (A \otimes A)^* \to A^*$ de Δ, depois da restrição de $(A \otimes A)^*$ a $A^* \otimes A^*$. Analogamente, se $\epsilon : A \to k$ é co-unidade então $\epsilon^* : k \to A^*$ é uma identidade para A^*. No entanto, se A é álgebra com multiplicação μ, nem sempre μ^* dota A^* de uma estrutura de co-álgebra: o problema é que a imagem de uma co-multiplicação $\Delta : a \mapsto \sum_i a_i \otimes b_i$ deve ser tal que o somatório seja uma operação *finita*; isto acontece se A tiver dimensão finita.

3. Grupos de Chevalley. O material aqui reunido adiciona algo mais ao assunto da classificação de grupos simples finitos.

O contexto será a categoria $\mathbf{AlgLie}_k$ de álgebras de Lie, e o ponto de vista será cada vez mais algébrico, começando com o caso $k = \mathbf{C}$. Em **I.2** foi visto que $ad : D(G)_I \to Hom_k(D(G)_I, D(G)_I)$ é um homomorfismo em $\mathbf{AlgLie}_k$ da álgebra de Lie $D(G)_I = \mathcal{L}(G)$ associada a um grupo de Lie G. Em geral, para uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$, objeto de $\mathbf{AlgLie}_k$, cada elemento $X \in \mathcal{L}$ define uma aplicação $ad(X) : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ por $ad(X) : Y \mapsto [X, Y]$. Esta aplicação é linear mas não é morfismo em $\mathbf{AlgLie}_k$: ao invés, a identidade de Jacobi mostra que

$$ad(X)([Y, Z]) = [X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z]+[Y, [X, Z]] = [ad(X)(Y), Z]+[Y, ad(X)(Z)],$$

algo como a regra de Leibniz para derivações. Assim definimos uma *derivação* de $\mathcal{L}$ como sendo uma aplicação linear $\delta : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ satisfazendo

$$\delta([X, Y]) = [\delta(X), Y] + [X, \delta(Y)].$$

Assim, para todo $X \in \mathcal{L}$ a aplicação $ad(X)$ é uma derivação de $\mathcal{L}$.

Sobre um corpo k de característica zero uma derivação δ nilpotente, isto é, tal que $\delta^n = 0$ para algum n, gera um automorfismo

$$exp(\delta) := 1 + \delta + \delta^2/2! + \cdots + \delta^{n-1}/(n-1)!$$

de $\mathcal{L}$. De fato, por indução se mostra

$$\delta^r([X, Y]) = \sum_{0\leq i\leq r} \binom{r}{i} [\delta^i(X), \delta^{r-i}(Y)],$$

e logo

$$\frac{\delta^r([X, Y])}{r!} = \sum_{0\leq i\leq r} [\frac{\delta^i(X)}{i!}, \frac{\delta^{r-i}(Y)}{(r-i)!}].$$

Assim,

$$\begin{aligned} exp(\delta)[X, Y] &= \sum_{r\geq 0} \sum_{i+j=r} [\frac{\delta^i(X)}{i!}, \frac{\delta^j(Y)}{j!}] \\ &= \sum_{i\geq 0} \sum_{j\geq 0} [\frac{\delta^i(X)}{i!}, \frac{\delta^j(Y)}{j!}] notag \qquad (5.2) \\ &= [exp(\delta)(X), exp(\delta)(Y)]. \end{aligned}$$

O que se usa agora é o início da teoria clássica de álgebras de Lie *simples*, isto é, aquelas que não tem ideais (no sentido de álgebras de Lie) não triviais (ver [**Hu**]). Tais álgebras foram classificadas por Cartan e por Killing, e nesta classificação é crucial o papel desempenhado pelas *subálgebras de Cartan*: tais subálgebras são as subálgebras nilpotentes maximais, isto é, subálgebras $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ tais que

$$[\cdots[[\mathcal{H}, \mathcal{H}], \mathcal{H}], \cdots, \mathcal{H}] = 0,$$

onde a operação $[\mathcal{H}, \mathcal{H}]$ à esquerda foi tomada um número finito de vezes, e tais que se $[X, H] \in \mathcal{H}$ para todo $H \in \mathcal{H}$ então $X \in \mathcal{H}$, isto é, $\mathcal{H}$ não é ideal de nenhuma subálgebra de $\mathcal{L}$ propriamente contendo $\mathcal{H}$.

Por exemplo, nas álgebras de Lie $\mathcal{L} = sl_n(k)$ de matrizes $n \times n$ de traço nulo uma subálgebra de Cartan é dada pelo conjunto $\mathcal{H}$ das matrizes $n \times n$ diagonais de traço nulo. Esta subálgebra tem dimensão $\dim(\mathcal{H}) = n - 1$, e em geral a dimensão de uma subálgebra de Cartan $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}$ é dito o *posto* de $\mathcal{L}$: este conceito é bem definido, uma vez que a dimensão de uma subálgebra de Cartan é um invariante de $\mathcal{L}$, e de fato todas as subálgebras de Cartan são conjugadas. Se $\mathcal{L}$ é simples então $[\mathcal{H}, \mathcal{H}] = 0$, e $\mathcal{L}$ admite uma decomposição em subespaços unidimensionais invariantes pela ação de $[H, \bullet]$ para $H \in \mathcal{H}$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}_r,$$

dita *decomposição de Cartan*. Por exemplo, nas álgebras de Lie $\mathcal{L} = sl_n(k)$ de matrizes $n \times n$ de traço nulo cada matriz $E_{ij} = (\delta ij)$ com $i \; /j$ gera um espaço $\mathcal{L}_i$ na decomposição de Cartan associada a $\mathcal{H}$ de matrizes diagonais $H = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$:

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}.$$

Em geral uma álgebra de Lie $\mathcal{L}$ simples admite uma base $\mathcal{C} = \{H_i \in \mathcal{H}, E_i \in \mathcal{L}_i\}$ na qual para quaisquer $X, Y \in \mathcal{C}$ vale que $[X, Y]$ pode ser escrito como uma combinação linear *inteira* de elementos de $\mathcal{C}$. Bases de $\mathcal{L}$ com esta propriedade são isoladas para classificar as álgebras simples $\mathcal{L}$, e são chamadas *bases de Chevalley*.

Dada uma base de Chevalley $\mathcal{C} = \{H_i \in \mathcal{H}, E_i \in \mathcal{L}_i\}$ de $\mathcal{L}$, a ação de $ad(E_i)$ é nilpotente, e pelo visto acima $exp(ad(E_i)$ é um automorfismo de $\mathcal{L}$. Definimos, para $\alpha \in k$, o automorfismo de $\mathcal{L}$

$$x_i(\alpha) = exp(\alpha \; ad(E_i)),$$

e consideramos o grupo $\mathcal{L}(k)$ que estes automorfismos geram em $Aut_{\mathbf{AlgLie}_k}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$.

No exemplo de $sl_n(k)$ estes automorfismos são exponenciais de matrizes de traço nulo, e estão no grupo de Lie $Sl_n(k)$ associado. Em geral recuperamos em $\mathcal{L}(k)$ um esqueleto do grupo de Lie.

Com efeito, se dada uma álgebra de Lie simples $\mathcal{L}$ considerarmos uma base de Chevalley $\mathcal{C}$ de $\mathcal{L}$ as relações satisfeitas pelos elementos $x_i(\alpha)$ (que decorrem das *constantes estruturais* de $\mathcal{L}$ em termos da base $\mathcal{C}$, isto é, da expressão dos resultados $[H_i, E_j]$, $[E_j, E_l]$ em termos da base $\mathcal{C}$) se expressam também em inteiros (e, claro, em $\alpha \in k$). Por exemplo, vale,

$$x_i(\alpha)(E_i) = (E_i), \qquad x_i(\alpha)(H_i) = H_i - 2\alpha E_i,$$

e assim por diante.

Isto permite a consideração, em primeiro lugar, de uma "álgebra de Lie inteira" $\mathcal{L}_{\mathbf{Z}}$, como sendo o grupo abeliano livre gerado por $\mathcal{C}$ sobre o qual é definida uma operação $[X, Y]$ *com as mesmas constantes estruturais* que $\mathcal{L}$ admitia sobre $\mathcal{C}$. Se K for agora um corpo qualquer, toma-se o morfismo único $\eta : \mathbf{Z} \to K$ sobre $\mathcal{L}_{\mathbf{Z}}$ e assim se define uma álgebra de Lie $\mathcal{L}_K$ com as constantes estruturais vindas das de $\mathcal{L}_{\mathbf{Z}}$ através de η. Nesta álgebra é possível definir automorfismos "vindos" de $x_1(\alpha)$ da seguinte forma: a matriz que representa $x_i(\alpha)$ tem entradas da forma $l\alpha^j$, onde $l \in \mathbf{Z}$ é inteiro. Se $a \in K$ então aplicamos nas entradas desta matriz a transformação $l\alpha^j \mapsto \eta(l)a^j$, e isto define um automorfismo $x_i(a)$. O subgrupo de $Aut_K(\mathcal{L}_K, \mathcal{L}_K)$ gerado por tais elementos $x_i(a)$ é denotado por $\mathcal{L}(K)$. Os elementos $x_i(a) \in \mathcal{L}(K)$ serão exponenciais, estarão ainda em "grupos de Lie", que agora poderão ser tomados sobre qualquer corpo, *inclusive sobre corpos finitos*.

Não deve ser surpreendente que tomando K um corpo finito recuperamos os grupos clássicos finitos listados em **1.** de (**I.1**). Mais surpreendente são as "exceções" que o teorema de classificação de álgebras de Lie simples indica: cinco álgebras, denotadas por G_2, F_4, E_6, E_7 e E_8, que são álgebras de Lie simples não sendo álgebras de Lie de grupos clássicos (o subscrito se refere ao posto da álgebra, isto é, a dimensão de qualquer subálgebra de Cartan). Estas álgebras são ditas *excepcionais*, e cumprem o mesmo papel dos grupos esporádicos no teorema de classificação de grupos simples. Mas as álgebras esporádicas $\mathcal{L}$ *geram grupos simples finitos* $\mathcal{L}(\mathbf{F}_q)$ ditos *grupos de Chevalley* (que não são grupos esporádicos).

4. Estruturação livre. As categorias de álgebras aqui consideradas são todas categorias concretas, para cada uma existindo funtores de esquecimento para a categoria **Conj**. Adjuntos à esquerda de funtores de esquecimento são funtores de estruturação livre.

O funtor de esquecimento

$$\mathcal{E}_{\mathbf{Alg}_k} \to \mathbf{Conj}$$

tem um adjunto á esquerda que a cada conjunto X, objeto de **Conj**, associa a álgebra $k\{X\}$ de polinômios em variáveis não comutativas indexadas por X: como espaço vetorial sobre k é gerado por palavras $x_{i_1} \dots x_{i_r}$, que se multiplicam por concatenação. O funtor de esquecimento

$$\mathcal{E}_{\mathbf{AlgCom}_k} \to \mathbf{Conj}$$

da categoria das álgebras comutativas sobre k tem um adjunto á esquerda que a cada conjunto X, objeto de **Conj**, associa a álgebra mais usual $k[X]$ de polinômios em variáveis comutativas indexadas por X.

O funtor de esquecimento

$$\mathcal{E} : \mathbf{Alg_k} \longrightarrow \mathbf{Mon}$$

que ignora a estrutura aditiva de uma álgebra e só deixa o monóide resultante, objeto de **Mon**, tem um adjunto à esquerda que associa a cada monóide M, objeto de **Mon**, a *álgebra do monóide* kM, com a multiplicação

$$\mu : m \otimes n \mapsto mn$$

dependendo da operação de M e sendo comutativa exatamente quando M o for. Esta álgebra kM tem estrutura de co-álgebra, co-comutativa sempre, com co-multiplicação e co-unidade dadas por

$$\Delta : m \mapsto m \otimes m, \qquad \text{e} \qquad \epsilon : m \mapsto 1.$$

Esta co-operações indempendem da operação de M, e como co-álgebra, objeto em $\mathbf{CoAlg}_k$, $kM = kX$ pode ser definida para qualquer conjunto $M = X$, objeto em **Conj**. *Caveat emptor:* a construção de kX *não* define adjunto, à esquerda ou à direita, do funtor de esquecimento

$$\mathcal{E}_{\mathbf{CoAlg}_k} : \mathbf{CoAlg}_k \longrightarrow \mathbf{Conj};$$

de fato, $\mathbf{CoAlg}_k$ tem como objeto final o corpo de constantes k com a estrutura de co-álgebra dada por $1 = 1 \otimes 1$, para cada co-álgebra C, objeto em $\mathbf{CoAlg}_k$, a co-unidade

$$\epsilon_C : C \longrightarrow k$$

sendo o único morfismo em $Hom_{\mathbf{CoAlg}_k}(C, k)$. Como k, depois de esquecida sua álgebra, não é o objeto final de **Conj**, que é o conjunto com um elemento só, o funtor de esquecimento $\mathcal{E}_{\mathbf{CoAlg}_k}$ não pode ter adjunto à direita. Por outro lado, o conjunto vazio $\varnothing$, o objeto inicial em **Conj**, não tem estrutura de co-álgebra, não tendo sequer estrutura de espqço vetorial, e logo o funtor de esquecimento $\mathcal{E}_{\mathbf{CoAlg}_k}$ não tem adjunto à esquerda. Como espaço vetorial sobre k, objeto em $\mathbf{Vect}_k$, p espaço vetorial subjacente à co-álgebra kX é dado por

$$kX = \oplus_{x \in X} kx,$$

e $X \to kX$ é adjunto à esquerda do funtor de esquecimento $\mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Conj}$, e assim sequer o funtor de esquecimento $\mathbf{CoAlg}_k \to \mathbf{Vect}_k$ admite adjunto à esquerda.

Se, além de monóide, $M = G$ for um grupo, objeto em **Grp**, então kG tem um antípoda $S : g \mapsto g^{-1}$ que faz de kG uma álgebra de Hopf (co-comutativa, mas nem sempre comutativa), objeto de $\mathbf{AlgHopfCocom}_k$.

Se G for finito então o dual $Hom_k(kG, k)$ é álgebra de Hopf (comutativa, mas nem sempre co-comutativa), objeto de $\mathbf{AlgHopfCom}_k$, dada pelas funções definidas em G tomando valores em k com a estrutura natural usual de ágebra: $Hom_k(kG, k) = Hom_{\mathbf{Conj}}(G, k)$; a co-multiplicação e a co-unidade são dadas por

$$\Delta(f)(g, h) = f(gh) \qquad \text{e} \qquad \epsilon(f) = f(1).$$

Se G for, além de finito, comutativo, então esta álgebra de Hopf $Hom_k(kG, k)$ é isomorfa a $k\hat{G}$, onde $\hat{G}$ é o *grupo de caracteres* de G (o *dual de Pontryagin*), o isomorfismo sendo dado pela transformada de Fourier. Se G não for comutativo então kG pode funcionar como funções $Hom_k(?, k)$ em um espaço "quântico" não comutativo inexistente, que generaliza $\hat{G}$ (neste caso, $\hat{G}$, definido como classes de equivalência de módulos simples, — não mais unidimensionais — não é mais um grupo).

5.1.5 Representações

O conceito bastante geral de representação para grupos foi definido no exemplo **3.** em **I.3**:

$$\rho : G \longrightarrow Aut_{\mathbf{C}}(C, C).$$

Se $\mathbf{C}$ for uma categoria de módulos com alguma estrutura então a representação linear ρ e o módulo C costumam ser identificados. Assim, por exemplo, se G for um grupo de Lie então em **I.2** foi visto que Ad é uma representação de G em sua álgebra de Lie $\mathcal{L}(G) = D(G)_I$, como um espaço vetorial, isto é, $\mathbf{C} = Vect_k$ é a categoria dos espaços vetoriais sobre k. Uma tal representação linear é simplesmente um morfismo de grupos $\rho : G \to Gl(V)$.

Naturalmente se generaliza este conceito para outras categorias. Assim, para uma álgebra de Lie A uma representação é um morfismo $\rho : A \to gl(V)$ de álgebras de Lie. Uma representação de um grupo de Lie G dá origem a uma representação de sua álgebra de Lie $\mathcal{L}(G)$ por derivação, e localmente vale uma recíproca. Se G for conexo e simplesmente conexo as representações em dimensão finita de G e de $\mathcal{L}(G)$ se correspondem bijetivamente.

Para uma álgebra A sobre k, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, uma representação é um morfismo $\rho : A \to Hom_k(V, V)$. Para uma álgebra de Lie A sobre k as representações de A correspondem bijetivamente às representações de sua álgebra envolvente $\mathcal{U}(A)$.

Para um funtor $G : \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$ em grupos e um funtor $X : \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ em conjuntos uma representação é uma transformação natural $G \times X \stackrel{\bullet}{\to} X$ que a cada objeto $\mathbf{C}$ define uma ação $G(C) \times X(C) \to X(C)$. No caso tartado em (**I.3**) acima $\mathbf{C} = \mathbf{AlgCom}_k$, e a representação é linear se para toda álgebra A, objeto de $\mathbf{AlgCom}_k$, $X(A) = V \times A$, para um módulo V sobre k fixo, e se $G(A)$ é linear sobre k. Se os funtores forem representáveis, observando o que estes dados implicam para os objetos que os representam, à maneira de Yoneda, é natural a definição: se A é um objeto de Hopf em $\mathbf{AlgCom}_k$ um módulo V sobre k é dito um *comódulo* sobre A se existir $\rho : V \to V \otimes A$ tornando comutativos os diagramas

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\rho}{\longrightarrow} & V\otimes A \\ \rho\Big\downarrow & & \Big\downarrow id\otimes\Delta \\ V\otimes A & \stackrel{\rho\otimes\Delta}{\longrightarrow} & V\otimes A\otimes A, \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\rho}{\longrightarrow} & V\otimes A \\ =\Big\downarrow & & \Big\downarrow id\otimes\epsilon \\ V & \stackrel{\simeq}{\longrightarrow} & V\otimes k. \end{array}$$

Se $V = A$ e $\rho = \Delta$ temos a *representação regular* de A.

Exemplos e Exercícios

1. O caso de Sl_2. Representações da álgebra de Lie $sl_2 = \mathcal{L}(Sl_2)$ correspondem a representações de sua álgebra envolvente $\mathcal{UL}(sl_2)$. Representações irredutíveis de dimensão finita de $\mathcal{UL}(sl_2)$ são parametrizadas por naturais da seguinte maneira. Lembramos (**1.** depois de (**I.4**)) que $\mathcal{UL}(sl_2)$ é gerada por X, Y e H; dado um módulo V sobre $\mathcal{UL}(sl_2)$, um autovetor $v \in V$ de H

$$Hv = \lambda v$$

é dito ter *peso* λ. (Aqui se identifica H com $\rho(H)$). Se, além disso, $Xv = 0$ então v é dito ser *vetor de peso máximo*.

Sobre um corpo algebricamente fechado k todo módulo tem vetor de peso máximo: certamente existirá um autovetor v de H com autovalor α, e se $Xv = 0$ ele será vetor de peso máximo. Caso contrário, considere-se a sequência $X^i(v)$. Pelas relações listadas em **1.** de (**I.4**) (válidas também em $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{C}))$) vale

$$HX^i(v) = (\alpha + 2i)X^i v,$$

e logo $X^i v$ são autovetores de H com autovalores distintos. Como o módulo tem dimensão finita, eventualmente acontece que $X^i v \neq 0$ mas $X^{i+1}v = 0$, e neste caso $X^i v$ é vetor de peso máximo. Destas relações ainda se deduz, para v vetor de peso máximo com peso λ,

$$H\frac{Y^i v}{i!} = (\lambda - 2i)\frac{Y^i v}{i!},$$

$$X\frac{Y^i v}{i!} = (\lambda - i + 1)\frac{Y^{i-1} v}{(i-1)!}$$

e

$$Y\frac{Y^i v}{i!} = (i+1)\frac{Y^{i+1}v}{(i+1)!}.$$

Assim, $\{\frac{Y^i v}{i!}\}$ é uma sequência de autovetores de H com autovalores distintos e, novamente, deve existir um maior inteiro i para o qual $\frac{Y^i v}{i!}$ não seja nulo. De fato, pelas relações acima $0 = X\frac{Y^{i+1}v}{(i+1)!} = (\lambda - i)\frac{Y^i v}{i!}$, e logo $\lambda = i$ é um inteiro. Além disso, $\{\frac{Y^j v}{j!}\}_{j=0,\ldots,\lambda}$ é conjunto linearmente independente, uma vez que são autovetores associados de H a distintos autovalores. O módulo que estes vetores geram tem assim dimensão $\lambda + 1$ e é simples, e a ação de H é diagonal com $\lambda + 1$ autovalores distintos $\lambda, \lambda - 2, \ldots, \lambda - 2\lambda = -\lambda$. O vetor de peso máximo é distinguido entre os autovetores por estar associado ao autovalor λ, de modo que qualquer outro vetor de peso máximo é um múltiplo escalar de v. Como qualquer módulo tem um vetor de peso máximo, os únicos módulos simples V (de dimensão finita) de $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{C}))$ são os módulos gerados por um vetor de peso máximo de peso inteiro $i = \dim V$. Este módulo é dito *módulo de peso máximo* e é denotado por $V(i)$, com a representação correspondente denotada por $\rho_i : sl_2(\mathbf{C}) \to gl_{i+1}(\mathbf{C})$.

Observe que ρ_0 é a representação trivial, ρ_1 é a representação natural $sl_2 \to gl_2$ e ρ_2 é a representação adjunta com X sendo o vetor de peso máximo, $-H = [Y, X]$ e $Y = \frac{[Y,[Y,X]]}{2!} = -\frac{[Y,H]}{2!}$.

No módulo $V(i)$ qualquer elemento do centro de $\mathcal{U}(sl_2(\mathbf{C}))$ age por um múltiplo escalar da identidade. Em particular, como para v o vetor de peso máximo e C o elemento de Casimir vale

$$Cv = XYv = YXv + \frac{H^2 v}{2} = iv + \frac{i^2}{2}v,$$

o elemento de Casimir age por multiplicação por $\frac{i(i+2)}{2}$.

5.2 Grupos Quânticos

5.2.1 O Plano Quântico, as Matrizes Quânticas e os Grupos Quânticos

A primeira seção deste trabalho terminou num impasse: disputando prioridade sobre o estudo dos grupos clássicos, os algebristas chamaram à atenção que estes grupos eram funtores $\mathbf{AlgCom}_k \to \mathbf{Grp}$ (uma terminologia francesa original era *funtores em grupos*; depois foi acatada a denominação *esquemas afins de grupo*). Estes funtores eram representáveis, e tudo a ser feito com eles podia ser feito, conforme Yoneda dizia, com os objetos que os representavam. Ora, estes objetos eram álgebras de Hopf *comutativas* sobre k, e a categoria $\mathbf{AlgHopfCom}_k$ ganhou fama e fortuna entre os algebristas.

Os geômetras, por outro lado, viam os grupos clássicos como grupos de Lie, eram levados a estudar suas álgebras de Lie correspondentes e, para fugir da não associatividade, passavam às álgebras envolventes, tendo aplicado o funtor composto $\mathcal{UL} : \mathbf{GrpLie} \to \mathbf{Alg}_k$. Ora, as álgebras onde caíram eram naturalmente álgebras de Hopf sobre k não comutativas, mas *co-comutativas*.

Salomonicamente, a teoria de grupos quânticos postula que a categoria a estudar é $\mathbf{AlgHopf}_k$, a categoria das álgebras de Hopf não (necessariamente) comutativas nem co-comutativas. A motivação veio do fato de os físicos terem que trabalhar com relações de comutação exóticas, o que os levaram a postular o *plano quântico*, a ser definido a seguir.

O plano comum A^2, para A uma álgebra comutativa sobre k, pode ser visto como o funtor representável $\mathbf{AlgCom}_k \to \mathbf{Conj}$ representado pela álgebra de polinômios em duas variáveis comutativas $k[X_1, X_2]$: a cada par ordenado (a, b) é associado o único morfismo em $Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(k[x, y], A)$ satisfazendo $x \mapsto a, y \mapsto b$. Incidentalmente, o grupo abeliano subjacente a A^2 torna $k[x, y]$ co-objeto de Hopf em $\mathbf{AlgCom}_k$, ou seja, uma álgebra de Hopf comutativa, com a comultiplicação dada por

$$\begin{aligned} \Delta : x &\mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x \\ y &\mapsto y \otimes 1 + 1 \otimes y. \end{aligned}$$

O golpe de estado que os físicos tramaram foi considerar o plano quântico baseado no anel de polinômios em duas variáveis não-comutativas, denotado por $k\{x, y\}$, e nele tomar o ideal bilateral I_q gerado pelo elemento

$$yx - qxy, \tag{II.1.1}$$

para q um elemento não nulo do corpo de constantes k. O parâmetro q vai funcionar como um parâmetro de deformação; devemos voltar a obter a situação comutativa "clássica" no caso $q = 1$. O plano quântico é definido pela álgebra quociente

$$k_q[x, y] := k\{x, y\}/I_q,$$

que é não comutativa se $q \neq 1$.

A terminologia adotada confunde o plano quântico com a álgebra que o representa. Para uma álgebra A, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, elementos do conjunto

$$Hom_{\mathbf{Alg}_k}(k_q[x, y], A)$$

estão em bijeção com pares ordenados (a, b) que satisfazem $ab = qba$, e são ditos *pontos do plano quântico definidos* sobre A.

A álgebra $k_q[x, y]$ é noetheriana, naturalmente graduada, não tem divisores de zero e tem o conjunto de monômios

$$\{x^i y^j \mid i, j \geq 0 \}$$

como base do espaço vetorial subjacente; para provar isto é usada a relação

$$y^j x^i = q^{ij} x^i y^j.$$

Outro plano quântico usado em supergeometria é definido pela álgebra

$${}_qk[x, y] := k\{x, y\}/(x^2, y^2, xy + qyx).$$

O ideal desta segunda álgebra sendo também homogêneo, ${}_qk[x, y]$ é também noetheriana e graduada, e o espaço vetorial subjacente admite a seguinte base

$$\{x^i y^j \mid 0 \leq i, j \leq 1 \}.$$

Não se pode mais confiar que as "matrizes" que vão agir no plano quântico sejam simplesmente os endomorfismos do plano em alguma categoria: é preciso definir as matrizes relevantes da mesma forma como foi definido o plano, por deformação, e então definir também a ação.

No que se segue é assumido $q^4 \neq 1$.

Na situação clássica o conjunto das matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ com coeficientes em uma álgebra comutativa A é identificado com

$$Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(k[a,b,c,d], A).$$

Da mesma forma, no plano quântico $k_q[x,y]$ em que vale a relação (**II.1.1**) $yx = qxy$ os produtos matriciais

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

referentes ao produto por $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ à esquerda e à direita, as relações $y'x' = qx'y'$ e $y''x'' = qx''y''$ são equivalentes às relações

$$\begin{aligned} ab &= q^{-1}ba, & ac &= q^{-1}ca \\ cd &= q^{-1}dc, & bd &= q^{-1}db \\ bc &= cb, & ad - da &= (q^{-1} - q)bc. \end{aligned} \qquad \textbf{(II.1.2)}$$

Por exemplo, o produto matricial à esquerda e (**II.1.1**) para x', y' implicam

$$(cx + dy)(ax + by) = q(ax + by)(cx + dy),$$

e identificando coeficientes de x^2, y^2 e xy segue

$$ca = qac, \qquad db = qbd, \qquad \text{e} \qquad cb + qda = qad + q^2bc.$$

Esta última relação implica na última relação de (**II.1.2**) por divisão por q. As outras verificações são similares, assim como a verificação da recíproca. Com isso, o conjunto das matrizes que vão operar no plano quântico $k_q[x,y]$ são definidas por

$$\mathcal{M}_q(2) := k\{a,b,c,d\}/R,$$

onde R é o ideal bilateral de $k\{a,b,c,d\}$ gerado pelas relações (**II.1.2**) acima. Se $q = 1$ claramente $\mathcal{M}_q(2)$ é a ágebra comutativa $k[a,b,c,d]$ que representa o funtor que para cada álgebra comutativa A fornece o conjunto das matrizes 2×2 com coeficientes em A. Para definir o produto matricial neste conjunto é necesário instituir a co-multiplicação que, no caso comutativo ($q = 1$) é dada por

$$\begin{aligned} \Delta : a &\mapsto a' \otimes a'' + b' \otimes c' \\ b &\mapsto a' \otimes b'' + b' \otimes d'' \\ c &\mapsto c' \otimes a'' + d' \otimes c'' \\ d &\mapsto c' \otimes b'' + d' \otimes d''. \end{aligned}$$

Como as relações (**II.1.2**) são homogêneas em a, b, c, d a álgebra $\mathcal{M}_q(2)$ é graduada, e o espaço vetorial subjacente admite a base

$$\{a^i b^j c^m d^n \mid i, j, m, n \geq 0\ \}.$$

Se A é uma álgebra sobre k, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, então os elmentos de $Hom_{\mathbf{Alg}_k}(\mathcal{M}_q(2), A)$ são ditos *pontos de* $\mathcal{M}_q(2)$ *definidos sobre* A. A notação matricial $\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix}$ para o ponto f é inevitável.

As matrizes 2×2 e o plano estão assim definidos, bem como o(s) produto(s) de uma matriz por um vetor. A próxima definição é

$$\det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc \in \mathcal{M}_q(2). \qquad \textbf{(II.1.3)}$$

De

$$\det_q a = (ad - q^{-1}bc)a = a(da - qbc) = a\det_q$$

segue que $\det_q$ comuta com a, e da mesma forma, $\det_q$ comuta com todas os geradores, e $\det_q$ está assim no centro de $\mathcal{M}_q(2)$. O determinante quântico se define também para um ponto f de $\mathcal{M}_q(2)$ definido sobre uma álgebra A por $\det_q(f) = f(a)f(d) - q^{-1}f(b)f(c)$. Se f, g são pontos de $\mathcal{M}_q(2)$ definidos sobre uma álgebra A tais que $f(a), f(b), f(c), f(d)$ comutam com $g(a), g(b), g(c), g(d)$ então o *produto*

$$\begin{pmatrix} f(a) & f(b) \\ f(c) & f(d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g(a) & g(b) \\ g(c) & g(d) \end{pmatrix}$$

é um ponto fg de $\mathcal{M}_q(2)$ definido sobre A, e neste caso $\det_q(f) = \det_q(g) = \det_q(fg) \in A$.

Em $\mathcal{M}_q(2)$ é definida uma co-multiplicação Δ e uma co-unidade ϵ que generalizam o caso comutativo:

$$\begin{aligned} \Delta : a &\mapsto a \otimes a + b \otimes c \\ b &\mapsto a \otimes b + b \otimes d \\ c &\mapsto c \otimes a + d \otimes c \\ d &\mapsto c \otimes b + d \otimes d, \end{aligned}$$

e

$$\epsilon : a, d \mapsto 1, \qquad \text{e} \qquad \epsilon : b, c \mapsto 0.$$

Com estas operações

$$\Delta(\det_q) = \det_q \otimes \det_q, \qquad \text{e} \qquad \epsilon(\det_q) = 1.$$

Podemos agora definir

$$(Gl_2)_q = \mathcal{M}_q(2)[t]/(t\det_q - 1),$$

e

$$(Sl_2)_q = \mathcal{M}_q(2)/(\det_q - 1).$$

Para uma álgebra A um *ponto de* $(Gl_2)_q$ ou de $(Sl_2)_q$ *definido sobre* A é um elemento do conjunto

$$Hom_{\mathbf{Alg}_k}(G_q, A), \qquad \text{para} \qquad G_q = (Gl_2)_q \text{ ou } G_q = (Sl_2)_q.$$

Os grupos quânticos G_q são objetos de Hopf em $\mathbf{Alg}_k$, ou seja, são álgebras de Hopf com o antípoda definido matricialmente por

$$\begin{pmatrix} S(a) & S(b) \\ S(c) & S(d) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det_q} \begin{pmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{pmatrix}.$$

Há muita verificação a ser cumprida para este enunciado. Há algum susto, também: o antípoda *não* é involutivo:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} S^2(a) & S^2(b) \\ S^2(c) & S^2(d) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & q^2 b \\ q^{-2}c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As álgebras de Hopf G_q não são nem comutativas nem co-comutativas.

Exemplos e Exercícios

1. Seja B a álgebra comutativa

$$B := Hom_{\mathbf{Diff}}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, \mathbf{C}),$$

e seja $q \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$.

Considere a álgebra não comutativa A, subálgebra de $Hom_{\mathbf{AlgCom}_k}(B, B)$, gerada por τ_q e δ_q, onde

$$\begin{aligned} \tau_q : B &\longrightarrow B \\ f &\mapsto \tau_q(f) : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \\ &\qquad\qquad x \mapsto f(qx) \end{aligned} \tag{5.3}$$

e

$$\begin{aligned} \delta_q : B &\longrightarrow B \\ f &\mapsto \delta_q(f) : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C} \\ &\qquad\qquad x \mapsto \frac{f(qx) - f(x)}{qx - x} \end{aligned} \tag{5.4}$$

O par (τ_q, δ_q) é um ponto de $k_q[x, y]$ definido sobre A. Quando q tende a 1, δ_q tende para a derivada usual.

5.2.2 A Álgebra Envolvente

No que se segue $k = \mathbf{C}$ será uma hipótese simplificadora (sem ser trivializante).

Definimos a álgebra $\mathcal{U}_q(sl_2)$ como sendo a álgebra (associativa) gerada pelos símbolos E, F, K, K^{-1} e L submetidos às relações

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^2F,$$

e

$$[E, F] = L, \qquad (q - q^{-1})L = K - K^{-1},$$
$$[L, E] = q(EK + K^{-1}E), \qquad [L, F] = -q^{-1}(FK + K^{-1}F).$$

Se $q = \pm 1$ então $K^2 = 1$, e K comuta então com os demais geradores, estando assim no centro $Z(\mathcal{U}_{\pm 1}(sl_2))$. Se $q = 1$ então fazendo $X = EK, Y = F$ e $H = LK$ valem as relações

$$[X, Y] = [EK, F] = [E, F]K = LK = H,$$

$$[H, Y] = [LK, EK] = [L, E] = 2EK = 2X$$

e

$$[H, Y] = [LK, F] = [L, F]K = -2FK^2 = -2Y.$$

Cotejando estas relações com as relações de definição de $\mathcal{U}(sl_2)$ (listadas em **1.** de (**I.4**)), fica claro que existe em epimorfismo em $\mathbf{Alg}_k$

$$\mathcal{U}(sl_2) \longrightarrow \mathcal{U}_1(sl_2)$$

satisfazendo $X \mapsto EK, Y \mapsto F$ e $H \mapsto LK$, e de fato vale

$$\mathcal{U}_1(sl_2) = \mathcal{U}(sl_2)[K]/(K^2 - 1),$$

e a álgebra $\mathcal{U}_q(sl_2)$ pode assim ser vista como uma deformação da álgebra envolvente $\mathcal{U}(sl_2)$, como a notação sugere.

A *álgebra envolvente quântica* $\mathcal{U}_q(sl_2)$ assim definida pode ser apresentada, se $q \neq \pm 1$, de uma forma mais simples como sendo a álgebra (associativa) gerada pelos símbolos E, F, K e K^{-1} submetidos às relações

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \qquad KEK^{-1} = q^2E, \qquad KFK^{-1} = q^2F,$$

como acima, e

$$[E, F] = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

O isomorfismo entre estas duas apresentações identifica letras que combinam, o único ponto não trivial é mostrar que as relações "mais complexas" envolvendo L, da primeira apresentação, são satisfeitas, mas isto é uma fácil manipulação.

Supondo $q \neq \pm 1$, será usada preferencialmente a segunda apresentação de $\mathcal{U}_q(sl_2)$, por ser mais simples.

Assim, $\mathcal{U}_q(sl_2)$ é noetheriana, sem divisores de zero, e tem como base

$$\{ \ E^i F^j K^l \mid i, j \in \mathbf{N}, l \in \mathbf{Z} \ \};$$

além disso, $\mathcal{U}_q(sl_2)$ admite um automorfismo

$$\omega : \mathcal{U}_q(sl_2) \to \mathcal{U}_q(sl_2)$$

satisfazendo $E \mapsto F, F \mapsto E$ e $K \mapsto K^{-1}$, e um antiautomorfismo

$$\tau : \mathcal{U}_q(sl_2)^{op} \to \mathcal{U}_q(sl_2)$$

satisfazendo $E \mapsto E, F \mapsto F$ e $K \mapsto K^{-1}$. (Dada uma álgebra A sobre k, objeto de $\mathbf{Alg}_k$, a álgebra oposta A^{op} tem o mesmo espaço vetorial subjacente e a multiplicação oposta: o produto ab em A^{op} é o produto ba em A. Esta definição é uma dádiva do fato de os axiomas de anel serem auto-duais; se A é comutativa então $A = A^{op}$).

Dotando os geradores dos graus $gr(E) = 1$, $gr(F) - 1$ e $gr(K) = gr(K^{-1}) = 0$, as relações que definem $\mathcal{U}_q(sl_2)$ são homogêneas, e logo $\mathcal{U}_q(sl_2)$ admite uma gradação natural em que o monômio $E^I F^j K^l$ tem grau $i - j$. Se $u \in \mathcal{U}_q(sl_2)$ tem grau g então se deduz das relações de definição que

$$KuK^{-1} = q^{2g}u.$$

Se q nao for raiz da unidade estes autovalores q^g são distintos, e a parte homogênea de grau g de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ são os autoespaços de $u \mapsto KuK^{-1}$. Se q for raiz da unidade a graduação de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ refina esta decomposição em autoespaços.

A subálgebra $\mathcal{U}^+$ (resp., $\mathcal{U}^-$) de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ gerada por E (resp., por F) tem como base $\{ \ E^i \mid i \in \mathbf{N} \ \}$ (resp., $\{ \ F^j \mid j \in \mathbf{N} \ \}$). Assim, $\mathcal{U}^+$ e $\mathcal{U}^-$ são comutativas, isomorfas a $k[T]$.

A subálgebra $\mathcal{U}^0$ de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ gerada por K e K^{-1} tem como base $\{ \ K^l \mid l \in \mathbf{Z} \ \}$. Assim, $\mathcal{U}^0$ é comutativa, isomorfa à localização $k[T, T^{-1}]$ de $k[T]$.

A álgebra envolvente quântica tem $\mathcal{U}_q(sl_2)$ admite um *elemento de Casimir quântico* C_q dado por

$$C_q = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

Este elemento C_q está no centro $Z(\mathcal{U}_q(sl_2))$ de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ e satisfaz

$$\omega(C_q) = C_q = \tau(C_q).$$

A álgebra envolvente quântica tem $\mathcal{U}_q(sl_2)$ uma estrutura de álgebra de Hopf, como se esperaria por ser deformação de $\mathcal{U}(sl_2)$, dada pela comultiplicação

$$\Delta : E \mapsto E \otimes 1 + K \otimes E,$$

$$\Delta : F \mapsto F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F,$$

$$\Delta : K \mapsto k \otimes K,$$

a co-unidade

$$\epsilon : E, F \mapsto 0, \qquad K \mapsto 1,$$

e o antípoda

$$S : E \mapsto -K^{-1}E, \qquad F \mapsto -FK, \qquad K \mapsto K^{-1}.$$

Novamente $\mathcal{U}_q(sl_2)$ não é nem comutativa nem co-comutativa, como se vê do fato de o antípoda não ser involutivo.

5.2.3 Módulos

Nesta seção $q \neq \pm 1$, de modo que $1/(q - q^{-1})$ está bem definido. Isto será aproveitado na definição

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} = q^{n-1} + q^{n-3} + \cdots + q^{-n+3} + q^{-n+1}.$$

Estes elementos aparecem substituindo inteiros em fórmulas nos módulos de $\mathcal{U}_q(sl_2)$. Os "fatoriais" e "coeficientes binomiais" que surgem são definidos por

$$[n]_q! = [1]_q.[2]_q.\cdots,[n]_q, \qquad \binom{n}{k}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}.$$

Valem

$$[-n]_q = -[n]_q, \qquad [n+m]_q = q^n[m] + q^{-m}[n].$$

Se q não for raiz da unidade então $[n]_q \neq 0$.

O objetivo agora é quantizar o que foi feito em **1.** de **I.5** para representações de sl_2. Os módulos simples de dimensão finita de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ são também "módulos de peso máximo", mas agora os vetores de peso máximo são autovetores de K. Especificamente, se V for um módulo sobre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ então se

$$Kv = \lambda v \qquad \text{para} \qquad v \neq 0$$

λ é chamado de *peso*, e para λ um peso o autoespaço de K associado a λ é denotado V^λ. Valem

$$EV^\lambda \subset V^{q^2\lambda} \qquad \text{e} \qquad FV^\lambda \subset V^{q^{-2}\lambda}.$$

Se $v \in V^\lambda \setminus \{0\}$ for tal que $Ev = 0$ então v é dito *vetor de peso máximo*. Um *módulo de peso máximo* é um módulo gerado por um vetor de peso máximo.

Sob a hipótese $k = \mathbf{C}$ todo módulo de dimensão finita tem um vetor de peso máximo. A demosntração segue os passos da apresentada para o caso clássico.

Valem as seguintes relações análogas às clássicas encontradas em **1.** de (**I.4**), para um vetor de peso máximo V de peso λ:

$$K\frac{F^i v}{[i]_q!} = \lambda q^{-2i}\frac{F^i v}{[i]_q!},$$

$$E\frac{F^i v}{[i]_q!} = \frac{q^{-(i-1)}\lambda - q^{i-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}}\frac{F^{i-1}v}{[i-1]_q!},$$

e

$$F\frac{F^{i-1}v}{[i-1]_q!} = [i]_q\frac{F^i v}{[i]_q!}.$$

Assim, $\{\frac{F^i v}{[i]_q!}\}$ é uma sequência de autovetores de K com autovalores distintos e, novamente, deve existir um maior inteiro i para o qual $\frac{F^i v}{[i]_q!}$ não seja nulo. De fato, pelas relações acima

$$0 = E\frac{F^{i+1}v}{i+1!} = \frac{q^{-i}\lambda - q^i\lambda^{-1}}{q - q^{-1}}\frac{F^i v}{[i]_q!},$$

e logo $\lambda = \pm q^i$. Como no caso clássico segue que se o módulo for simples então é módulo de peso máximo de dimensão $i+1$, e estes módulos são denotados por $V_{\pm,i}$, onde o sinal é dado por $\lambda = \pm q^i$. Também $\{\frac{F^j v}{[j]_q!}\}_{i=0,\dots,i}$ é base de $V_{\pm,i}$, e a ação de K é diagonal com $i+1$ autovalores distintos $\pm q^i, \pm q^{i-2}, \dots, \pm q^{-i+2}, \pm q^i$ (com sinais combinando: ou todos $+$ ou todos $-$). Quaisquer dois vetores de peso máximo diferem por uma constante multiplicativa. Finalmente, qualquer módulo simples de dimensão finita sobre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ é um módulo de peso máximo, e dois destes não são isomorfos. Assim, para cada dimensão i existem exatamente *dois* módulos simples sobre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ não isomorfos $V_{+,i-1}$ e $V_{-,i-1}$.

Para um escalar λ qualquer (não da forma $\lambda = \pm q^i$), as seguintes relações impostas sobre o espaço vetorial $V(\lambda)$ de dimensão infinita com base enumerável $\{v_j\}_{j\in\mathbf{N}}$

$$Kv_j = \lambda q^{-2j}v_j,$$

$$Ev_j = \frac{q^{-(i-1)}\lambda - q^{i-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}}v_{j-1},$$

e

$$Fv_{j-1} = [i]_q v_j$$

dotam $V(\lambda)$ da estrutura de um módulo sobre $\mathcal{U}_q(sl_2)$, onde v_0 é vetor de peso máximo. Estes módulos são ditos *módulos de Verma* e são universais no sentido de que todo módulo de peso màximo V sobre $\mathcal{U}_q(sl_2)$ com peso máximo λ é quociente de $V(\lambda)$.

O comutador de K em $\mathcal{U}_q(sl_2)$, denotado por $\mathcal{U}_q(sl_2)_K$ é o conjunto de elementos de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ que comutam com K. Como a conjugação por K atua na base de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ por

$$K(F^iK^lE^j)K^{-1} = q^{2(j-i)}F^iK^lE^j,$$

vale que

$$\mathcal{U}_q(sl_2)_K = \sum_{i \in \mathbf{N}} F^iP_i(K, K^{-1})E^i,$$

onde $P_i \in k[T, T^{-1}]$. o ideal à esquerda $calI$ de $\mathcal{U}_q(sl_2)_K$ gerado por E,

$$\mathcal{I} = \mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}_q(sl_2)_K,$$

é dado também por

$$\mathcal{I} = \mathcal{U}^+ \cap \mathcal{U}_q(sl_2)_K,$$

e vale

$$\mathcal{U}_q(sl_2)_K = k[K, K^{-1}] \oplus \mathcal{I}.$$

Isto se vê diretamente.

Assim $\mathcal{I}$ é um ideal bilateral de $\mathcal{U}_q(sl_2)_K$ e a projeção

$$\varphi : \mathcal{U}_q(sl_2)_K \longrightarrow l[K, K^{-1}]$$

é um morfismo em $\mathbf{Alg}_k$ dito o *homomorfismo de Harish-Chandra*.

Se V for módulo de peso máximo de $\mathcal{U}_q(sl_2)$ com peso máximo λ então para todo elemento central $z \in Z(\mathcal{U}_q(sl_2))$ e todo $v \in V$ vale

$$zv = \varphi(z)(\lambda)v.$$

De fato, z pode ser escrito

$$z = \varphi(z) + \sum_{i \in \mathbf{N}^+} F^iP_iE^i.$$

Se v_0 for o vetor de peso máximo então $Ev_0 = 0$, e como $Kv_0 = \lambda v_0$ vale $zv_0 = \varphi(z)(\lambda)v_0$. Mas $V(\lambda)$ é gerado por v_0, e logo para todo $v = uv_0 \in V(\lambda)$ com $u \in \mathcal{U}_q(sl_2)$ vale

$$zv = zuv_0 = uzv_0 = \varphi(\lambda)uv_0 = \varphi(\lambda)v.$$

Em particular, o elemento de Casimir quântico age por multiplicação pelo escalar

$$\frac{q\lambda + q^{-1}k^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

A restrição de homomorfismo de Harish-Chandra φ ao centro $Z(\mathcal{U}_q(sl_2))$ é injetiva, já que se $z \in Z(\mathcal{U}_q(sl_2))$ é não nulo e satisfaz $\varphi(z) = 0$ é possível escrever

$$z = \sum_{0<i\leq l} F^i P_i E^i.$$

Tomando um módulo de Verma $V(\lambda)$ com $\lambda \neq q^r$ para nenhum r, então $Ev_i = 0$ só para $i = 0$, e aplicando z em v_i vale que

$$zv_i = \varphi(z)(\lambda)v_i = 0,$$

por um lado, e por outro,

$$zv_i = F^I P_i E^i v_i = cP_i(\lambda)v_i$$

para $c \neq 0$. Segue que $P_i(\lambda) = 0$ e haveria um polinômio com infinitas raízes, um absurdo.

Apêndice A: A Linguagem Categórica

A.1 Categorias, funtores e transformações naturais. Uma *categoria* $\mathbf{C}$ é uma classe de objetos tal que:

- Para cada par ordenado (X, Y) de objetos é especificado um conjunto de *morfismos* denotado por $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$.
- Para cada objeto X é destacado um elemento id_X em $Hom_{\mathbf{C}}(X, X)$.
- Para cada terno ordenado (X, Y, Z) de objetos é especificada uma função

$$\begin{aligned} \circ : Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z) &\to Hom_{\mathbf{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

- Para $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ e $h \in Hom_{\mathbf{C}}(Z, W)$ temos
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$
- Para $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ temos
$$id_Y \circ f = f = f \circ id_X.$$

Um *funtor* $\mathcal{F}$ entre duas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, denotado por $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, é a especificação, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, de um objeto $\mathcal{F}(X)$ de $\mathbf{D}$ e, para cada par de objetos (X, Y) de $\mathbf{C}$, de uma aplicação de $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ em $Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{F}(Y))$, denotada por $f \mapsto \mathcal{F}(f)$. Estes dados estão sujeitos aos seguintes axiomas:

- Para cada objeto X de $\mathbf{C}$ temos $\mathcal{F}(id_X) = id_{\mathcal{F}(X)}$.
- Para cada par $(f, g) \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ temos $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f)$.

Um funtor tal como definido acima é às vezes qualificado de *covariante*, para distinguir da definição afim de funtor *contravariante* entre duas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, que é a especificação, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, de um objeto $\mathcal{F}(X)$ de $\mathbf{D}$ e, para cada par (X, Y) de objetos de $\mathbf{C}$, de uma aplicação de $Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ em $Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(Y), \mathcal{F}(X))$, denotada por $f \mapsto \mathcal{F}(f)$. Estes dados estão sujeitos aos axiomas (**A.1.3**) e

- Para cada par $(f, g) \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y) \times Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ temos $\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g)$.

A contravariância é um artifício conveniente de notação, mas formalmente desnecessário: dada uma categoria $\mathbf{C}$, denotamos por $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ a categoria que tem os mesmos objetos de $\mathbf{C}$ e para a qual um morfismo de X em Y é um morfismo de $\mathbf{C}$ de Y para X:

$$Hom_{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(X, Y) = Hom_{\mathbf{C}}(Y, X).$$

Assim, um funtor contravariante de $\mathbf{C}$ para $\mathbf{D}$ é um funtor covariante de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ para $\mathbf{D}$.

Dados dois funtores $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ entre as categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ uma *transformação natural* κ entre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, denotada $\kappa : \mathcal{F} \xrightarrow{\bullet} \mathcal{G}$, é a especificação, para cada objeto X de $\mathbf{C}$, de um elemento $\kappa_X \in Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(X), \mathcal{G}(X))$. Este dado é sujeito ao seguinte axioma

- Para cada elemento $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ temos $\mathcal{G}(f) \circ \kappa_X = \kappa_Y \circ \mathcal{F}(f)$.

Este axioma se representa graficamente pela comutatividade do quadrado de naturalidade (escrito em $\mathbf{D}$):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{\kappa_X} & \mathcal{G}(X) \\ \mathcal{F}(f)\Big\downarrow & & \Big\downarrow\mathcal{G}(f) \\ \mathcal{F}(Y) & \xrightarrow{\kappa_Y} & \mathcal{G}(Y) \end{array}$$

Categorias, funtores e transformações naturais formam o contexto natural de trabalho do que faremos a seguir. Os objetos comumente estudados em álgebra e Topologia naturalmente se constituem em categorias: por exemplo, a categoria dos grupos, denotada por **Grp**, tem por objetos grupos e por morfismos homomorfismos de grupos, e analogamente para a categoria dos aneis, denotada por **An**, para a categoria dos módulos à esquerda sobre um anel A, denotada por $_A\mathbf{Mod}$, para a categoria **Top** que tem por objetos espaços topológicos e por morfismos funções contínuas, e assim por diante. Os objetos destas categorias são conjuntos dotados de uma estrutura adicional (de grupo, espaço topológico, etc) e os morfismos são as funções entre os objetos que preservam esta estrutura adicional. Estas categorias são chamadas *categorias concretas*, e se caracterizam pela existência de um funtor fiel $\mathcal{E} : \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$, onde **Conj** é a categoria que tem por objetos, conjuntos, e por morfismos, funções, e $\mathcal{E}$ é dito *funtor de esquecimento*, que associa a cada objeto de $\mathbf{C}$ o conjunto subjacente sobre o qual é construida a estrutura adicional. (Um funtor é *fiel* se for injetor em cada conjunto de morfismos e é *pleno* se for sobrejetor nestes conjuntos).

Há também funtores de esquecimento como $\mathbf{An} \to \mathbf{Grp}$, que esquece a estrutura multiplicativa dos anéis, ${}_A\mathbf{Mod} \to \mathbf{Grp}$, e assim por diante.

Dadas duas transformações naturais $\kappa : \mathcal{F} \xrightarrow{\bullet} \mathcal{G}$ e $\psi : \mathcal{G} \xrightarrow{\bullet} \mathcal{H}$ de funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$, podemos considerar as compostas a nível de cada objeto X de $\mathbf{C}$: $(\psi \circ \kappa)_X = \psi_X \circ \kappa_X$. Assim, as transformações naturais entre funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$ se compõem, e esta composição obedece aos axiomas (**A.1.1**) e (**A.1.2**), de maneira que transformações naturais são morfismos de uma categoria denotada por $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ cujos objetos são funtores de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{D}$.

Dado um morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, se existir $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$ com $g \circ f = id_X$ (resp., $f \circ g = id_Y$) então g é dito *inversa à esquerda* (resp., *inversa à direita*) de f. Se f tiver simultaneamente inversa à esquerda e à direita então f é dito *inversível*, ou um *isomorfismo*. Os morfismos de **Conj** que tem inversa à esquerda são as funções injetoras, os que tem inversas à direita são as funções sobrejetoras e os inversíveis são as funções bijetoras, mas mesmo em categorias concretas, tão próximas de **Conj**, um morfismo pode ser dado por uma função injetora sem que tenha uma inversa à esquerda: por exemplo, a inclusão $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ em **Anud**, a categoria dos anéis com unidade (morfismos devem respeitar esta condição e levar unidades em unidades). Dois elementos X e Y de $\mathbf{C}$ para os quais existe $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ inversível são ditos *isomorfos*. Assim, dois objetos de **Conj** são isomorfos se e só se tiverem a mesma cardinalidade. Se $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são categorias e $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ e $\mathcal{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ funtores satisfazendo $\mathcal{F}\mathcal{G} \simeq id_{\mathbf{D}}$ e $\mathcal{G}\mathcal{F} \simeq id_{\mathbf{C}}$, isomorfismos naturais em $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$ e $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, respectivamente, então $\mathcal{F}$ ou $\mathcal{G}$ são chamados de *equivalências de categorias*. Uma equivalência de categorias $\mathcal{F}$ como acima é necessariamente um funtor pleno e fiel, e além disso todo objeto de $\mathbf{D}$ é isomorfo a um objeto da forma $\mathcal{F}(C)$.

Dado um morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$, se para quaisquer $g, h \in Hom_{\mathbf{C}}(Z, X)$ a equação $f \circ g = f \circ h$ implicar $g = h$ então f é um *monomorfismo* — este será certamente o caso se f tiver uma inversa à esquerda. Dualmente, se para quaisquer $g, h \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, Z)$ a equação $g \circ f = h \circ f$ implicar $g = h$ então f é um *epimorfismo* — este será certamente o caso se f tiver uma inversa à direita. Em **Conj** todo monomorfismo é uma injeção que tem uma inversa à esquerda; também, todo epimorfismo é uma sobrejeção que tem uma inversa à direita, mas para ver isto é necessário o uso do axioma da escolha. Na categoria de anéis **An** a inclusão $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$ é um epimorfismo.

Dados dois monomorfismos $f : Y \to X$ e $g : Z \to X$, dizemos que $f \subset g$ quando existir $h : Y \to Z$, necessariamente um monomorfismo, tal que $f = g \circ h$. Esta relação só não é uma ordem parcial por falha da anti-simetria, mas, como é usual nestes casos, podemos passar ao quociente pela relação de equivalência que identifica $f \subset g$ e $g \subset f$ para obter uma ordem parcial no conjunto quociente, denotado por $\mathrm{Sub}_{\mathbf{C}}(X)$; um elemento deste conjunto quociente é dito um *subobjeto*.

A.2. O lema de Yoneda. Um objeto X de uma categoria $\mathbf{C}$ define naturalmente um funtor covariante $Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet)$ e um funtor contravariante $Hom_{\mathbf{C}}(\bullet,X)$ de $\mathbf{C}$ para **Conj** da seguinte maneira. A cada objeto Y de $\mathbf{C}$ o funtor $Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet)$ associa o conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(X,Y)$ e o funtor $Hom_{\mathbf{C}}(\bullet,X)$ associa o conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(Y,X)$, e a cada morfismo $f \in Hom_{\mathbf{C}}(Y,Z)$ o funtor $Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet)$ associa a função $Hom_{\mathbf{C}}(X,f) : Hom_{\mathbf{C}}(X,Y) \to Hom_{\mathbf{C}}(X,Z)$ obtida por $g \mapsto f \circ g$ e o funtor $Hom_{\mathbf{C}}(\bullet,X)$ associa a função $Hom_{\mathbf{C}}(f,X) : Hom_{\mathbf{C}}(Z,X) \to Hom_{\mathbf{C}}(Y,X)$ obtida por $g \mapsto g \circ f$. Um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ é *representável* se for essencialmente obtido assim, isto é, se existir um objeto X em $\mathbf{C}$ e transformações naturais $\psi : Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet) \overset{\bullet}{\longrightarrow} \mathcal{F}$ e $\varphi : \mathcal{F} \overset{\bullet}{\longrightarrow} Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet)$ tais que para cada objeto Y em $\mathbf{C}$ as composições $\varphi_Y \circ \psi_Y$ e $\psi_Y \circ \varphi_Y$ sejam identidades. Dois funtores para os quais existe este par de transformações naturais são ditos naturalmente isomorfos. Há uma definição dual para um funtor contravariante representável.

Dados um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{Conj}$ e um objeto X em $\mathbf{C}$, uma transformação natural $\psi : Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet) \overset{\bullet}{\longrightarrow} \mathcal{F}$ é inteiramente descrita pela ação de ψ_X em id_X; com efeito, para todo objeto Y em $\mathbf{C}$ temos que para $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X,Y)$ vale a igualdade

$$\psi_Y \circ Hom_{\mathbf{C}}(X,f) = \mathcal{F}(f) \circ \psi_X \qquad \textbf{(A.2.1)}$$

de funções : $Hom_{\mathbf{C}}(X,X) \to \mathcal{F}(Y)$. Aplicando esta função em id_X temos

$$\begin{aligned} \psi_Y \circ Hom_{\mathbf{C}}(X,f)(id_X) &= \psi_Y(f \circ id_X) \\ &= \psi_Y(f) = \mathcal{F}(f) \circ \psi_X(id_X), \end{aligned}$$

e assim para qualquer objeto Y em $\mathbf{C}$ descrevemos ψ_Y em termos das variáveis $\mathcal{F}$ e X. A classe de transformações naturais de $Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet)$ em $\mathcal{F}$ é então um conjunto que denotamos por $Hom_{\mathbf{Conj}^{\mathbf{C}}}(Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet),\mathcal{F})$, e temos uma bijeção (escrita em **Conj**)

$$Hom_{\mathbf{Conj}^{\mathbf{C}}}(Hom_{\mathbf{C}}(X,\bullet),\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F}(X), \qquad \textbf{(A.2.2)}$$

natural em $\mathcal{F}$ e em X. Esta observação é comumente chamada de *lema de Yoneda*, e a equação acima se representa graficamente pela comutatividade do diagrama (escrito em **Conj**)

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{C}}(X,X) & \xrightarrow{\psi_X} & \mathcal{F}(X) \\ {\scriptstyle Hom_{\mathbf{C}}(X,f)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{F}(f)} \\ Hom_{\mathbf{C}}(X,Y) & \xrightarrow{\psi_Y} & \mathcal{F}(Y) \end{array}$$

A.3. Limites. Muitas construções comuns das categorias usuais da álgebra e da Topologia são exemplos do conceito categórico de limite, ou de colimite, seu dual: dados uma categoria $\mathbf{C}$, uma categoria $\mathbf{J}$ (a ser usada como índice) e um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, um *limite* de $\mathcal{F}$ é um objeto Lim $\mathcal{F}$ em $\mathbf{C}$ e, para cada objeto i de $\mathbf{J}$, um morfismo $f_i \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Lim } \mathcal{F}, \mathcal{F}(i))$ tal que para cada morfismo $u \in Hom_{\mathbf{J}}(i,j)$ temos $f_j = \mathcal{F}(u) \circ f_i$. Estes dados devem obedecer a uma propriedade dita universal: para cada objeto X em $\mathbf{C}$ ao qual se associa uma construção "paralela" à que Lim $\mathcal{F}$ possui, a saber, para cada objeto i de $\mathbf{J}$, temos um morfismo $g_i \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{F}(i))$ tal que para cada morfismo $u \in Hom_{\mathbf{J}}(i,j)$ tenhamos $g_j = \mathcal{F}(u) \circ g_i$, deve existir um único morfismo $t \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \text{Lim } \mathcal{F})$ satisfazendo $g_i = f_i \circ t$ para todo objeto i de $\mathbf{J}$.

Por exemplo, se $\mathbf{J}$ for a categoria $\mathbf{2}$ que tem apenas dois objetos 1 e 2 e nenhum morfismo que não seja a identidade, um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{2} \to \mathbf{C}$ é simplesmente a escolha de dois objetos $\mathcal{F}(i) = X_i$ para $i = 1, 2$ em $\mathbf{C}$, enquanto que um limite Lim $\mathcal{F}$ é um objeto em $\mathbf{C}$ determinado por dois morfismos $p_i \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Lim } \mathcal{F}, X_i)$ para $i = 1, 2$, tal que para todo objeto X de $\mathbf{C}$ dotado de morfismos $g_i \in Hom_{\mathbf{C}}(X, X_i)$ existe um único morfismo $g \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \text{Lim } \mathcal{F})$ para o qual $g_i = p_i \circ g$. Este objeto Lim $\mathcal{F}$ é dito *produto* de X_1 e X_2, e sempre existe se $\mathbf{C}$ for uma das categorias **Conj**, **Top** ou **Grp**, sendo simplesmente o produto cartesiano de conjuntos, o espaço topológico produto ou o produto de grupos, respectivamente.

Se **Vaz** for a categoria sem objetos nem morfismos então um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{Vaz} \to \mathbf{C}$ é vazio, enquanto que um limite Lim $\mathcal{F}$ é um objeto em $\mathbf{C}$ tal que para cada objeto X de $\mathbf{C}$ existe um único morfismo $X \to \text{Lim } \mathcal{F}$. Este objeto Lim $\mathcal{F}$ é dito *objeto final* em $\mathbf{C}$, e existe se $\mathbf{C}$ for **Conj** (neste caso Lim $\mathcal{F}$ é qualquer conjunto com um único elemento), **Top** (Lim $\mathcal{F}$ será então o espaço topológico construido sobre um conjunto com um único elemento com a única topologia possível) ou **Grp** (Lim $\mathcal{F}$ é o grupo trivial).

Se $\mathbf{J}$ for a categoria **Paral** que tem apenas dois objetos 1 e 2 e cujos únicos morfismos fora as identidades são descritos por $1 \overset{\longrightarrow}{\longrightarrow} 2$, um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{Paral} \to \mathbf{C}$ é dado por dois morfismos $f, g \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}(1), \mathcal{F}(2))$, enquanto que um limite Lim $\mathcal{F}$ é um objeto em $\mathbf{C}$ dado com um morfismo $p \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Lim } \mathcal{F}, \mathcal{F}(1))$ satisfazendo $f \circ p = g \circ p$, tal que para todo objeto X de $\mathbf{C}$ dotado de um morfismo $q \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{F}(1))$ satisfazendo $f \circ q = g \circ q$ existe um único morfismo $u \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \text{Lim } \mathcal{F})$ com $q = p \circ u$. Este objeto Lim $\mathcal{F}$ é dito *equalizador* de f e g. Claramente se vê que p é necessariamente um monomorfismo.

Se $\mathbf{J}$ for a categoria **Transv** que tem apenas tres objetos 1, 2 e 3, e cujos únicos morfismos fora as identidades são descritos por

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{Transv} \to \mathbf{C}$ é dado por dois morfismos $f \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}(1), \mathcal{F}(2))$ e $g \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}(3), \mathcal{F}(2))$ enquanto que um limite Lim $\mathcal{F}$ é um objeto em $\mathbf{C}$ dado com morfismos $p_1 \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Lim } \mathcal{F}, \mathcal{F}(1))$ e $p_3 \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Lim } \mathcal{F}, \mathcal{F}(3))$ satisfazendo $f \circ p_1 = g \circ p_3$, tal que para todo objeto X de $\mathbf{C}$ dotado de morfismos $q_1 \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{F}(1))$ e $q_3 \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \mathcal{F}(3))$ satisfazendo $f \circ q_1 = g \circ q_3$ existe um único morfismo $u \in Hom_{\mathbf{C}}(X, \text{Lim } \mathcal{F})$ com $q_1 = p_1 \circ u$ e $q_3 = p_3 \circ u$. Este objeto Lim $\mathcal{F}$ é dito *produto fibrado* de f e g, e denotado por $\mathcal{F}(1) \times_{\mathcal{F}(2)} \mathcal{F}(3)$. Se f for um monomorfismo representando um subobjeto (ver (**A.1**)), então p_3 será também um monomorfismo, representando um subobjeto de $\mathcal{F}(3)$ denotado por $\text{Sub}_{\mathbf{C}}(g)$. Como $\text{Sub}_{\mathbf{C}}(g \circ h) = \text{Sub}_{\mathbf{C}}(h) \circ \text{Sub}_{\mathbf{C}}(g)$, temos que $\text{Sub}_{\mathbf{C}}$ é um funtor contravariante de $\mathbf{C}$ em $\mathbf{Conj}$. Quando este funtor é representável de modo a termos $\text{Sub}_{\mathbf{C}}(X) \simeq Hom_{\mathbf{C}}(X, \Omega)$ então chamamos este objeto Ω que o representa de *classificador de subobjetos* . Por exemplo, $\text{Sub}_{\mathbf{Conj}}$ é representado pelo objeto classificador de subobjetos dado por qualquer conjunto com dois elementos, já que um subconjunto Y em $\text{Sub}_{\mathbf{Conj}}(X)$ é caracterizado por sua função característica $\chi_Y : X \to \{0, 1\}$, definida por $\chi_Y(x) = 1$ se e só se $x \in Y$.

Limites nem sempre existem: a categoria **Cor** de corpos não tem produtos (um "produto" de corpos é um anel apenas, não é um corpo). Quando existem não são únicos: qualquer conjunto com um único elemento é um objeto final em **Conj**; mas dois limites $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ são sempre isomorfos. Com efeito, $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ devem satisfazer as propriedades universais apropriadas; por definição da propriedade universal para $\mathcal{L}$ deve existir $f' \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{L}', \mathcal{L})$ satisfazendo as propriedades de comutação e analogamente para $f \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}')$. Estas composições também irão satisfazer as propriedades de comutação, assim como obviamente as satisfazem as identidades $id_{\mathcal{L}}$ e $id_{\mathcal{L}'}$. Agora invocamos a unicidade na propriedade universal para concluir que estas composições são isomorfismos.

O conceito dual de limite é o do *colimite*: dados uma categoria $\mathbf{C}$, uma categoria $\mathbf{J}$ (a ser usada como índice) e um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, um *colimite* de $\mathcal{F}$ é um objeto Colim $\mathcal{F}$ em $\mathbf{C}$ e para cada objeto i de $\mathbf{J}$ um morfismo $f_i \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}(i), \text{Colim } \mathcal{F})$ tal que para cada morfismo $u \in Hom_{\mathbf{J}}(i, j)$ temos $f_i = f_j \circ \mathcal{F}(u)$. Estes dados devem obedecer à seguinte propriedade universal: para cada objeto X em $\mathbf{C}$ ao qual se associa, para cada objeto i de $\mathbf{J}$, um morfismo $g_i \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}(i), X)$ tal que para cada morfismo $u \in Hom_{\mathbf{J}}(i, j)$ tenhamos $g_i = g_j \circ \mathcal{F}(u)$ deve existir um único morfismo $t \in Hom_{\mathbf{C}}(\text{Colim } \mathcal{F}, X)$ satisfazendo $g_i = t \circ f_i$ para todo objeto i de $\mathbf{J}$. Colimites para funtores tendo como domínios as categorias **2**, **Vaz**, **Paral** e **Transv** são chamados *coprodutos*, *objetos iniciais*, *coequalizadores* e *somas fibradas*, respectivamente. Coprodutos existem em **Top**, sendo a construção da soma topológica de dois espaços, em **Conj**, sendo a união disjunta de dois conjuntos, em $_A\mathbf{Mod}$, sendo a soma externa $M \oplus N$ de dois modulos sobre um anel A, e em **AnCom**, a categoria de aneis comutativos com unidade, sendo o produto tensorial. O conjunto vazio é objeto inicial de **Conj** e de **Top**, o anel dos inteiros é objeto inicial de **Anud**. Somas fibradas e coequalizadores existem em **Conj** e em **Top**. Como no caso de limites, os colimites, quando existem, são únicos a menos de isomorfismos.

Os limites que existirem em uma categoria $\mathbf{D}$ existirão em qualquer categoria de funtores $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$, e são calculados "ponto a ponto" da seguinte forma: se $\mathbf{J}$ é uma categoria índice para a qual limites de funtores $\mathbf{J} \to \mathbf{D}$ existem então, para todo objeto X de $\mathbf{C}$, a avaliação em X preserva este limite, de tal modo que um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ fornece por avaliação em X um funtor $\mathcal{F}_X : \mathbf{J} \to \mathbf{D}$ tal que $\mathcal{F}_X(j) = \mathcal{F}(j)(X)$, cujo limite existe por hipótese. Estes limites se juntam em um limite para $\mathcal{F}$ para o qual temos a equação escrita em $\mathbf{D}$

$$\mathrm{Lim}\ \mathcal{F}(X) = \mathrm{Lim}\ \mathcal{F}_X,$$

onde o limite à direita é calculado em $\mathbf{D}$ e o limite à esquerda em $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Uma categoria é dita *completa* (resp., *cocompleta*) se tiver todos os limites (resp., todos os colimites). A este respeito temos o

Teorema sobre a Existência de Limites. *A categoria* $\mathbf{C}$ *é completa se e só se tiver produtos e equalizadores.*

A prova mostra como construir o limite de um funtor arbitrário $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ a partir de produtos e de equalizadores. Para isso em $\mathbf{C}$ consideramos o produto P dos objetos $\mathcal{F}(i)$ para cada objeto i de $\mathbf{J}$, e o produto Q dos objetos $\mathcal{F}(j)$ para cada morfismo $u : i \to j$ em $\mathbf{J}$. Assim, para cada objeto i de $\mathbf{J}$ temos uma projeção $p_i : P \to \mathcal{F}(i)$ e para cada morfismo $u : i \to j$ de $\mathbf{J}$ temos uma projeção $q_u : Q \to \mathcal{F}(j)$. Pela universalidade do produto Q existe um único morfismo $f : P \to Q$ com $\mathcal{F}(u) \circ p_i = q_u \circ f$ e um único morfismo $g : P \to Q$ com $p_j = q_u \circ g$ para cada objeto i e cada morfismo $u : i \to j$ de $\mathbf{J}$. O limite $\mathrm{Lim}\ \mathcal{F}$ então pode ser construido como o equalizador de f e g. Um esquema mnemônico para esta prova é o seguinte: para $\mathcal{F} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ o $\mathrm{Lim}\ \mathcal{F}$ é o equalizador de $f, g : \prod_j \mathcal{F}(j) \rightrightarrows \prod_{u:j \to j'} \mathcal{F}(j')$, onde o primeiro produto é tomado sobre os objetos j de $\mathbf{J}$ e o segundo sobre os morfismos $u : j \to j'$ de $\mathbf{J}$ e, se $\pi_u : \prod_u \mathcal{F}(j') \to \mathcal{F}(j')$ denota a projeção canônica, então $\pi_u \circ f = \pi_u \circ g$.

Vale um enunciado dual para colimites, que podem ser construidos através de coprodutos e coequalizadores. Em **Conj**, por exemplo,

$$\mathrm{Colim}\ \mathcal{F} = \amalg_j \mathcal{F}(j)/E \qquad \textbf{(A.3.1)}$$

onde E é a relação de equivalência no coproduto (isto é, a reunião disjunta) dada colocando $x \in \mathcal{F}(j)$ equivalente a $x' \in \mathcal{F}(j')$ exatamente quando existirem $u : j \to k$ e $u' : j' \to k$, morfismos em $\mathbf{J}$, com $\mathcal{F}(u)(x) = \mathcal{F}(u')(x')$.

A categoria **Conj** é completa, e, pelo visto acima, também as categorias $\mathbf{Conj}^{\mathbf{C}}$.

A.4. Funtores adjuntos. Dado um funtor $\mathcal{F}$ entre duas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, diz-se que $\mathcal{F}$ *preserva limites* se para cada limite Lim $\mathcal{L}$ em $\mathbf{C}$ tivermos $\mathcal{F}(\text{Lim } \mathcal{L}) = \text{Lim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{L})$. O estudo sobre a preservação de limites em funtores nos leva ao conceito mais importante da teoria de categorias: Um funtor $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ é *adjunto à esquerda* de um funtor $\mathcal{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ se para cada par de objetos C em $\mathbf{C}$ e D em $\mathbf{D}$ existir uma bijeção (escrita em **Conj**)

$$\varphi_{C,D} : Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), D) \tilde{\to} Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(D)), \qquad \textbf{(A.4.1)}$$

natural em C e D. Para designar a adjunção descrita acima usaremos a notação

$$\mathcal{F} : \mathbf{C} \longleftrightarrow \mathbf{D} : \mathcal{G},$$

onde o adjunto à esquerda é escrito à esquerda.

Grande número de situações familiares são exemplos de adjunções. A propriedade que caracteriza o produto tensorial de módulos sobre um anel A pode ser escrita como a existência de uma bijeção natural

$$Hom_{{}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}}(U \otimes_A V, W) \to Hom_{{}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}}(U, Hom_{{}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}}(V, W)). \qquad \textbf{(A.4.2)}$$

Isto é equivalente a dizer que o funtor $Hom_{{}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}}(V, \bullet)$ representado por V é adjunto à direita do funtor $\bullet \otimes_A V : {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod} \to {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}$.

Na definição de funtor adjunto a naturalidade (em C) de φ deve ser entendida da seguinte maneira: dados objetos C e C' em $\mathbf{C}$ e $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, C')$ vale a equação escrita em $Hom_{\mathbf{D}}(C', \mathcal{G}(D))$

$$\varphi_{C',D}(u \circ \mathcal{F}(f)) = \varphi_{C,D}(u) \circ f$$

para todo $u \in Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C'), D)$. Este raciocínio se representa graficamente pelo diagrama comutativo (escrito em **Conj**)

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C'), D) & \xrightarrow{\varphi_{C',D}} & Hom_{\mathbf{C}}(C', \mathcal{G}(D)) \\ {\scriptstyle Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(f), D)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Hom_{\mathbf{C}}(f, \mathcal{G}(D))} \\ Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), D) & \xrightarrow{\varphi_{C,D}} & Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(D)) \end{array}$$

Uma equação análoga para naturalidade em D pode ser analogamente explicitada.

Um Teorema importante garante que um funtor adjunto à esquerda preserva colimites:

Teorema da Preservação de Limites. *Valem as seguintes situações em que limites são preservados.*

1. *Se $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tem adjunto à esquerda (resp., à direita) e $\mathcal{L} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ tem um limite* $\mathrm{Lim}\ \mathcal{L}$ *(resp., um colimite* $\mathrm{Colim}\ \mathcal{L}$*) em* $\mathbf{C}$ *então* $\mathcal{F}(\mathrm{Lim}\ \mathcal{L}) = \mathrm{Lim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{L})$ *(resp.,* $\mathcal{F}(\mathrm{Colim}\ \mathcal{L}) = \mathrm{Colim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{L})$*).*

2. *Funtores representáveis preservam limites: se C é objeto de uma categoria* $\mathbf{C}$ *então o funtor representável* $Hom_{\mathbf{C}}(C, \bullet) \to \mathbf{Conj}$ *é tal que, se* $\mathcal{L} : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *tem um limite* $\mathrm{Lim}\ \mathcal{L}$ *então* $Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathrm{Lim}\ \mathcal{L}) = \mathrm{Lim}\ (Hom_{\mathbf{C}}(C, \bullet) \circ \mathcal{L})$.

3. *Limites comutam com limites (e colimites comutam com colimites), isto é, se o funtor* $\mathcal{F}$ *for definido por limites então vale* $\mathcal{F}(\mathrm{Lim}\ \mathcal{L}) = \mathrm{Lim}(\mathcal{F} \circ \mathcal{L})$. *Formalmente isto significa que se* $\mathcal{F} : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \to \mathbf{C}$ *for funtor em* $\mathbf{A}$ *e em* $\mathbf{J}$ *e se existirem os limites* $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}(\bullet, j)$, $\mathrm{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$ *e* $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$, *então* $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F} = \mathrm{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}$, *e analogamente para colimites.*

4. *Colimites não comutam necessariamente com limites — ao invés disto temos um morfismo natural* $\kappa : \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} \to \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$, *que nem sempre é isomorfismo. No caso de um funtor* $\mathcal{F} : \mathbf{I} \times \mathbf{J} \to \mathbf{Conj}$ *uma condição suficiente para termos* κ *isomorfismo é a categoria* $\mathbf{I}$ *ser finita e a categoria* $\mathbf{J}$ *não ser vazia e satisfazer*

4.i *Para quaisquer objetos j, j' de* $\mathbf{J}$ *temos um objeto k de* $\mathbf{J}$ *e morfismos* $j \to k$ *e* $j' \to k$.

4.ii *Para quaisquer morfismos paralelos* $u, v : j \rightrightarrows j'$ *existe um morfismo* $w : j' \to k$ *com* $w \circ u = w \circ v$.

Uma categoria safisfazendo as condições em **4.** é dita *filtrada*.

Para provar **1.** suponhamos, por exemplo, que $\mathcal{F} : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ tem adjunto à direita $\mathcal{G} : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$, tomamos o objeto $\mathcal{F}(\mathrm{Colim}\ \mathcal{L})$ em $\mathbf{D}$ e mostremos que ele satisfaz à propriedade universal de colimite para $\mathcal{F} \circ \mathcal{L}$. Para isso consideremos um objeto D em $\mathbf{D}$ tal que para cada objeto i de $\mathbf{J}$ tenhamos especificado um morfismo $u_i : \mathcal{F} \circ \mathcal{L}(i) \to D$ em $\mathbf{D}$ tal que para cada morfismo $f : i \to j$ em $\mathbf{J}$ tenhamos $u_j \circ (\mathcal{F} \circ \mathcal{L}(f)) = u_i$. Aplicando a bijeção $\varphi_{\mathcal{L}(i),D}$ dada pela adjunção ao morfismo u_i obtemos $\varphi_{\mathcal{L}(i),D}(u_i) \in Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{L}(i), \mathcal{G}(D))$, e a naturalidade de φ nos objetos de $\mathbf{C}$ garante que $\varphi_{\mathcal{L}(j),D}(u_j) \circ \mathcal{L}(f) = \varphi_{\mathcal{L}(i),D}(u_i)$ para cada morfismo $f : i \to j$ em $\mathbf{J}$. Pela universalidade de $\mathrm{Colim}\ \mathcal{L}$ existe um único morfismo $v : \mathrm{Colim}\ \mathcal{L} \to \mathcal{G}(D)$ ao qual aplicamos $\varphi^{-1}_{\mathrm{Colim}\ \mathcal{L}, \mathcal{G}(D)}$ obtendo um morfismo $\varphi^{-1}(v) : \mathcal{F}(\mathrm{Colim}\ \mathcal{L}) \to D$ em $\mathbf{D}$. Este morfismo satisfaz as propriedades de comutação apropriadas e é único por naturalidade.

Para provar **2.** aplicamos o funtor $Hom_{\mathbf{C}}(C, \bullet)$ em $\nu_i : \mathrm{Lim}\ \mathcal{L} \to \mathcal{L}(i)$, obtendo morfismos $Hom_{\mathbf{C}}(C, \nu_i) : Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathrm{Lim}\ \mathcal{L}) \to Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{L}(i))$ por composição. Para mostrar a universalidade de $Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathrm{Lim}\ \mathcal{L})$ tomamos um outro objeto X em $\mathbf{Conj}$ com morfismos $\tau_i : X \to Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{L}(i))$, para cada objeto i de $\mathbf{J}$, satisfazendo as propriedades necessárias de comutação. Cada elemento x de X fornece um morfismo $\tau_i(x) : C \to \mathcal{L}(i)$ em $\mathbf{C}$, também satisfazendo estas comutações necessárias. Por universalidade do limite $\mathrm{Lim}\ \mathcal{L}$, existe um único morfismo

$h_x : C \to \text{Lim } \mathcal{L}$ com $\nu_i \circ h_x = \tau_i(x)$. Definimos então $h : X \to Hom_{\mathbf{C}}(C, \text{Lim } \mathcal{L})$ por $k(x) = h_x$, e k é a única definição possível com $Hom_{\mathbf{C}}(C, \nu_i) \circ k = \tau_i$, provando a universalidade.

Para provar **3.** construimos, para cada objeto i de $\mathbf{I}$ e cada objeto j de $\mathbf{J}$, o diagrama escrito em $\mathbf{C}$

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(i,j) & \stackrel{\nu_{ij}}{\longleftarrow} & \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}(\bullet, j) \\
\mu_{ij}\Big\uparrow & & \Big\uparrow\nu_j \\
\text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet) & \stackrel{\alpha_i}{\longleftarrow} & \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} \\
\mu_i\Big\uparrow & & \Big\downarrow\kappa \\
\text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F} & \stackrel{=}{\longleftarrow} & \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}
\end{array}$$

onde, por exemplo, $\mathcal{F}(i, \bullet)$ denota um funtor $\mathbf{J} \to \mathbf{C}$, e por isto indexamos seu limite por $\mathbf{J}$; observamos que ele só depende de i. Os morfismos $\mu_{ij}, \mu_i, \nu_{ij}$ e ν_j são dados pelas construções dos limites $\text{Lim}_{\mathbf{J}}, \text{Lim}_{\mathbf{I}}\text{Lim}_{\mathbf{J}}, \text{Lim}_{\mathbf{I}}$ e $\text{Lim}_{\mathbf{J}}\text{Lim}_{\mathbf{I}}$, respectivamente. Como, para cada objeto i de $\mathbf{I}$, o morfismo composto $\nu_{ij} \circ \nu_j$ é natural em j, a universalidade do limite $\text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$ fornece um único morfismo $\alpha_i : \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} \to \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$. Esta construção é natural em i, e por universalidade do limite $\text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$ temos um único morfismo $\kappa : \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} \to \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \text{Lim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$. Revertendo a situação em $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$, temos um morfismo único que será o inverso deste, e logo este κ é um isomorfismo.

Para provar **4.** construimos o morfismo κ de modo análogo ao de **3.**, com algumas setas invertidas:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(i,j) & \stackrel{\mu_{ij}}{\longrightarrow} & \text{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet) \\
\nu_{ij}\Big\uparrow & & \Big\uparrow\nu_i \\
\text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}(\bullet, j) & \stackrel{\alpha_j}{\longrightarrow} & \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \text{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F} \\
\mu_j\Big\downarrow & & \Big\uparrow\kappa \\
\text{Colim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} & \stackrel{=}{\longleftarrow} & \text{Colim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}
\end{array}$$

Os morfismos μ_{ij} e μ_j são dados pelas construções dos colimites $\text{Colim}_{\mathbf{J}}$ e $\text{Colim}_{\mathbf{J}}\ \text{Lim}_{\mathbf{I}}$, respectivamente, e os morfismos ν_{ij} e ν_i são dados pelas construções dos limites

$\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}$ e $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}$, respectivamente. Como, para cada objeto j de $\mathbf{J}$, o morfismo composto $\mu_{ij} \circ \nu_{ij}$ é natural em i, temos que a universalidade do limite $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$ fornece um único morfismo $\alpha_j : \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}(\bullet, j) \to \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}\ \mathcal{F}$. Esta construção é natural em j, e por universalidade do colimite $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}$ temos um único morfismo $\kappa : \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F} \to \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$.

Suponhamos agora $\mathbf{J}$ filtrada. Um elemento x do limite $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$ é caracterizado, como todo elemento de um objeto de **Conj**, por um morfismo $x_0 : \{*\} \to \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$. Para cada objeto i de $\mathbf{I}$ tomamos a composta $x_i : \{*\} \to \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F} \to \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$, que é um elemento do colimite $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$. Por definição de limite, para um morfismo $u : i \to i'$ em $\mathbf{I}$ devemos ter $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(u, \bullet)(x_i) = x_{i'}$, como elementos em $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i', \bullet)$. Recordando a construção de colimites em **Conj** (**A.3.1**) vemos que este elemento pode ser representado por um elemento $\tilde{x}_i$ de $\mathcal{F}(i, j)$, para algum j, sujeito à equivalência descrita em (**A.3**). Por **4.i**, a igualdade destes elementos em $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}(i, \bullet)$ pode ser testada em um mesmo conjunto $\mathcal{F}(i, j')$, e por **4.ii** esta igualdade pode ser testada pela aplicação de um morfismo $j' \to k$ de $\mathbf{J}$. Como $\mathbf{I}$ é finito, este elemento x de $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F}$ pode ser representado por um elemento $\tilde{x}_i$ em $\mathcal{F}(i, k)$ que obedece, para cada morfismo $u : i \to i'$ em $\mathbf{I}$, $tildex_{i'} = \mathcal{F}(u, k)(\tilde{x}_i)$. Por definição, este é um elemento do $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}(\bullet, k)$. Tomando a imagem deste elemento em $\mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}$, temos um aplicação $\mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathcal{F} \to \mathrm{Colim}_{\mathbf{J}}\ \mathrm{Lim}_{\mathbf{I}}\ \mathcal{F}$ bem definida e natural, e inversa do morfismo κ acima. O funtor de esquecimento

$\mathcal{E} : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Conj}$ tem um adjunto à esquerda $\mathcal{F} : \mathbf{Conj} \to \mathbf{Grp}$ que associa a cada conjunto X o grupo livre $\mathcal{F}(X)$ gerado por X; o funtor $\mathcal{E}$ é adjunto à direita de $\mathcal{F}$ e logo preserva limites: isto explica porque o produto de grupos é construido sobre o produto cartesiano dos conjuntos subjacentes aos grupos. No entanto, o objeto inicial de **Grp** é o grupo trivial (só a identidade como elemento; é também objeto final em **Grp**), e fazendo o funtor de esquecimento agir neste objeto não obtemos o objeto inicial de **Conj** (que é o conjunto vazio). Isto mostra que $\mathcal{E}$ não preserva colimites, e portanto não tem funtor adjunto à direita.

O funtor de esquecimento $\mathcal{E} : \mathbf{Top} \to \mathbf{Conj}$ tem um adjunto à esquerda $\mathcal{D} : \mathbf{Conj} \to \mathbf{Top}$ que associa a cada conjunto X o espaço topológico dado pela topologia discreta em X (tudo aberto), e tem um adjunto à direita $\mathcal{G} : \mathbf{Conj} \to \mathbf{Top}$ que associa a cada conjunto X o espaço topológico dado pela topologia grosseira em X (só X e $\varnothing$ abertos). Isto explica porque $\mathcal{E}$ preserva limites e colimites de **Top**: a topologia produto é construida sobre o produto cartesiano dos conjuntos subjacentes aos espaços, e a soma topológica é construida sobre a soma (i.e., a união disjunta) dos conjuntos subjacentes. Assim, também como **Conj**, a categoria **Top** é completa e cocompleta.

Adjunções às vezes se manifestam sem a interferência dos conjuntos de morfismos, por exemplo, das seguintes maneiras. Podemos em (**A.4.1**), à maneira de Yoneda, avaliar a bijeção $\varphi_{C,\mathcal{F}(C)}$ na identidade $id_{\mathcal{F}(C)}$, obtendo um morfismo

$\eta_C : C \to \mathcal{GF}(C)$. Esta aplicação η é dita a *unidade* da adjunção em C. Como temos, para todo morfismo $h \in Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), D)$, o seguinte diagrama comutativo escrito em **Conj** expressando a naturalidade de φ

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), \mathcal{F}(C)) & \stackrel{\varphi_{C,\mathcal{F}(C)}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{GF}(C)) \\ Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), h)\Big\downarrow & & \Big\downarrow Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(h)) \\ Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), D) & \stackrel{\varphi_{C,D}}{\longrightarrow} & Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(D)) \end{array}$$

segue que

$$\begin{aligned} \varphi_{C,D}(h) &= \varphi_{C,D} \circ Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{F}(C), h)(id_{\mathcal{F}(C)}) = h \circ id_{\mathcal{F}(C)} \\ &= Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(h)) \circ \varphi_{C,\mathcal{F}(C)}(id_{\mathcal{F}(C)}) \\ &= Hom_{\mathbf{C}}(C, \mathcal{G}(h)) \circ \eta_C, \end{aligned}$$

o que mostra que $\varphi_{C,D}$ pode ser escrito em termos de η_C, e logo a unidade η determina a adjunção φ.

Uma adjunção pode ser também determinada pelo dual da unidade, a saber, a *counidade* da adjunção, dada pela aplicação de $\varphi_{C,D}^{-1}$ à unidade $id_{\mathcal{G}(D)}$ do conjunto de morfismos $Hom_{\mathbf{C}}(\mathcal{G}(D), \mathcal{G}(D))$. O argumento que mostra isto, à maneira de Yoneda, é inteiramente dual.

Se a unidade $\eta : 1 \stackrel{\bullet}{\to} \mathcal{GF}$ e a counidade $\epsilon : \mathcal{FG} \stackrel{\bullet}{\to} 1$ de uma adjunção forem isomorfismos naturais então $\mathcal{F}$ (ou $\mathcal{G}$) definem uma equivalência de categorias, e vale a recíproca. Neste caso, $\mathcal{F}$ é tanto o adjunto à esquerda de $\mathcal{G}$ por uma adjunção cuja unidade é η quanto o adjunto à direita de $\mathcal{G}$ por uma adjunção cuja unidade é ϵ^{-1}.

A.5. Espaços sob e sobre espaço. Seja C um objeto de uma categoria $\mathbf{C}$. A categoria $\mathbf{C}_C$ de espaços sobre C tem por objetos elementos $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, C)$ e os morfismos entre $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, C)$ e $g \in Hom_{\mathbf{C}}(Y, C)$ são dados por elementos $h \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ que satisfazem $g \circ h = f$. De maneira dual a categoria $\mathbf{C}^C$ de espaços sob C tem por objetos elementos $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, X)$ e os morfismos entre $f \in Hom_{\mathbf{C}}(C, X)$ e $g \in Hom_{\mathbf{C}}(C, Y)$ são dados por elementos $h \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ que satisfazem $h \circ f = g$. Tanto $\mathbf{C}_C$ quanto $\mathbf{C}^C$ admitem naturalmente funtores de esquecimento $\mathcal{E}_C : \mathbf{C}_C \to \mathbf{C}$ e $\mathcal{E}^C : \mathbf{C}^C \to \mathbf{C}$ levando o objeto $f \in Hom_{\mathbf{C}}(X, C)$ em X e o morfismo $h \in Hom_{\mathbf{C}}(X, Y)$ em h.

A identidade $id_C : C \to C$ é objeto final de $\mathbf{C}_C$ e objeto inicial de $\mathbf{C}^C$. Os funtores $\mathcal{E}_C$ e $\mathcal{E}^C$ levam naturalmente id_C em C, o que mostra que $\mathcal{E}_C$ (respectivamente, $\mathcal{E}^C$) não tem em geral adjunto à esquerda (respectivamente, à direita). Se, no entanto, $\mathbf{C}$ tiver coprodutos finitos (isto é, colimites para funtores vindo de categorias com finitos objetos e sem morfismos que não sejam identidades) então $\mathcal{E}^C$ tem um adjunto à esquerda que associa a cada objeto X de $\mathbf{C}$ o objeto de $\mathbf{C}^C$ dado por $C \to X \amalg C$ (onde $X \amalg C$ denota o coproduto de X e C). A bijeção natural φ que define a adjunção associa a cada morfismo $h : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ a aplicação única $X \amalg C \to Y$ dada pela propriedade universal do coproduto. De maneira dual, se $\mathbf{C}$ tiver produtos finitos então $\mathcal{E}_C$ tem um adjunto à direita que associa a cada objeto X de $\mathbf{C}$ o objeto de $\mathbf{C}_C$ dado pela projeção $X \times C \to C$. Isto mostra que as categorias $\mathbf{Conj}_C$ e $\mathbf{Top}_C$ são completas, e que as categorias $\mathbf{Conj}^C$ e $\mathbf{Top}^C$ são cocompletas.

Se $\mathbf{C}$ possui produtos fibrados (respectivamente, somas fibradas) então tanto $\mathbf{C}^C$ quanto $\mathbf{C}_C$ possuem estes produtos (resp., somas) e tanto $\mathcal{E}^C$ quanto $\mathcal{E}_C$ preservam estes produtos (resp., somas). No caso de produtos, por exemplo, consideramos os morfismos $f_1 : X_1 \to X_2$ e $f_3 : X_3 \to X_2$ entre os objetos $g_i : X_i \to C$ de $\mathbf{C}_C$, para $i = 1, 2, 3$; temos o produto fibrado $X_1 \times_{X_2} X_3$ de f_1 e f_2 em $\mathbf{C}$ dado com $l_i : X_1 \times_{X_2} X_3 \to X_i$ para $i = 1, 3$. Tomando o produto fibrado $X_1 \times_C X_3$ de g_1 e g_3 e sua universalidade obtemos $X_1 \times_{X_2} X_3 \to X_1 \times_C X_3$ e a composta $X_1 \times_{X_2} X_3 \to X_1 \times_C X_3 \to C$ será vista como o objeto $g_1 \circ l_1 = g_3 \circ l_3$ de $\mathbf{C}_C$. Para testar nesta composta a propriedade universal tomamos um objeto $h : Y \to C$ de $\mathbf{C}_C$ e morfismos $h_1 : Y \to X_1$ e $h_3 : Y \to X_3$ em $\mathbf{C}_C$ (de modo que $g_i \circ l_i = h$ para $i = 1, 3$) satisfazendo comutações (de modo que $f_1 \circ h_1 = f_3 \circ h_3$ em $\mathbf{C}_C$); pela universalidade de $X_1 \times_{X_2} X_3$ em $\mathbf{C}$ existe um único morfismo $u : Y \to X_1 \times_{X_2} X_3$ em $\mathbf{C}$ satisfazendo $l_i \circ u = h_i$ para $i = 1, 3$. Devemos mostrar que u é morfismo em $\mathbf{C}_C$, mas isto é consequência de $g_i \circ l_i \circ u = g_i \circ h_i = h$.

Um argumento análogo mostra que se $\mathbf{C}$ tem coequalizadores então $\mathbf{C}_C$ também os tem e $\mathcal{E}_C$ os preserva: dados objetos $g_1 : X_1 \to C$ e $g_2 : X_2 \to C$ em $\mathbf{C}_C$ e morfismos $m, n : X_1 \to X_2$ em $\mathbf{C}_C$ tomamos o coequalizador $X_2 \xrightarrow{c} X_3$ em $\mathbf{C}$. Como m e n são morfismos em $\mathbf{C}_C$ temos $g_2 \circ m = g_1 = g_2 \circ n$, e usando a universalidade do coequalizador temos que existe um único morfismo $u : X_3 \to C$ com $g_2 = u \circ c$, e logo $u : X_3 \to C$ é coequalizador em $\mathbf{C}_C$. A universalidade de um coproduto $X_1 \amalg X_2$ que existir em $\mathbf{C}$ mostra que o coproduto também será um objeto de $\mathbf{C}_C$, e também coproduto lá. Isto mostra que $\mathbf{Conj}_C$ e $\mathbf{Top}_C$ são cocompletas.

Se C for objeto inicial (respectivamente, final) de $\mathbf{C}$ então $\mathbf{C}^C$ (resp., $\mathbf{C}_C$) se reduz a $\mathbf{C}$. Por exemplo, em $\mathbf{Conj}$ o conjunto $\{*\}$ com um só elemento é objeto final, e logo $\mathbf{Conj}_*$ é $\mathbf{Conj}$, mas $\mathbf{Conj}^*$ é a categoria de conjuntos com um ponto base e analogamente para $\mathbf{Top}^*$.

Se $\mathbf{C}$ possui produtos fibrados (resp., somas fibradas) e $f : C' \to C$ é morfismo em $\mathbf{C}$ então o funtor $f^* : \mathbf{C}_C \to \mathbf{C}_{C'}$ (resp., $f_* : \mathbf{C}^{C'} \to \mathbf{C}^C$) que a cada objeto $g : D \to C$ de $\mathbf{C}_C$ (resp., $g : C' \to D'$ de $\mathbf{C}^{C'}$) associa o produto fibrado $D \times_C C'$ (resp., a soma fibrada $C \amalg D'$) tem um adjunto à esquerda Σ_f (resp., um adjunto à direita Π_f) dado pela composição com f à esquerda (resp., à direita):

$$\Sigma_f : \mathbf{C}_{C'} \longleftrightarrow \mathbf{C}_C : f^* \qquad \textbf{(A.5.1)}$$

e

$$f_* : \mathbf{C}^C \longleftrightarrow \mathbf{C}^{C'} : \Pi_f. \qquad \textbf{(A.5.2)}$$

Nos dois casos, os adjuntos são dados pelas propriedades universais envolvidas.

A.6. Objetos de Hopf. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria que possua produtos finitos, inclusive o objeto terminal, denotado por 1, que é o produto vazio. Um *objeto de Hopf* (ou *objeto de grupo*) é um objeto H de $\mathbf{C}$ tal que existe um morfismo $\mu : H \times H \to H$ que faz com que para todo objeto X de $\mathbf{C}$, $Hom_{\mathbf{C}}(X, H)$ tenha uma estrutura de grupo, natural em X, dada pela seguinte regra: para morfismos $f, g \in Hom_{\mathbf{C}}(X, H)$ então a operação é definida por $X \xrightarrow{(f,g)} H \times H \xrightarrow{\mu} H$, (aqui $(f, g) \in Hom_{\mathbf{C}}(X, H \times H)$ é a aplicação dada pela propriedade universal do produto). Desta maneira temos um funtor de esquecimento contravariante $\mathcal{E} : \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$ representado por H.

O conceito dual de *co-objeto de Hopf* em categorias que tenham coprodutos significa um objeto H de $\mathbf{C}$ para o qual existe um morfismo $\Delta : H \to H \amalg H$ que faz com que para todo objeto X de $\mathbf{C}$, $Hom_{\mathbf{C}}(H, X)$ tenha uma estrutura de grupo, natural em X, dada pela seguinte regra: para morfismos $f, g \in Hom_{\mathbf{C}}(H, X)$ então a operação é definida por $H \xrightarrow{\Delta} H \amalg H \xrightarrow{(f,g)} X$ Desta maneira temos um funtor de esquecimento covariante $\mathcal{E} : \mathbf{C} \to \mathbf{Grp}$ representado por H.

Para um objeto de Hopf H em $\mathbf{C}$ a naturalidade da estrutura de grupo no conjunto $Hom_{\mathbf{C}}(X, H)$ significa que para um morfismo $f : X \to X'$ a função $Hom_{\mathbf{C}}(f, H) : Hom_{\mathbf{C}}(X', H) \to Hom_{\mathbf{C}}(X, H)$ é um homomorfismo de grupos.

Como $Hom_{\mathbf{C}}(1, H)$ tem estrutura de grupo existe um morfismo $\epsilon : 1 \to H$ que é a unidade deste grupo, caracterizado pela comutatividade do diagrama escrito em $\mathbf{C}$

$$\begin{array}{ccc} H = H \times 1 & \longrightarrow & H \times H \\ & id_H \searrow & \downarrow \mu \\ & & H \end{array}$$

Um objeto de Hopf H em **Conj** é simplesmente um grupo, que pode ser identificado com $Hom_{\mathbf{C}}(1, H)$.

Um objeto de Hopf H é dito *abeliano* se for comutativo o seguinte diagrama escrito em $\mathbf{C}$ onde o morfismo horizontal τ é a troca de coordenadas

$$\begin{array}{ccc} H \times H & \xrightarrow{\tau} & H \times H \\ & \mu \searrow & \downarrow \mu \\ & & H \end{array}$$

Topólogos identificaram pela primeira vez objetos e co-objetos de Hopf, na categoria **HomTop**$_*$ de classes de homotopia de espaços topógicos com um ponto-base, sob a denominação *H grupos* e **H cogrupos** (ver, por exemplo, [**Sp**], que inclui os axiomas de co-objeto de Hopf na página 40).

Apêndice B: A Categoria de Variedades Diferenciáveis

Este apêndice resume brevemente os fatos necessários da categoria diferenciável, e assume do leitor alguma lembrança de Análise. Especificamente, esta categoria é definida para agregar todo conhecimento *local* da Análise. Assim não haverá necessidade de se lembrar de nenhuma fórmula de Cálculo, mas sim dos teoremas locais de existência: o teorema da função inversa e o teorema da função implícita.

B.1. Variedades. A Análise que será utilizada aqui é real e euclidiana, baseada nos espaços $\mathbf{R}^n$. Apesar disso, seguindo os passos dos mestres em [**M-S**], adotamos a idéia de introduzir um espaço ambiente do tipo $\mathbf{R}^A$ onde A é um conjunto qualquer, objeto de **Conj**. Este espaço ambiente nada mais é do que

$$\mathbf{R}^A = Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}).$$

Tomando A de cardinalidade finita n, normalizado em **Conj** como sendo o conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$, recupera-se o espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$ identificando a função $x \in Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ com o vetor $(x_1, \ldots, x_n)$ através de $x_i := x(i)$. A familiaridade com este exemplo será aproveitada no uso da notação x_a para o valor da função $x \in Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ em $a \in A$, isto é, vale $x_a = x(a)$ em geral.

Cada elemento $a \in A$ é uma coordenada em $Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$, definindo uma função de projeção

$$\pi_a : Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{R} \qquad \pi_a(x) = x(a) = x_a,$$

morfismo em **Conj**. A topologia de $\mathbf{R}$ como objeto de **Top** é invocada para fazer desta projeção um morfismo em **Top** de maneira universal, isto é, $Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é dotado da maior topologia que torna tais projeções contínuas; isto significa: para um objeto Y em **Top** uma função $f : Y \to Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é morfismo em **Top** se e só se para cada $a \in A$ a composta $\pi_a \circ f$ é morfismo em **Top**.

Os objetos da categoria diferenciável **Diff** serão subconjuntos M em

$$Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$$

com a topologia induzida universal, isto é, para um objeto Y em **Top** uma função $f : Y \to M$ é morfismo em **Top** se e só se a composta $\iota \circ f$ é morfismo em **Top**, onde $\iota : M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é a inclusão; pelo visto acima, isto acontece se e só se para cada $a \in A$ a composta $f_a := \pi_a \circ \iota \circ f : Y \to \mathbf{R}$ é morfismo em **Top**.

Além de espaço topológico, uma estrutura adicional que Y tiver permite considerar a função $f : Y \to M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ como morfismo em outras categorias. O exemplo relevante é o de um subconjunto de um espaço euclidiano no qual é possível tomar derivadas: se $U \subset \mathbf{R}^n$ então uma função $f : U \to M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é *suave* se para cada $a \in A$ as compostas $f_a = \pi_a \circ \iota \circ f : U \to \mathbf{R}$ forem infinitamente diferenciáveis. As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ são definidas como as funções

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \to Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$$

que para cada $a \in A$ tem como coordenada a a função $\frac{\partial f_a}{\partial x_i}$. Seja observado que, apesar da consideração do espaço $\mathbf{R}^A$ de "dimensão infinita", a noção de diferenciabilidade só foi aplicada para funções $f_a : U \to \mathbf{R}$; nenhuma diferenciabilidade mais geral será jamais envolvida nestas notas. Como é necessário tomar derivadas — um processo local —, o subconjunto U será sempre tomado aberto em $\mathbf{R}^n$.

Estas simples considerações permitem a postulação da categoria **Diff**: um subconjunto $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é uma *variedade diferenciável* de dimensão n se para cada $x \in M$ existir uma função suave $h : U \to M \subset Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$, definida em um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$, tal que h seja um homeomorfismo de U em $V \subset M$ e que para $u \in U$ com $h(u) = x$ a matrix $(\frac{\partial f_a}{\partial x_i}(u))$ tenha posto n. Neste caso é dito que $V = h(U)$ é uma *vizinhança coordenada* e (U, V, h) uma *parametrização local*.

Casos simples mas importantes de variedades são os próprios abertos U em $\mathbf{R}^n$, para qualquer ponto dos quais é possível tomar a mesma parametrização $(U, U, id : U \to U)$. Em particular o espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$ é uma variedade diferenciável de dimensão n.

B.2. Mudança de parametrização. Segue do teorema da função implícita que se duas parametrizações locais (U, V, h) e (U', V', h') se encontram, isto é, são tais que $V \cap V' \neq \varnothing$ então

$$h^{-1} \circ h' : (h')^{-1}(V \cap V') \to h^{-1}(V \cap V')$$

é infinitamente diferenciável. Esta função $h^{-1} \circ h'$ associa dois abertos $(h')^{-1}(V \cap V')$ e $h^{-1}(V \cap V')$ do mesmo espaço euclidiano onde U e U' são abertos. A dimensão de uma veriedade diferenciável é, assim, bem definida.

B.3. Funções suaves. Parametrizações locais são usadas na definição dos morfismos na categoria **Diff** de variedades diferenciáveis. Estes morfismos, ditos funções suaves, são definidos a partir do conceito de funções suaves definidas em um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$ como em **B.1**: sejam dadas duas variedades $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ e $N \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(B, \mathbf{R})$; uma função $f : M \to N$ é *suave em um ponto* $m \in M$ se para uma parametrização local (U, V, h) em M tal que $m \in V$ tenhamos $f \circ h : U \to Hom_{\mathbf{Conj}}(B, \mathbf{R})$ suave. O resultado enunciado em **B.2** implica que esta a definição de suavidade em um ponto $m \in M$ independe da escolha da parametrização local (U, V, h) com $m \in V$. Uma função $f : M \to N$ é *suave* se for suave em cada ponto $m \in M$. Variedades diferenciáveis e funções suaves entre elas definem a categoria **Diff**. Isomorfismos em **Diff** são chamados *difeomorfismos*.

Para um aberto $U \subset \mathbf{R}^n$ tomado com a estrutura natural de variedade como em **B.1** o conceito de função suave como morfismo em $Hom_{\mathbf{Diff}}(U, M)$ coincide com a noção introduzida em **B.1**.

Pela própria postulação dos objetos como conjuntos com uma estrutura adicional (que permite tomar derivadas), há funtores de esquecimento de **Diff** para **Conj** e para **Top**, mas estes funtores são pouco interessantes: a estrutura adicional de variedade é excessivamente ligada aos processos da Análise para que estes funtores tenham algum adjunto. No entanto, **Diff** possui produtos construídos sobre o produto cartesiano.

B.4. Sobre a definição de variedades. A definição de variedade pode ser apresentada de muitas maneiras diferentes. O tratamento adotado aqui é calcado em [**M-S**] e sofre o defeito de exigir que a variedade $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ esteja definida em um espaço ambiente $Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$, que depende do conjunto A que aparentemente pouco se manifesta na estrutura diferencial. Esta dependência, de fato, é algo irrelevante: se $g : A \to B$ é monomorfismo em **Conj** então

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathbf{Conj}}(B, \mathbf{R}) & \to & Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}) \\ h & \mapsto & g \circ h \end{array}$$

é uma injeção, e a variedade $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ pode ser igualmente considerada em $Hom_{\mathbf{Conj}}(B, \mathbf{R})$ para qualquer conjunto B que contenha A. (O problema de descrever o conjunto A *mínimo*, no entanto, é interessante: há variedades de dimensão n que só aparecem em $\mathbf{R}^{2n+1}$).

Há, no entanto, um conjunto A máximo "canônico": dada uma variedade $\iota : M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$, para cada $a \in A$ temos a função $\pi_a \circ \iota : M \to \mathbf{R}$ que é suave, isto é, um morfismo em $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$, e a identificação $a \leftrightarrow \pi_a \circ \iota$ injeta A como subconjunto de $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$. Tomemos então

$$A_M := Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$$

e a injeção canônica

$$\iota_\kappa : M \to Hom_{\mathbf{Conj}}(A_M, \mathbf{R}) = Hom_{\mathbf{Conj}}(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}), \mathbf{R})$$

dada por $\iota_\kappa(m)(f) = f(m)$. Esta injeção é um difeomorfismo de M sobre sua imagem $\iota_\kappa(M)$.

Agora a variedade $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A_M, \mathbf{R}) = Hom_{\mathbf{Conj}}(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}), \mathbf{R})$ é apresentada de forma intrínseca, e este processo pode ser usado para uma redefinição: dado um conjunto M em **Conj** e $A \subset Hom_{\mathbf{Conj}}(M, \mathbf{R})$ um subconjunto de funções reais em M que *separa pontos*, isto é, tal que a aplicação canônica ι_κ definida como acima seja uma injeção (esta condição esmiuçada significa: dados $m_1 \neq m_2 \in M$ existe $f \in A$ com $f(m_1) \neq f(m_2)$), A é chamado uma *estrutura diferencial* em M se $\iota_\kappa(M) \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ for uma variedade diferenciável e se $A = A_M = Hom_{\mathbf{Diff}}(\iota_\kappa(M), \mathbf{R})$, isto é, se A for o conjunto de morfismos em **Diff** (isto é, de funções suaves) desta variedade para a reta **R**.

B.5. O espaço tangente. Seja $M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ uma variedade de dimensão n e $m \in M$. Um *caminho* passando por m é uma função suave

$$p : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}), \qquad \text{com } p(0) = m,$$

onde $\epsilon > 0$. O *vetor velocidade* é então definido como sendo o vetor

$$\frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = \frac{dp}{dt}|_{t=0} \in Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$$

tendo como coordenada a exatamente $\frac{d(\pi_a \circ p)}{dt}|_{t=0}$. Um elemento de $Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é dito um *vetor tangente* em m se for vetor velocidade de algum caminho passando por m. O conjunto destes vetores é chamado de *espaço tangente* de M em m, denotado por $D(M)_m$.

Se (U, V, h) for uma parametrização local com $m \in V = h(U)$, digamos $m = h(x)$ para $x \in U \subset \mathbf{R}^n$, então $v \in Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ é vetor tangente em m se e só se existir uma combinação linear

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x), \qquad c_i \in \mathbf{R}.$$

Assim o espaço tangente $D(M)_m$ é espaço vetorial real de dimensão n. No caso de a veriedade diferenciável ser um aberto U do espaço euclidiano $\mathbf{R}^n$ o espaço tangente $D(U)_u$ em qualquer ponto u é o próprio $\mathbf{R}^n$.

O *fibrado tangente* de M é o subconjunto $D(M) \subset M \times Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R})$ dado por

$$D(M) := \{\ (m, v) \in M \times Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}) \mid v \in D(M)_m\ \}.$$

Tomando uma versão contravariante do Teorema de Preservação de Limites **A.4** para $Hom_{\mathbf{Conj}}(\bullet, \mathbf{R})$ vemos que $Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}) \times Hom_{\mathbf{Conj}}(A, \mathbf{R}) \simeq Hom_{\mathbf{Conj}}(A \amalg A, \mathbf{R})$, e considerando $D(M) \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A \amalg A, \mathbf{R})$, o fibrado tangente é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$.

A associação $M \to D(M)$ é (a função nos objetos de) um funtor

$$D : \mathbf{Diff} \longrightarrow \mathbf{Diff}.$$

A função nos morfismos é dada pela *derivada* de uma função suave $f : M \to N$, definida por

$$\begin{aligned} D(f) : D(M) &\longrightarrow D(N) \\ (m, v) &\mapsto (f(m), Df_m(v)), \end{aligned}$$

onde $D(f)_m \in Hom_{\mathbf{R}}(D(M)_m, D(N)_{f(m)})$ é a transformação linear

$$\frac{dp}{dt}|_{t=0} \mapsto \frac{d(f \circ p)}{dt}|_{t=0}.$$

Em termos de uma parametrização local (U, V, h) com $m = h(x) \in V = h(U)$ vale

$$D(f)_m(\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial h}{\partial x_i}(x)) = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{\partial (f \circ h)}{\partial x_i}(x).$$

Por exemplo, para toda variedade M a associação $(m, v) \mapsto m$ define uma função suave $\pi : D(M) \to M$. A derivada $D(\pi) : D^2(M) \to D(M)$ é calculada associando ao vetor velocidade do caminho

$$\begin{aligned} (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow D(M) \hookrightarrow Hom_{\mathbf{Conj}}(A \amalg A, \mathbf{R}) \\ t &\mapsto \ (m(t), v(t)) \qquad \text{onde } v(t) \in D(M)_{m(t)} \end{aligned}$$

o vetor velocidade $\frac{dm(t)}{dt}|_{t=0}$, isto é,

$$D(\pi) : ((m(0), v(0), \frac{d(m(t), v(t))}{dt}|_{t=0}) \mapsto (m(0), \frac{dm(t)}{dt}|_{t=0}).$$

Uma inversa à direita χ em **Diff** desta função suave π é dita um *campo vetorial*. Um campo vetorial pode ser escrito

$$\begin{aligned} \chi : M &\longrightarrow D(M) \\ m &\mapsto (m, \chi_0(m)), \ \text{onde } \chi_0(m) \in D(M)_m; \end{aligned}$$

em geral as referências confundem χ e χ_0. As estruturas de espaços vetoriais em $D(M)_m$ fornecem uma estrutura de espaço vetorial no conjunto de campos vetoriais

$$Vect(M) = \{\chi \in Hom_{\mathbf{Diff}}(M, D(M)) \mid \pi \circ \chi = id_M \},$$

definida para $\chi, \eta \in Vect(M)$ e $\alpha \in \mathbf{R}$ por

$$(\chi + \eta)_0 = \chi_o + \eta_0, \qquad (\alpha\chi)_0 = \alpha\chi_0.$$

Para uma função real suave $f \in Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$ a derivada em um ponto $m \in M$ é uma transformação linear $D(f)_m : D(M)_m \to D(\mathbf{R})_{f(m)}$. Como o espaço tangente $D(\mathbf{R})_\alpha$ de $\mathbf{R}$ em qualquer real α é simplesmente $\mathbf{R}$ esta derivada é um elemento do espaço vetorial dual $Hom_{\mathbf{R}}(D(M)_m, \mathbf{R})$. Fixando o ponto $m \in M$ a associação $f \mapsto D(f)_m$ define uma aplicação

$$Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) \longrightarrow Hom_{\mathbf{R}}(D(M)_m, \mathbf{R}).$$

Domínio e contradomínio desta aplicação herdam uma estrutura de álgebra real através do produto em $\mathbf{R}$ (o produto de funções é o produto de valores das funções). A aplicação descrita acima *não* preserva este produto, antes obedece à *regra de Leibniz*

$$D(fg)_m = f(m)D(g)_m + g(m)D(F)_m.$$

Fixando agora $m \in M$ e $v \in D(M)_m$ o valor $D(f)_m(v) \in D(\mathbf{R})_{f(m)} = \mathbf{R}$ é um número real, e a associação $f \mapsto D(f)_m(v)$ define uma aplicação

$$\begin{aligned} X_{(m,v)} : Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\mapsto D(f)_m(v). \end{aligned}$$

A regra de Leibniz se escreve

$$X_{(m,v)}(fg) = f(m)X_{(m,v)}(g) + g(m)X_{(m,v)}(f),$$

ou seja, $X_{(m,v)}$ é uma *derivação* da álgebra $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$. A associação $(m, v) \leftrightarrow X_{(m,v)}$ identifica o fibrado tangente $D(M)$ como a álgebra de derivações de $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$. Alguns tratamentos definem assim o fibrado tangente (por exemplo, [**H**]). Dado um campo vetorial $\chi \in Vect(M)$ definimos uma transformação linear

$$\begin{aligned} \chi_1 : Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) &\longrightarrow Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}) \\ \text{por} \qquad f &\mapsto \chi_1(f) : M \to \mathbf{R} \\ & \qquad\qquad m \mapsto D(f)_m(\chi_0(m)). \end{aligned}$$

A regra de Leibniz assume então a forma

$$\chi_1(fg) = f\chi_1(g) + g\chi_1(f),$$

e χ_1 está na álgebra $Der(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}))$ de transformações lineares $(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})) \to (Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R}))$ que são derivações (isto é, obedecem à regra de Leibniz); a composta de duas destas transformações *não* obedece à regra de Leibniz, antes esta álgebra tem como produto a operação *comutador* definida por

$$[D_1, D_2] = D_1D_2 - D_2D_1.$$

Esta operação não é associativa. Em vez da associatividade, é satisfeita a crucial *identidade de Jacobi*

$$[D_1, [D_2, D_3]] + [D_2, [D_3, D_1]] + [D_3, [D_1, D_2]] = 0;$$

a regra da identidade de Jacobi é fixar uma conformação de colchetes, (a usada acima, por exemplo, é $[\bullet, [\bullet, \bullet]]$) e fazer permutações cíclicas nos índices. Uma álgebra cujo produto satisfaz a identidade de Jacobi é dita uma *álgebra de Lie*.

A associação

$$\begin{aligned} Vect(M) &\longrightarrow Der(Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})) \\ \chi &\mapsto \chi_1 \end{aligned}$$

identifica o espaço de campos vetoriais com a álgebra de derivações de $Hom_{\mathbf{Diff}}(M, \mathbf{R})$, e assim $Vect(M)$ ganha uma estrutura de álgebra de Lie.

Referências para o Capítulo 5

[**C-P**] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum Groups*, *in D-modules, Representation Theory and Quantum Groups*, L. Boutet de Monvel et al., Springer Lecture Notes in Mathematics, 1565, Springer-Verlag, 1993.

[**D**] J. Dieudonné, *La Géometrie des Groupes Classiques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 5, Springer-Verlag, 1955.

[**Go**] D. Gorenstein, *Finite Groups*, Harper and Row, 1968.

[**H**] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Pure and Applied Mathematics, 80, Academic Press, 1978.

[**Hu**] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and their Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer Verlag, 1980.

[**Ja**] J.C. Jantzen, *Lectures on Quantum Groups*, Graduate Studies in Matehmatics, 6, AMS, 1996.

[**Jo**] A. Joseph, *Quantum Groups and their Primitive Ideals*, Ergebnisse der Mathematik, 3.Folge, 29, Springer Verlag, 1995.

[**K**] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 155, Springer Verlag, 1995.

[**M-S**] J. Milnor, J. Stasheff, *Characteristic Classes*, Annals of Mathematical Studies, 76, Princeton University Press, 1974.

[**Sp**] E. Spanier, *Algebraic Topology*, Mac-Graw Hill, 1966.

[**Wa**] W. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes*, Graduate Texts in Mathematics, 66, Springer Verlag, 1979.

[**W**] H. Weyl, *The Classical Groups, their Invariants and their Representations*, Princeton University Press, 1957.