Seja p ≥ 2 um inteiro, prove que, se $f(x) = x^2 + x + p$ **é primo para** $0 \le x \le \sqrt{\frac{p}{3}}$ **, f é primo para todo 0 ≤ x ≤ p – 2**.

Suponha que exista um divisor próprio de f(x) para algum valor de x, com $\sqrt{\frac{p}{3}} < x \le p - 2$.
Tome q como o menor primo que é um desses divisores próprios, não é muito difícil ver que q > 2, basta verificar que { p, p+2, …, p + k(k+1) } = { p } em Z_2 e p ≠ 0.

Lema 1: Se $m \mid f(k),\ f(k+m) = f(k) + m(m+1+2k) \Rightarrow m \mid f(k+m)$

Considere f(x) ∈ $Z_q[X]$, podemos estabelecer o seguinte lema:

Lema 2. f(x) = f(y) em $Z_q[X]$ ⇔ x = y ou x = -y – 1
Dem.
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = y - x$
se x ≠ y, como Z_q é corpo, podemos aplicar a lei do cancelamento de fatores, logo:
$(x+y)(x-y) = y - x, x \ne y \Leftrightarrow x + y = -1 \Leftrightarrow x = -y - 1$
temos então: $f(0) = f(q-1), f(1) = f(q-2), \ldots, f(k) = f(q-k-1), k \le \frac{q-1}{2}$

Daí podemos afirmar que se q divide algum valor de x no intervalo acima, o conjunto $\left\{ f(0), f(1), \ldots, f\left(\frac{q+1}{2}\right) \right\} \subset Z_q$ deve conter um único zero.

Para isso ser possível temos necessariamente que $\frac{q+1}{2} > \sqrt{\frac{p}{3}}$.

A seguinte desigualdade pode ser inferida já que o menor fator primo de um número composto não pode exceder sua raiz quadrada e f é uma função crescente para os naturais:

$$q \le \sqrt{f\left(\frac{q+1}{2}\right)} = \sqrt{\left(\frac{q+1}{2}\right)\left(\frac{q+3}{2}\right) + p} < \sqrt{\left(\frac{q+2}{2}\right)^2 + p} < \left(\frac{q+2}{2}\right) + \sqrt{\frac{p}{3}} \Rightarrow q < 2 + 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

Notamos então que $\frac{q+1}{2} < \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{p}{3}}$, então, se o enunciado é falso deve existir um x, com $\sqrt{\frac{p}{3}} < x < \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{p}{3}}$ tal que f(x) é composto.
(acho que não falta muito a partir daqui, o intervalo de x é bem pequeno!)

This document was created with Win2PDF available at http://www.daneprairie.com.
The unregistered version of Win2PDF is for evaluation or non-commercial use only.