Lista 2

25/05/2005

(1) Seja $A = \{a + bi; -1 < a < 1, -1 < b < 1\}$ e Δ o disco unitário aberto com centro na origem. Suponha que $f_0 : A \to \Delta$ seja uma bijeção holomorfa com $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$.

(a) Prove que f_0 é a restrição de uma função meromorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e determine as posições dos polos de f.

(b) Prove que $1/2 < f_0'(0) < 1$.

(2) Seja $A = \{a + bi; -1 < a < 1, -1 < b < 1\}$.

(a) Seja $f : A \to A$ holomorfa. Prove que $|f'(0)| \leq 1$.

(b) Seja $f : A \to A$ holomorfa. Prove que se $|f'(0)| = 1$ então f é bijeção holomorfa.

(c) Prove que para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, existe uma única bijeção holomorfa $f : A \to A$.

(3) Seja $A = \{a + bi; -1 < a < 1, -1 < b < 1\}$. Seja $f : A \to A$ bijeção holomorfa com $f(-1/2) = 1/2$, $f'(-1/2) > 0$. Prove que $f'(-1/2) = 1$ e que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in A$.

(4) Seja Δ o disco unitário aberto com centro na origem. Exiba uma função holomorfa $f : \Delta \to \Delta - \{0\}$ que seja um recobrimento. Mais precisamente, para todo $z \in \Delta - \{0\}$ deve existir um aberto B, $z \in B \subset \Delta - \{0\}$, tal que $f^{-1}(B) = \bigcup_k C_k$ onde os conjuntos $C_k \subset \Delta$ são abertos disjuntos e $f|_{C_k} : C_k \to B$ é bijeção holomorfa.