Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

José Luis Lizarbe Chira

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática

Orientador: Prof. Paul Schweitzer

Rio de Janeiro
abril de 2005

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

José Luis Lizarbe Chira

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas

Tese apresentada ao Programa de Pós–graduação em Matemática do Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio como requisito parcial para obtenção Do título de Doutor em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Paul Schweitzer
Orientador
Departamento de Matemática — PUC–Rio

Prof. Dethang Zhou
UFF

Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo
UFF

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
PUC-Rio

Prof. Derek Douglas Jack Hacon
PUC-Rio

Prof. Paulo Henrique Cabido Gusmão
UFF

Prof. José Eugenio Leal
Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico — PUC–Rio

Rio de Janeiro, 04 de abril de 2005

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

José Luis Lizarbe Chira

Graduação: Matemática-Universidad Nacional de Ingenieria-Lima-Perú (1987-1996).
Mestrado: Matemática-Universidade Federal Fluminenense (1997-1999).
Doutorado: Matemática-Pontificia Universidade Católica do Rio de Janeiro (2000-2005).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Ficha Catalográfica

Chira, José Luis Lizarbe

Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas / José Luis Lizarbe Chira; orientador: Paul Schweitzer. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2005.

v., 88 f: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Tese. 2. Álgebra Exterior. 3. k-Campos Vetoriais. 4. Lei de Biot-Savart. 5. Invariante de Hopf. 6. Ações de $\mathbb{R}^k$. 7. Índice de Enlaçamento assintótico. I. Schweitzer, Paul. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus por ter ficado espiritualmente sempre de meu lado e por ter posto no meu caminho as pessoas certas para que este trabalho fosse realizado.

A minha amada esposa Patricia pela paciência, amor e comprensão nos momentos difiíceis, por seu companherismo no dia a dia e em especial por estar presente na minha vida e por ter me dado o melhor presente da minha vida nosso filho Juan Pablo.

A minha família peruana, pai, irmaõs e sobrinhos pelo carinho, respeito e motivacão que sempre me deram.

A meu orientador Paul pela sua ajuda acadêmica, espiritual e por ter providenciado tudo para que este trabalho desse certo, muito obrigado Paul.

Ao professor Ricardo pela sua ajuda acadêmica nos primeiros períodos do doutorado.

Aos meus amigos Edwin, Rosa, Sumaya e José Barbosa pelo companherismo. A todos os componentes da secretaria do departamento de matemática pela ajuda prestada e em especial para Kreuza e Orlando.

Ao CNPq e à PUC–Rio, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Resumo

Chira, José Luis Lizarbe; Schweitzer, Paul. **Índices de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas Compactas**. Rio de Janeiro, 2005. 88p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

V.I. Arnold no seu trabalho "The asymptotic Hopf Invariant and its applications" de 1986, considerou sobre um domínio Ω compacto de $\mathbb{R}^3$ com bordo suave e homología trivial campos X e Y de divergência nula e tangentes ao bordo de Ω e definiu o índice de enlaçamento assintótico $lk(X,Y)$ e o invariante de Hopf associados a X e Y pela integral $I(X,Y) = \int_\Omega \alpha \wedge d\beta$, onde $d\alpha = i_X vol$ e $d\beta = i_y vol$, e mostrou que $I(X,Y) = lk(X,Y)$. Agora, no presente trabalho estenderemos estas definições de índices de enlaçamento assintótico $lk(\Phi,\Psi)$ e de invariante de Hopf $I(\Phi,\Psi)$, onde Φ e Ψ são ações de $\mathbb{R}^k$ e de $\mathbb{R}^s$, $k+s=n-1$, respectivamente de difeomorfismos que preservam volume em Ω^n a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e mostraremos que $lk(\Phi,\Psi) = I(\Phi,\Psi)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Palavras–chave

Álgebra Exterior. k-Campos Vetoriais. Lei de Biot-Savart. Invariante de Hopf. Ações de $\mathbb{R}^k$. Índice de Enlaçamento assintótico.

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Abstract

Chira, José Luis Lizarbe; Schweitzer, Paul. **Asymptotic Linking Invariants for $\mathbb{R}^k$-Actions in Compact Riemannian Manifolds**. Rio de Janeiro, 2005. 88p. PhD Thesis — Department of Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

V.I. Arnold, in his paper "The algebraic Hopf invariant and its applications" published in 1986, considered a compact domain Ω in $\mathbb{R}^3$ with a smooth boundary and trivial homology and two divergence free vector fields X and Y in Ω tangent to the boundary. He defined an asymptotic linking invariant $lk(X,Y)$ and a Hopf invariant associated to X and Y by the integral $I(X,Y) = \int_\Omega \alpha \wedge d\beta$, where $d\alpha = i_X vol$ e $d\beta = i_Y vol$. He showed that $I(X,Y) = lk(X,Y)$. In the present work we extend these definitions of the asymptotic linking invariant $lk(\Phi,\Psi)$ and the Hopf invariant $I(\Phi,\Psi)$, where Φ and Ψ are actions of $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$, $k+s = n-1$, by volume preserving diffeomorphisms, on the closed unit ball Ω^n in $\mathbb{R}^n$, and we show that $lk(\Phi,\psi) = I(\Phi,\Psi)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Keywords

Exterior Algebra. k-Vector Field. Law of Biot-Savart. $\mathbb{R}^k$-Actions. Asymptotic Linking Invariant.

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Extensão do Produto Vetorial Sobre uma Álgebra Exterior **11**
2.1 Produto Interno Sobre $\Lambda(E)$ 11
2.2 Os Produtos $\cdot$ e $\times$ 16

3 Os Operadores div e rot **22**
3.1 Operadores Associados a K-Campos em M 22
3.2 Os operadores rot e div sobre $E(M)$ 26

4 Invariante para Ações de $\mathbb{R}^k$ e Teorema Ergódico em M^n **35**
4.1 Ações de $\mathbb{R}^k$ em M^n 35
4.2 Teorema Ergódico para Ações de $\mathbb{R}^k$ numa Variedade Riemanniana Compacta 41

5 A Generalização da Lei de Biot-Savart **45**
5.1 Distribuições em $\mathbb{R}^n$ 45
5.2 A Lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^3$ 49
5.3 A lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^n$ 53

6 Fórmulas de Enlaçamento **56**
6.1 Índice de Enlaçamento 56
6.2 Formas de Enlacamento 61
6.3 Índice de enlaçamento para ciclos singulares em M 63

7 Índice de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas **67**
7.1 Índice de Enlaçamento Assintótico de uma Ação de $\mathbb{R}^k$ e uma sub-variedade 67
7.2 Índice de Enlaçamento Assintótico entre Ações de $\mathbb{R}^k$ 78

Referências Bibliográficas **88**

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

1
Introdução

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas fechadas, disjuntas e orientadas em $\mathbb{R}^3$ (ou na esfera unitária S^3 em $\mathbb{R}^4$). Seja N qualquer superfície orientavel, transversal a γ_1 e que tem a γ_2 como bordo orientado. O índice de enlaçamento $lk(\gamma_1, \gamma_2)$ é o inteiro definido como o número algébrico de interseções de γ_1 com a superfície N. Agora, se uma aplicação $f : S^3 \to S^2$ é suave, onde S^2 é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$, então para cada par de pontos p e q em S^2 podemos definir $I_f := lk(f^{-1}(p), f^{-1}(q))$ sempre que as curvas fechadas $f^{-1}(p)$ e $f^{-1}(q)$ em S^3 sejam disjuntas. O inteiro I_f é chamado de Invariante de Hopf para f sendo que independe da escolha de p e q. O interessante deste invariante I_f é que tambem pode ser calculado como um valor integral $\int_{S^3} d^{-1}\beta \wedge \beta$, onde β é a 2-forma em S^3 pull back $f^*(\theta)$ de uma 2-forma θ que é um gerador de $H^2(S^2, \mathbb{Z})$ e $d^{-1}\beta$ representa uma 1-forma α em S^3 tal que $d\alpha = \beta$.

Em (Arn), Arnold define para cada campo X (fluxo φ) de divergência nula em S^3 o índice de enlaçamento assintótico $lk(X)$ a qual é uma extensão do invariante de Hopf visto como enlaçamento. Para isso, ele define um sistema Σ de curvas que ele chama de sistema de caminos curtos tal que para cada $p \in S^3$ e tempo $T \geq 0$ existe uma única curva $\sigma(p, T)$ em Σ com ponto inicial p e ponto final $\varphi_T(p)$. Assim, para cada pedaço de orbita $\vartheta(p, T) = \{\varphi_t(p);\ t \in [0, T]\}$ ele associa uma única curva fechada $\tilde{\vartheta}(p, T) := \vartheta(p, T) \cup \sigma(p, T)$. Logo, define para cada par de pontos p e q em S^3 o limite $lk(p, q) := \lim_{T,R\to\infty} \frac{1}{TR} lk(\tilde{\vartheta}(p, T), \tilde{\vartheta}(q, R))$ e mostra, devido à definição de Σ, que este limite existe para todo (p, q) no complemento de um conjunto de medida nula em $S^3 \times S^3$. Assim, define o índice de enlaçamento assintótico pela integral $lk(X) = \int_{S^3\times S^3} lk(p, q) vol \times vol$, onde $dvol$ é a forma de volume na métrica usual de S^3.

Alem disso, sendo $\alpha := i_X vol$ uma 2-forma fechada em S^3 (X sendo de divergência nula), define a invariante de Hopf para X como o valor integral $I(X) := \int_{S^3} d^{-1}\alpha \wedge \alpha$ e mostra, como no caso de aplicações suaves de S^3 em S^2, que $I(X) = lk(X)$.

No trabalho de Arnold, ele assume a existência dos sistemas dos caminhos curtos e dá idéias de como construir estes sistemas para campos com zeros

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

isolados mas não dá um exemplo concreto no caso geral. Vogel em (Vog) consegue dar exemplos naturais destes sistemas Σ, onde cada curva em Σ é um pedaço de geodésica em S^3, mas a sua definição de Σ somente considera a convergência em $L_1(S^3 \times S^3)$ da função $lk(p,q)$ e não a convergência q.t.p. Vogel observa que para este tipo de convergência o índice $lk(X)$ ainda está bem definida.
Observemos que, tanto $lk(X)$ como $I(X)$ podem ser estendidas naturalmente para definir o índice de enlaçamento assintótico $lk(X,Y)$ de um par de campos de divergência nula. Aqui $lk(p,q)$ é o enlaçamento assintótico da órbita de X que passa por p e da orbita de Y que passa por q, e o invariante de Hopf $I(X,Y) = \int_{S^3} d^{-1}\alpha \wedge \beta$, onde $\alpha = i_X dvol$ e $\beta = i_Y vol$. Ainda temos a igualdade $I(X,Y) = lk(X,Y)$. Por outro lado, sabemos que φ e ψ os fluxos de X e Y, respectivamente, são ações de $\mathbb{R}$ em S^3 de difeomorfismos que preservam volume (de divergência nula). Naturalmente, poderíamos ter definido $I(X,Y)$ e $lk(X,Y)$ como $I(\Phi,\Psi)$ e $lk(\Phi,\Psi)$, respectivamente.

Por outro lado, analogamente como em $\mathbb{R}^3$, podemos definir o índice de enlaçamento de duas subvariedades $N_1^{k_1}$ e $N_2^{k_2}$ de M^n, $k_1 + k_2 = n-1$, sempre que ambas sejam de homologia nula.

O propósito deste trabalho é estender o índice de enlaçamento assintótico para ações φ de $\mathbb{R}^k$ numa variedade riemanniana compacta M^n, $n > 3$, de difeomorfismos que preservam volume. Isto é, uma ação Φ_1 de $\mathbb{R}^{k_1}$ enlaçando-se com uma ação Φ_2 de $\mathbb{R}^{k_2}$, $k_1+k_2 = n-1$, ambas agindo em M. Os resultados desta extensão serão feitas para o caso $M = D^n$ (a bola unitária em $\mathbb{R}^n$). Para isto, precisaremos que as ações Φ_1 e Φ_2 sejam tangentes ao bordo de D^n.

No trabalho de Arnold em $\mathbb{R}^3$ a lei de Biot-Savart é crucial para estabelecer a igualdade $lk(X) = I(X)$. A lei de Biot-Savart afirma que se Ω é um dominio em $\mathbb{R}^3$ com bordo suave e X é um campo em Ω de divergência nula e tangente a $\partial\Omega$ então o campo $BS(X)(x) := \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\Omega \frac{(y-x)\times X(y)}{\|y-x\|^3} vol(y)$ satisfaz $rot(BS(X)) = X$.

Assim, neste trabalho primeiro estendemos a definição do produto vetorial e do produto interior para k-vetores (Capítulo 2) e em seguida damos uma definição de divergência e rotacional para k-campos (Capítulo 3). Também estendemos a Lei de Biot-Savart para k-campos (Capítulo 5). Agora, para a extensão do índice de enlaçamento assintótico, seguiremos a idéia de Vogel, isto é, construiremos um sistema Σ_{k_i} (Teorema 7.9) de k-subvariedades singulares, tal que para cada k_i-retângulo de órbita ϑ_i de Φ_i existe σ_i em Σ_{k_i} que satisfaz $\partial\vartheta_i = \partial\sigma_i$. Deste modo obtemos k_i-subvariedades singulares $\tilde{\vartheta}_i = \vartheta_i \cup \sigma_i$ fechadas e sem bordo as quais serão usadas para definir a função limite $lk(p,q)$, como no caso §[3], e mostraremos que esta função converge em $L^1(M \times M)$ e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

independe dos sistemas Σ_{k_i} escolhidos (Proposição 7.10). Também mostraremos que podemos definir invariante de Hopf integral $I(\varphi_1, \varphi_2) = \int_M d^{-1}\alpha \wedge \beta$ (Capítulo 4), onde as formas α e β estão associadas naturalmente às ações φ_{k_1} e φ_{k_2}. E finalmente, mostraremos que $lk(\varphi_1, \varphi_2) = I(\varphi_1, \varphi_2)$ (Teorema 7.12) e daremos algums exemplos no caso $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ e $n = 4$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

2
Extensão do Produto Vetorial Sobre uma Álgebra Exterior

Seja $\mathbb{R}^3$ o espaço euclidiano tridimensional, chamamos de álgebra exterior de $\mathbb{R}^3$ a álgebra $\Lambda(\mathbb{R}^3)$ gerada pela base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ satisfazendo

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i, \quad \forall i, j.$$

Nesta álgebra define-se o operador linear $*$ que satisfaz:

$$*(1) = e_i \wedge e_j \wedge e_k \ ; \ *(e_i) = e_j \wedge e_k \ ; \ *(e_i \wedge e_j) = e_k \ ; \ *(e_i \wedge e_j \wedge e_k) = 1,$$

para todo $\{i, j, k\}$ permutação positiva de $\{1, 2, 3\}$.

Sejam $\times$ o produto vetorial e $\cdot$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^3$. Não é dificil mostrar que estes produtos podem ser também expressados fazendo uso da álgebra exterior e do operador estrela $*$, a saber :

$$u \times v = *(u \wedge v) \quad \text{e} \quad u \cdot v = *(u \wedge *v), \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3.$$

Neste capítulo estenderemos a definição de $\times$ e $\cdot$ visto como produtos na álgebra exterior de qualquer espaço vetorial e veremos algumas propriedades as quais são parecidas ao caso $\mathbb{R}^3$.

2.1
Produto Interno Sobre $\Lambda(E)$

Seja E um espaço vetorial real de dimensão n com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Fixemos $\beta = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base ortonormal de E. Chamamos de álgebra exterior de E a álgebra $\Lambda(E)$ gerada por β cujo produto $\wedge$ é anticomutativo em β ,isto é, para todo i e j em $\{1, .., n\}$ temos que $u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i$. O sub-espaço $\Lambda_k(E)$ gerado pelos elementos da forma $\{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ é dita a k-álgebra exterior de E. Cada $u \in \Lambda_k(E)$ é chamado de k-vetor e no caso de $u = v_1 \wedge v_2 \wedge .. \wedge v_k$, onde os $v_i \in E$, será chamado de k-vetor decomponível. Notemos que $\Lambda(E)$ pode ser definida pela soma direta

$$\Lambda(E) \ := \Lambda_0(E) \oplus \Lambda_1(E) \oplus .. \oplus \Lambda_n(E).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Observemos que a propriedade distributiva de uma álgebra garante a extensão da propriedade anticomutativa do produto $\wedge$ para cada par de vetores em E, isto é, para todo u e v em E se satisfaz $u \wedge v = -v \wedge u$, em particular, para todo $u \in E$ temos que $u \wedge u = 0$. logo, se $\{v_1, .., v_k\}$ é um subconjunto de E linearmente dependente então

$$v_1 \wedge v_2 \wedge .. \wedge v_k = 0. \tag{2-1}$$

Notemos também que se $\{v_1, .., v_n\}$ é um subconjunto de E e se para cada i temos que $(v_i)_\beta$ denota as coordenadas de v_i na base β então por (2-1) e a propriedade anticomutativa do produto $\wedge$ temos que

$$v_1 \wedge .. \wedge v_n = [(v_1)_\beta, .., (v_n)_\beta] u_1 \wedge .. \wedge u_n,$$

onde $[(v_1)_\beta, ..(v_n)_\beta]$ é o determinante da matriz cujas linhas são as coordenadas $(v_i)_\beta$. Em geral, se $\gamma = \{w_1, ., w_n\}$ é uma base qualquer de E então

$$v_1 \wedge .. \wedge v_n = [(v_1)_\gamma, .., (v_n)_\gamma] w_1 \wedge .. \wedge w_n. \tag{2-2}$$

Por outro lado, no caso de E^* o espaço dual de E podemos usar definições análogas ao caso de $\Lambda(E)$ para definir $\Lambda(E^*)$ a álgebra exterior de E^* sendo os elementos desta álgebra chamados de covetores. A álgebra $\Lambda(E^*)$ é isomorfo a $(\Lambda(E))^*$. Em particular, $\Lambda_k(E^*)$ é isomorfo a $(\Lambda_k(E))^*$, a saber, se $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ é a base dual de $\{u_1, \ldots, u_n\}$ então a base $\{\omega_{i_1} \wedge .. \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ de $\Lambda_k(E^*)$ será identificada como a base dual de $\{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ em $\Lambda_k(E)$. Notemos que todo k-vetor u pode ser escrito da forma

$$u = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} (\omega_{i_1} \wedge .. \wedge \omega_{i_k})(u) u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}. \tag{2-3}$$

Analogamente, todo k-covetor ω pode ser escrito da forma

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} \omega(u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}) \omega_{i_1} \wedge .. \wedge \omega_{i_k}. \tag{2-4}$$

Notemos também, que se $\alpha = \alpha_1 \wedge .. \wedge \alpha_k$ é um k-covetor decomponível e $v = v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ é um r-vetor decomponível então

$$\alpha(v) = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq r; \\ det[\alpha_i(v_j)] & \text{se } k = r, \end{cases} \tag{2-5}$$

onde *det* denotya o determinante de uma matriz quadrada.

Para cada $u \in \Lambda(E)$ chamaremos de produto interior por u à trans-

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

formação linear

$$\begin{array}{rcl} i_u \ : \ \Lambda(E^*) & \longrightarrow & \Lambda(E^*), \\ \omega & \longmapsto & i_u\omega, \ i_u\omega(v) = \omega(u \wedge v) \qquad \forall \ v \in A(E). \end{array}$$

Em particular, se u é um 1-vetor, $u \in E$, então i_u é uma antiderivação de grau -1 em $\Lambda(E^*)$, isto é, i_u satisfaz

1. $i_u(\omega) \in \Lambda_{k-1}(E^*), \quad \forall \omega \in \Lambda_k(E)$.
2. $i_u(\omega \wedge \beta) = i_u(\omega) \wedge \beta + (-1)^k \omega \wedge i_u(\beta), \ \forall \omega \in \Lambda_k(E^*) \ \forall \beta \in \Lambda(E^*)$.

Observação 2.1 *Observemos que se $u_1, u_2, .., u_{k-1}$ e u_k são elementos de $\Lambda(E)$ então*

$$i_{u_1 \wedge u_2 \wedge .. \wedge u_{k-1} \wedge u_k} = i_{u_k} i_{u_{k-1}} .. i_{u_2} i_{u_1}. \tag{2-6}$$

Para cada $k \neq 0$ definamos a aplicação bilinear :

$$\langle \ , \ \rangle_k \ : \ \Lambda_k(E) \times \Lambda_k(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que, para cada par $u = u_1 \wedge ... \wedge u_k$ e $v = v_1 \wedge ... \wedge v_k$ de k-vetores decomponíveis corresponde o valor :

$$\langle u, v \rangle_k = det[\langle u_i, v_j \rangle]. \tag{2-7}$$

Proposição 2.2 $\langle \ , \ \rangle_k$ *é produto interno sobre* $\Lambda_k(E)$.

Prova: Por definição, o produto $\langle \ , \ \rangle_k$ é bilinear. Por outro lado, sabendo que para toda matriz quadrada A e sua transposta A^t se satisfaz $detA = detA^t$, por definição do produto $\langle \ , \ \rangle_k$ temos

$$\langle u_1 \wedge .. \wedge u_k, v_1 \wedge .. \wedge v_k \rangle_k = \langle v_1 \wedge .. \wedge v_k, u_1 \wedge .. \wedge u_k \rangle_k.$$

Logo o próduto é simétrico. Agora, seja $\{u_1, ..., u_n\}$ base ortonormal de E. Tomndo $u = u_{r_1} \wedge ... \wedge u_{r_k}$ e $v = u_{s_1} \wedge ... \wedge u_{s_k}$ decomponíveis tais que $r_1 < ... < r_k$ e $s_1 < ... < s_k$, temos

$$\begin{array}{rcl} \langle u, v \rangle_k & = & det[\langle u_{r_i}, u_{s_j} \rangle] \\ & = & det[\delta^{r_i}_{s_j}] = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad r_i = s_i \text{ para todo } i. \\ 0 & \text{se} \quad r_i \neq s_i \text{ para algum } \ i. \end{cases} \end{array}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Agora, se $u = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_k} \in \Lambda_k(E)$ então

$$\begin{aligned} \langle u, u \rangle_k &= \sum a_{i_1 \ldots i_k} a_{j_1 \ldots j_k} \langle u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_k}, u_{j_1} \wedge \ldots \wedge u_{j_k} \rangle \\ &= \sum a^2_{i_1 \ldots i_k} \quad \geq \quad 0, \end{aligned}$$

onde as somas são tomadas sobre todos os k-uplos tais que

$$1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n \quad \text{e} \quad 1 \leq j_1 < .. < j_k \leq n. \qquad \square$$

Notemos que a definição do produto $\langle\ ,\ \rangle_k$ implica que o conjunto $\{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ é uma base ortonormal de $\Lambda_k(E)$.

Definamos o produto interno:

$$\langle\ ,\ \rangle\ : \Lambda(E) \times \Lambda(E) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que se $u \in \Lambda_k(E)$ e $v \in \Lambda_r(E)$

$$\langle u, v \rangle = \begin{cases} \langle u, v \rangle_k & \text{se} \quad k = r. \\ 0 & \text{se} \quad k \neq r. \end{cases} \tag{2-8}$$

A norma de um vetor $u \in \Lambda(E)$ será definido como $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

Este produto interno induz o isomorfismo

$$\begin{aligned} j \ : \ \Lambda(E) &\longrightarrow \Lambda(E^*) \\ u &\longmapsto j(u),\ j(u)(v) = \langle u, v \rangle \quad \forall v \in \Lambda(E) \end{aligned} \tag{2-9}$$

Proposição 2.3 *j é um isomorfismo de álgebras, isto é*

$$j(u \wedge v) = j(u) \wedge j(v) \quad \forall u, v \in \Lambda(E). \tag{2-10}$$

Prova: Seja $u = u_1 \wedge .. \wedge u_k$ um k-vetor decomponível. Tomemos um k-vetor $v = v_1 \wedge .. \wedge v_k$ decomponível arbitrário. Notemos que

$$\begin{aligned} [j(u)](v) &= \langle u, v \rangle \\ &= det[\langle u_i, v_j \rangle] \\ &= det[j(u_i)(v_j)] \\ &= [j(u_1) \wedge \ldots \wedge j(u_k)](v_1 \wedge .. \wedge v_k) \\ &= [j(u_1) \wedge \ldots \wedge j(u_k)](v). \end{aligned}$$

ou seja, temos que $j(u) = j(u_1) \wedge \ldots \wedge j(u_k)$. $\square$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Observação 2.4 *O isomorfismo* $j^{-1} : \Lambda(E^*) \longrightarrow \Lambda(E)$ *induz o produto interno* $\prec\ ,\ \succ : \Lambda(E^*) \times \Lambda(E^*) \longrightarrow \mathbb{R},\ \ \prec \alpha, \beta \succ = \langle j^{-1}(\alpha), j^{-1}(\beta)\rangle$

Observemos que se $\{u_1, ..., u_n\}$ é qualquer base ortonormal de E e $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é a base dual em E^* então para todo i temos que $\omega_i = j(u_i)$. Disso e da definição do produto $\prec\ ,\ \succ$ temos que $\{\omega_1, ..., \omega_n\}$ é também uma base ortonormal de E^*.

Exemplo 2.5

Sejam $E = \mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, $\{e_1, ..., e_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ a base dual.
1.Seja $A := \langle 3e_1 \wedge e_2 + 4e_2 \wedge e_3, 4e_1 \wedge e_2 + e_2\rangle$. Logo:

$$\begin{aligned} A &= 12\langle e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_2\rangle + 3\langle e_1 \wedge e_2, e_2\rangle \\ &\quad +16\langle e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2\rangle + \langle e_2 \wedge e_3, e_2\rangle \\ &= 12 \begin{vmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \end{vmatrix} + 16 \begin{vmatrix} e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 \end{vmatrix} \\ &= 12. \end{aligned}$$

2. Seja $B := \prec 3\alpha_1 \wedge \alpha_2 + 4\alpha_2 \wedge \alpha_3, 4\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_2 \succ$. Logo:

$$\begin{aligned} B &= \langle j^{-1}(3\alpha_1 \wedge \alpha_2 + 4\alpha_2 \wedge \alpha_3, j^{-1}(4\alpha_1 \wedge \alpha_2 + \alpha_2)\rangle \\ &= \langle j^{-1}(3\alpha_1 \wedge \alpha_2) + j^{-1}(4\alpha_2 \wedge \alpha_3), j^{-1}(4\alpha_1 \wedge \alpha_2) + j^{-1}(\alpha_2)\rangle \\ &= \langle 3e_1 \wedge e_2 + 4e_2 \wedge e_3, 4e_1 \wedge e_2 + e_2\rangle = 12. \qquad \square \end{aligned}$$

2.2 Os Produtos $\cdot$ e $\times$

Sejam E um espaço vetorial de dimensão n e $\{u_1, .., u_n\}$ uma base ortonormal de E. O subespaço $\Lambda_n(E)$ é gerado pelo n-vetor $u_1 \wedge .. \wedge u_n$, logo, a dimensão de $\Lambda_n(E)$ é igual a 1. Assim, $\Lambda_n(E) - \{0\}$ tem duas componentes e a escolha de uma destas componentes define uma orientação para E. Fixando uma componente dizemos que E é um espaço vetorial orientado. Denotaremos esta componente por $\mathcal{O}$. Alem disso, toda base $\{v_1, .., v_n\}$ de E tal que $v_1 \wedge .. \wedge v_n \in \mathcal{O}$ será chamada de uma base positiva de E.

Definição 2.6 *Sejam E um espaço vetorial orientado com produto interno $\langle\ ,\rangle$ e $\{u_1, ..., u_n\}$ uma base ortonormal positiva de E. Chamamos de operador estrela de Hodge à aplicação linear $* : \Lambda(E) \longrightarrow \Lambda(E)$ que satisfaz*

1. $*(u_1 \wedge u_2 \wedge .. \wedge u_n) = 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

2. $*(1) = u_1 \wedge ... \wedge u_n$.

3. *Se* $\{i_1, .., i_k, j_1, ..j_{n-k}\}$ *é uma permutação positiva de* $\{1, .., n\}$ *então*

$$*(u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_k}) = u_{j_1} \wedge .. \wedge u_{j_{n-k}}, \ \ k \neq n.$$

Observação 2.7 *O operador estrela de Hodge* $*$ *independe da escolha da base ortonormal positiva* $\{u_1, ..., u_n\}$.

Analogamente, podemos definir o operador estrela de Hodge sobre o dual $\Lambda(E^*)$ considerando sobre E^* o produto interno e a orientação induzida pelo isomorfismo j. O operador $*$ possui as seguintes propriedades:

Sejam $\{i_1, .., i_k\}$, com os $i_l s$ distintos, e $\{j_1, .., j_r\}$ contidos em $\{1, .., n\}$ com interseção não nula. Então

$$(u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_k}) \wedge * \, (u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_k}) = u_1 \wedge u_2 \wedge .. \wedge u_n. \tag{2-11}$$

$$(u_{i_1} \wedge ... \wedge u_{i_k}) \wedge * \, (u_{j_1} \wedge ... \wedge u_{j_r}) = 0. \tag{2-12}$$

O operador $*$ também satisfaz as propriedades

$$** \, u = (-1)^{k(n-k)} u \quad \forall u \in \Lambda_k(E). \tag{2-13}$$

$$|*u| = \|u\| \qquad \forall u \in \Lambda_n(E). \tag{2-14}$$

Exemplo 2.8

Sejam $E = \mathbb{R}^5$ e $\{e_1, .., e_5\}$ sua base canônica ortonormal. Suponha que $e_1 \wedge .. \wedge e_5$ define a orientação $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}^5$. Neste caso sendo $\{\alpha_1, .., \alpha_5\}$ a base dual da base canônica e que $\{1, 3, 4, 2, 5\}$ e $\{1, 2, 5, 3, 4\}$ são permutações positivas de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ temos que

1. $* \, e_1 \wedge e_3 = e_4 \wedge e_2 \wedge e_5 = - \, e_2 \wedge e_4 \wedge e_5$.

2. $* \, (e_1 \wedge e_2 \wedge e_5 - e_1 \wedge e_2) = e_3 \wedge e_4 - e_3 \wedge e_4 \wedge e_5$.

3. $* \, \alpha_1 \wedge \alpha_3 = \ - \, \alpha_2 \wedge \alpha_4 \wedge \alpha_5$.

4. $** \, \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5 = \ \alpha_1 \wedge \alpha_3 \wedge \alpha_5$. $\square$

Consideremos $\Lambda(E) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda_k(E)$, onde $\bigoplus$ denota soma direta de subespaços, $\mathbb{Z}$ denota os inteiros e $\Lambda_k(E) = 0$ se $k < 0$ ou $k > n$. Definamos os

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

seguintes produtos em $\Lambda(E)$:

$$\begin{array}{rcl} \cdot \ : \ \Lambda(E)\times\Lambda(E) & \longrightarrow & \Lambda(E) \\ (u,v) & \longmapsto & u\cdot v = *\,(u\wedge *v). \end{array} \tag{2-15}$$

$$\begin{array}{rcl} \times \ : \ \Lambda(E)\times\Lambda(E) & \longrightarrow & \Lambda(E) \\ (u,v) & \longmapsto & u\times v = *\,(u\wedge v). \end{array} \tag{2-16}$$

Note que se $u \in \Lambda_k(E)$ e $v \in \Lambda_r(E)$ então $u\cdot v \in \Lambda_{r-k}(E)$ e $u\times v \in \Lambda_{n-(r+k)}(E)$.

Observação 2.9

Sejam $E = \mathbb{R}^3$ e $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica tal que $e_1\wedge e_2\wedge e_3$ define a orientação. Então, pelas propriedades do operador $*$, temos que

$$\begin{array}{rcl} e_i\cdot e_j & = & *(e_i\wedge *e_j) = \left\{\begin{array}{ll} *(e_1\wedge e_2\wedge e_3) = 1 & \text{se } i=j. \\ 0 & \text{se } i\neq j. \end{array}\right. \\ e_i\times e_j & = & *(e_i\wedge e_j) = \left\{\begin{array}{ll} e_k & \text{se } i\neq j. \\ 0 & \text{se } i=j, \end{array}\right. \end{array}$$

onde $\{i,j,k\}$ é permutação positiva de $\{1,2,3\}$. Assim, $\cdot$ e $\times$ são respectivamente o produto interno e vetorial usuais em $\mathbb{R}^3$. $\square$

Usando sómente as definições de $\times$ e $\cdot$ podemos mostrar que

$$u\times(v\times w) = u\cdot(v\wedge w) \qquad \forall u,v,w\in\Lambda(E). \tag{2-17}$$

Também, para $\{v_1,..v_n\}$ conjunto de vetores em E podemos mostrar por definição de $\times$ e $\cdot$ e por (2-2) que os vetores decomponiveis $u = v_1\wedge..\wedge v_{k_1}$, $v = v_{k_1+1}\wedge..\wedge v_{k_2}$ e $w = v_{k_2+1}\wedge..\wedge v_n$ satisfazem

$$u\times v\cdot w = [(v_1)_\beta, (v_2)_\beta, .., (v_n)_\beta], \tag{2-18}$$

onde β é qualquer base ortonormal que define a orientação de E e usamos a notação de (2-2).

Proposição 2.10 *Sejam $u,v\in\Lambda_k(E)$. Então*

$$u\cdot v = v\cdot u = \langle u,v\rangle. \tag{2-19}$$

Prova: Seja $\{u_1,...,u_n\}$ uma base ortonormal de E. A definição de $\langle\ ,\ \rangle_k$ implica que $\{u_{i_1}\wedge..\wedge u_{i_k}\}_{1\leq i_1<..<i_k\leq n}$ é base ortonormal de $\Lambda_k(E)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Por outro lado, por (2-11) e (2-12) temos que

$$\begin{aligned}(u_{i_1}\wedge..\wedge u_{i_k})\cdot(u_{j_1}\wedge..\wedge u_{j_k}) &= *((u_{i_1}\wedge..\wedge u_{i_k})\wedge *(u_{j_1}\wedge..\wedge u_{j_k}))\\ &= \begin{cases}1 & , i_r=j_r\ \forall\ r\\ 0 & , i_r\neq j_r \text{ para algum r}\end{cases}\end{aligned}$$

Logo, os produtos $\langle\ ,\ \rangle_k$ e $\cdot$ coincidem numa base de $\Lambda_k(E)$. Disso e do fato que ambos produtos são bilineares, temos que

$$\langle u,v\rangle = u\cdot v,\quad \forall u,v\in\Lambda_k(E).\quad\square$$

Seja $\{u_1,...,u_n\}$ uma base positiva de E. Notemos por definição de norma que $\|u_1\wedge...\wedge u_n\|^2 = det[\langle u_1,u_j\rangle]$, onde det denota determinante.

Corolário 2.11 *Sejam $\{u_1,..,u_n\}$ uma base positiva de E e $\{\omega_1,..,\omega_n\}$ a base dual de E^*. Se $\bar{g}=det[\langle u_1,u_j\rangle]=\|u_1\wedge..\wedge u_n\|^2$ então*

$$j*(u_1\wedge..\wedge u_k) = \sqrt{\bar{g}}\omega_{k+1}\wedge..\wedge\omega_n \tag{2-20}$$

$$*j^{-1}(\omega_{k+1}\wedge..\wedge\omega_n) = \frac{(-1)^{k(n-k)}}{\sqrt{\bar{g}}}u_1\wedge..\wedge u_k \tag{2-21}$$

Prova: Sendo $j*(u_1\wedge..\wedge u_k)$ um r-covetor, $r=n-k$, e $\{\omega_{l_1}\wedge..\wedge\omega_{l_r}\}_{1\leq l_1<..<l_r\leq n}$ a base dual em $\Lambda_r(E^*)$ de $\{u_{l_1}\wedge..\wedge u_{l_r}\}_{1\leq l_1<..<l_r\leq n}$ então por (2-4), definição de j, proposição anterior, (2-13), (2-1) e (2-14) temos

$$\begin{aligned}j*(u_1\wedge..\wedge u_k) &= \sum_{1\leq l_1<..<l_r\leq n}[j(*(u_1\wedge..\wedge u_k))(u_{l_1}\wedge..\wedge u_{l_r})]\omega_{l_1}\wedge..\wedge\omega_{l_r}\\ &= \sum_{1\leq l_1<..<l_r\leq n}[(u_{l_1}\wedge..\wedge u_{l_r})\cdot *(u_1\wedge..\wedge u_k)]\omega_{l_1}\wedge..\wedge\omega_{l_r}\\ &= \sum_{1\leq l_1<..<l_r\leq n}[*(u_1\wedge..\wedge u_k\wedge u_{l_1}\wedge..\wedge u_{l_r})]\omega_{l_1}\wedge..\wedge\omega_{l_r}\\ &= [*(u_1\wedge..\wedge u_k\wedge u_{k+1}\wedge..\wedge u_n)]\omega_{k+1}\wedge..\wedge\omega_n\\ &= \sqrt{\bar{g}}\omega_{k+1}\wedge..\wedge\omega_n,\end{aligned}$$

mostrando assim (2-20). Usaremos este resultado para mostrar (2-21).

$$*j^{-1}(\omega_{k+1}\wedge..\wedge\omega_n) = *j^{-1}(j*(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}u_1\wedge..\wedge u_k)) = (-1)^{k(n-k)}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}u_1\wedge..\wedge u_k.\quad\square$$

Sejam $\{u_1,..,u_n\}$ base ortonormal positiva de E e $\{j(u_1),..,j(u_n)\}$ sua base dual em E^*. Definamos o n-covetor unitário $vol_E := j(u_1\wedge..\wedge u_n)$ dual ao vetor unitário $u_1\wedge..\wedge u_n$.

Proposição 2.12 *Seja $u\in E_k(M)$. Então*

$$i_u vol_E = j(*u). \tag{2-22}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova: Sendo $\{u_1, ..u_n\}$ uma base ortonormal temos que $\{j(u_1), .., j(u_n)\}$ é a base dual em E^*. Para cada i denotemos $\omega_i := j(u_i)$, logo $\{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ é uma base ortonormal de $\Lambda_k(E)$ e $\{\omega_{i_1} \wedge .. \wedge \omega_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n}$ é a base ortonormal dual de $\Lambda_k(E^*)$. Consideremos o caso $u_1 \wedge .. \wedge u_k$. Notemos que $i_{u_1 \wedge .. \wedge u_k} vol_E \in \Lambda_{n-k}(E^*)$. Por (2-4), definição de $i_{u_1 \wedge .. \wedge u_k} vol_E$, (2-1)) e definição de j temos que

$$\begin{aligned}
i_{u_1 \wedge .. \wedge u_k} vol_E &= \sum_{1 \leq j_1 < .. < j_{n-k} \leq n} [i_{u_1 \wedge .. \wedge u_k} vol_E(u_{j_1} \wedge .. \wedge u_{j_{n-k}})] \omega_{j_1} \wedge .. \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < .. < j_{n-k} \leq n} [vol_E(u_1 \wedge .. \wedge u_k \wedge u_{j_1} \wedge .. \wedge u_{j_{n-k}})] \omega_{j_1} \wedge .. \wedge \omega_{j_{n-k}} \\
&= [vol_E(u_1 \wedge .. \wedge u_k \wedge u_{k+1} \wedge .. \wedge u_n)] \omega_{k+1} \wedge .. \wedge \omega_n \\
&= [\|u_1 \wedge .. \wedge u_n\|^2] \omega_{k+1} \wedge .. \wedge \omega_n \\
&= \omega_{k+1} \wedge .. \wedge \omega_n \\
&= j(u_{k+1} \wedge .. \wedge u_n).
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $\{u_1, .., u_n\}$ uma base ortonormal positiva, temos que $*(u_1 \wedge .. \wedge u_k) = u_{k+1} \wedge .. \wedge u_n$. Logo

$$j(*(u_1 \wedge .. \wedge u_k)) = j(u_{k+1} \wedge .. \wedge u_n).$$

Assim $j(*(u_1 \wedge .. \wedge u_k)) = i_{u_1 \wedge .. \wedge u_k} vol_E$. No caso de $i_{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}} vol_E$, $1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n$, podemos considerar uma permutaçào positiva $\{j_1, ..j_n\}$ de $\{1, .., n\}$ tal que para todo $r \in \{1, ..k\}$ temos que $i_r = j_r$ e mostrar como acima que

$$j(*(u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k})) = i_{u_{i_1} \wedge .. \wedge u_{i_k}} vol_E. \qquad \square$$

Proposição 2.13 *Sejam $u \in \Lambda_k(E)$ e $v \in \Lambda_r(E)$ então*

$$j(u \cdot v) = (-1)^{(r-k)(n-r)} i_u j(v). \tag{2-23}$$

Prova: Por definição $u \cdot v \in \Lambda_{r-k}(E)$. Seja $w \in \Lambda_{r-k}(E)$ arbitrário. Por definição de j e (2-19) temos que $j(u \cdot v)(w) = w \cdot (u \cdot v)$. Aplicando as propriedades de $*$ convenientemente temos $w \cdot (u \cdot v) = (-1)^{(r-k)(n-r)} (u \wedge w) \cdot v$. Logo, por (2-19) e definição de i_u temos que

$$j(u \cdot v)(w) = (-1)^{(r-k)(n-r)} \langle v, u \wedge w \rangle$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$\begin{aligned} &= (-1)^{(r-k)(n-r)}\ j(v)(u \wedge w) \\ &= (-1)^{(r-k)(n-r)}\ i_u j(v)(w). \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 2.14 *Seja $u \in E$, $dim(E) = n$. Se $v \in \Lambda_k(E)$ e $w \in \Lambda_s(E)$ então*

$$u \cdot (v \wedge w) = (-1)^{ns}(u \cdot v) \wedge w + (-1)^{(n+1)k}\ v \wedge (u \cdot w). \tag{2-24}$$

Prova: Sejam $v \in \Lambda_k(E)$ e $w \in \Lambda_s$ (E). Por (2-23), (2-10) e sendo i_u antiderivada temos que

$$\begin{aligned} j(u \cdot (v \wedge w)) &= (-1)^{(k+s-1)(n-k-s)} i_u j(v \wedge w) \\ &= (-1)^{n(k+s-1)} i_u (j(v) \wedge j(w)) \\ &= (-1)^{n(k+s-1)} \{(i_u\ j(v)) \wedge j(w) + (-1)^k\ j(v) \wedge (i_u\ j(w))\}. \end{aligned}$$

Disto, (2-23) e (2-10) temos

$$j(u \cdot (v \wedge w)) = (-1)^{ns} j((u \cdot v) \wedge w) + (-1)^{(n+1)k} j(v \wedge (u \cdot w)).$$

Logo pela linearidade de j temos

$$j(u \cdot (v \wedge w)) = j((-1)^{ns}(u \cdot v) \wedge w + (-1)^{(n+1)k} v \wedge (u \cdot w)).$$

Finalmente, sendo j um isomorfismo podemos aplicar j^{-1} à última equação e obter o resultado. $\square$

Corolário 2.15 *Sejam u, v_i , i=1,..,k , vetores em E. Então*

$$u \cdot (v_1 \wedge ... \wedge v_k) = (-1)^{(k-1)n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\ \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge .. \widehat{v_i} .. \wedge v_k. \tag{2-25}$$

Prova: (Por indução)
$k = 1$: $u \cdot v_1 = \langle u, v_1 \rangle$.
Para $k + 1$ sabendo que se cumpre para k:
Por (2-24) temos que

$$u \cdot (v_1 \wedge .. \wedge v_{k+1}) = (-1)^n (u \cdot (v_1 \wedge .. \wedge v_k)) \wedge v_{k+1} + (-1)^{(n+1)k} v_1 \wedge .. \wedge v_k \wedge (u \cdot v_{k+1}).$$

Como a formula se cumpre para k, temos que

$$u \cdot (v_1 \wedge .. \wedge v_k) = (-1)^{(k-1)n} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1}\ \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge .. \wedge \widehat{v_i} \wedge .. \wedge v_k.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Além disso, como $u \cdot v_{k+1} = \langle u, v_{k+1} \rangle \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$v_1 \wedge .. \wedge v_k \wedge (u \cdot v_{k+1}) = \langle u, v_{k+1} \rangle v_1 \wedge .. \wedge v_k.$$

Portanto,

$$u \cdot (v_1 \wedge .. \wedge v_{k+1}) = (-1)^{kn} \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \langle u, v_i \rangle v_1 \wedge .. \wedge \hat{v}_i \wedge .. \wedge v_k \wedge v_{k+1}. \square$$

Observação 2.16

Sejam $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Então por (2-17) e (2-25) temos que

$$u \times (v \times w) = (u \cdot \ w) \ v - (u \cdot \ v) \ w.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

3
Os Operadores div e rot

Em $\mathbb{R}^3$, para todo campo vetorial X a divergência e o rotacional deste campo podem ser calculados fazendo uso do vetor gradiente $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ e do produto interno $\cdot$ e do produto vetorial $\times$, respectivamente. No capítulo 1 as definições do produto interno $\cdot$ e produto vetorial $\times$ em $\mathbb{R}^3$ foram estendidas para qualquer espaço vetorial pelo que neste capítulo estenderemos as definições de divergência e rotacional para k-campos numa variedade M.

3.1
Operadores Associados a K-Campos em M

Seja M^n uma variedade riemanniana . Para cada $p \in M$ temos que $T_p(M)$, o espaço tangente a M no ponto p, é um espaço vetorial. Definamos $T_k(M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda_k(T_pM)$. A variedade M induz naturalmente sobre $T_k(M)$ uma estrutura diferenciável de dimensão $n + \binom{n}{k}$. A saber, sejam U uma vizinhança coordenada em M e $(x_1, .., x_n)$ seu sistema de coordenadas. Para cada $p \in U$ consideremos em $T_p(M)$ a base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$ de vetores tangentes coordenados e seja $\pi : T_k(M) \to M$ a projeção canônica de $T_k(M)$, isto é, $\pi(v) = p, sev \in \Lambda_k(T_pM)$. Então $\bigcup_{p \in U} \Lambda_k(T_pM)$ será uma vizinhança coordenada em $T_k(M)$ com sistema de coordenadas $(x_1 \circ \pi, .., x_n \circ \pi, a_{12...k}, ..., a_{(n-k+1)...n})$ definidas por

$$\sum_{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq n} a_{i_1 i_2 .. i_k} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}(p) \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}(p) \mapsto (x_1(p), ..., x_n(p), a_{12...k}, .., a_{(n-k+1)...n}).$$

A variedade $T_k(M)$ é chamado de k-fibrado tangente de M. Cada aplicação suave $X : M \to T_k(M)$ que satisfaz $\pi \circ X = id$ é chamado de k-campo vetorial suave em M. Localmente, no sistema de coordenadas $(x_1, ..x_n)$, escreveremos um k-campo X como

$$X(p) = \sum_{1 \leq i_1 < .. < i_k \leq n} f_{i_1 .. i_k}(p)(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}})(p).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Denotaremos por $E_k(M)$ o espaço dos k-campos vetoriais em M. A variedade M é dita orientável se existe um n-campo suave V tal que $V(p) \neq 0$, $\forall p$. Seja $N = \dfrac{V}{\|V\|}$ o n-campo unitário em $E_n(M)$. Observemos que para cada $p \in M$ a componente de $\Lambda_n(T_pM)$ que contém $N(p)$, define uma orientação $\mathcal{O}_p$ para T_pM. Neste sentido, diremos que N define uma orientação para M ou que M é uma variedade orientada com orientação $\mathcal{O}$. Se M é conexa então somente existem duas orientações possíveis. Como N define a orientação, então para todo $p \in M$ temos que $*N(p) = \|N(p)\| = 1$. Localmente, o sistema de coordenadas $(x_1, .., x_n)$ será dita coerente com a orientação sempre que os vetores tangentes coordenados $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ forem uma base positiva de T_pM.

Analogamente, para $E^k(M) := \bigcup_{p\in\ M} \Lambda_k((T_pM)^*)$ podemos induzir naturalmente uma estrutura diferenciável que será chamado de k-fibrado cotangente de M. Chamaremos de k-forma diferenciável a toda aplicação suave da forma $\omega : M \to T^k(M)$ tal que $\omega(p) \in \Lambda_k((T_pM)^*)$. Localmente, no sistema de coordenadas $(x_1, .., x_n)$, sendo $\Lambda_k((T_pM)^*)$ dual a $\Lambda_k(T_pM)$ e considerando $\{dx_1(p), .., dx_n(p)\}$ a base dual de $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1}(p), .., \dfrac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$ escreveremos uma k-forma diferenciável ω como

$$\omega_p = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} f_{i_1..i_k}(p)(dx_{i_1}dx_{i_2}..dx_{i_k})_p,$$

onde o produto $\wedge$ está implícito na igualdade acima, isto é, $(dx_{i_1}dx_{i_2}..dx_{i_k})_p := (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge .. \wedge dx_{i_k})_p$. O espaço das k-formas diferenciáveis em M será denotado por $E^k(M)$.

Seja $(x_1, .., x_n)$ qualquer sistema de coordenandas em M. Para cada $f : M \to \mathbb{R}$ suave definimos o diferencial de f como a 1-forma df que tem representação local

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Em geral, para cada k-forma α, localmente $\alpha = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} f_{i_1..i_k} dx_{i_1}..dx_{i_k}$, definimos o diferencial de α como a $(k+1)$-forma $d\alpha$ que tem representação local

$$d\alpha = \sum_{1\leq i_1<..<i_k\leq n} (df_{i_1..i_k})dx_{i_1}..dx_{i_k}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Definição 3.1 *A aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rcl} \wedge \ : \ E_i(M) \times E_j(M) & \rightarrow & E_{i+j}(M) \\ (X,Y) & \mapsto & X \wedge Y, \quad (X \wedge Y)(p) = X(p) \wedge Y(p) \end{array}$$

é chamado de produto exterior de k-campos. A álgebra dos k-campos vetoriais para todo k será denotada por $E(M)$. Analogamente, podemos definir o produto exterior de k-formas diferenciáveis

Seja g a métrica riemanniana em M. A métrica restrita a T_pM será identificada por g_p. A extensão de g_p a $\Lambda(T_pM)$ também será denotada por g_p. Sejam X e Y k-campos vetoriais em M. Definiremos a função $g(X,Y)$

$$g(X,Y)(p) = g_p(X(p), Y(p)), \quad \forall p \in M \tag{3-1}$$

Definição 3.2 *Seja $X \in E_k(M)$. A k-forma $j(X)$ definida por $j(X)(p) = j(X(p))$ será chamada de k-forma associada a X. A $(n-k)$-forma $j(*X)$ será chamada a $(n-k)$-forma associada a X. Em particular se $f \in \Lambda_0(M) = C^\infty(M)$ então $j(f) = f$.*

Seja N o n-campo unitário que define a orientação. Chamaremos a $j(N)$ a forma de volume em M a qual será denotada por vol. Definamos para cada $X \in E_k(M)$ a $(n-k)$-forma $i_X vol$ tal que para todo $p \in M$ temos $(i_X vol)_p = i_{X(p)} vol_p$ e notemos por (2-22) que

$$i_X vol = j(*X), \quad \forall X \in E_k(M). \tag{3-2}$$

Exemplo 3.3 *Seja M domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^5$. Considere $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 \in \vartheta$. Seja $X = f_{12} e_1 \wedge e_2 + f_{24} e_2 \wedge e_4 \in E_2(\Omega)$. Então*

$$\begin{array}{rcl} j(X) & = & f_{12} dx_1 \wedge dx_2 + f_{24} dx_2 \wedge dx_4 \in E^2(\Omega) \\ *X & = & f_{12} e_3 \wedge e_4 \wedge e_5 - f_{24} e_1 \wedge e_3 \wedge e_5 \in E^3(\Omega) \\ j(*X) & = & f_{12} dx_3 \wedge dx_4 \wedge dx_5 + f_{24} dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 \in E^3(\Omega) \end{array}$$

Proposição 3.4 *Sejam M uma variedade orientada, $(x_1, .., x_n)$ um sistema de coordenadas em M coerentes com a orientação, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ os vetores tangentes coordenados e $\{dx_1, .., dx_n\}$ sua base dual. Definamos o valor $\bar{g} := \|\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})\|^2 = det[g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})]$. Então*

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} = \sqrt{\bar{g}} N \tag{3-3}$$

$$vol = \sqrt{\bar{g}} dx_1 dx_2 .. dx_n \tag{3-4}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova : Sendo $N(p)$ base de $\Lambda_n(T_pM)$ então $(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})(p) = f(p)N(p)$. Como $*N = 1$ então $*((\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n})(p)) = f(p)$. Sendo $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ base positiva então $*(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) > 0$. Logo, por (2-14) temos que $*(\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\| = \sqrt{\bar{g}}$. Por tanto $f = \sqrt{\bar{g}}$, mostrando assim (3-3).

Por outro lado, sendo vol_p base de $\Lambda_n((T_pM)^*)$ temos que

$$(dx_1..dx_n)_p = h(p)vol_p.$$

Como vol_p é base dual de $N(p)$ e $(dx_1..dx_n)_p$ é base dual de $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}(p)$ então

$$\begin{aligned} h(p) &= (dx_1..dx_n)_p(N) \\ &= (dx_1..dx_n)_p(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}. \end{aligned}$$

Por tanto, $vol = \sqrt{\bar{g}}\ dx_1\ ..\ dx_n$. $\square$.

Para cada função suave $f : M \to \mathbb{R}$ podemos definir o 1-campo $grad(f) \in E_1(M)$ pela igualdade

$$df(X) = g(X, grad(f)) \quad \forall X \in E_1(M),$$

onde df é a diferencial de f. Este 1-campo $grad(f)$ é chamado de gradiente de f. Obsevemos que $g(X, grad(f)) = j(grad(f))(X)$. Logo $df = j(grad(f))$ Estenderemos esta definição de gradiente para $E(M)$.

Definição 3.5 *O operador gradiente é a aplicação $\nabla : E_k(M) \to E_{k+1}(M)$ tal que cada k-campo X é aplicado no (k+1)-campo*

$$\nabla X = j^{-1}dj(X). \tag{3-5}$$

Proposição 3.6 *Sejam $f \in \Lambda_0(M) = C^\infty(M)$, $X \in E_k(M)$ e $Y \in E(M)$*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

então

$$\begin{aligned} \nabla(f) &= grad(f) && (3\text{-}6)\\ dj(X) &= j(\nabla X). && (3\text{-}7)\\ \nabla(X\wedge Y) &= (\nabla X)\wedge Y + (-1)^k X\wedge(\nabla Y) && (3\text{-}8) \end{aligned}$$

Prova: Sendo f uma função temos $f \in E_0(M)$, logo $j(f) = f$. Assim $\nabla f = j^{-1}(d(f))$. Disso e pela definição de j temos para $Y \in E_1(M)$

$$g(\nabla(f), Y) = g(j^{-1}d(f), Y) = jj^{-1}d(f)(Y) = d(f)(Y),$$

mostrando assim (3-6). Agora, (3-7) segue da definição

$$j(\nabla X) = j(j^{-1}dj(X)) = dj(X).$$

Por outro lado, sendo j e j^{-1} homomorfismos de álgebras e o diferencial d uma antiderivação temos

$$\begin{aligned} \nabla(X\wedge Y) &= j^{-1}(dj(X\wedge Y)) \qquad (\text{ definição de } \nabla\ )\\ &= j^{-1}(\ d(j(X)\wedge j(Y))\ )\\ &= j^{-1}(\ dj(X)\wedge j(Y) + (-1)^k\ j(X)\wedge dj(Y)\ )\\ &= j^{-1}(dj(X))\wedge j^{-1}(j(Y)) + (-1)^k\ j^{-1}(j(X))\wedge j^{-1}(dj(Y)) \end{aligned}$$

Diante disto e por definição de ∇ temos que

$$\nabla(X\wedge Y) = (\nabla X)\wedge Y + (-1)^k X\wedge(\nabla Y). \quad \square$$

3.2
Os operadores rot e div sobre $E(M)$

Sejam M^n variedade riemanniana orientada, com métrica g.

Definição 3.7 *Sejam s e k inteiros positivos tal que $s+k+1 = n$. Definamos os operadores*

$$\begin{aligned} rot\ :\ E_k(\Omega) &\to E_{n-k-1}(\Omega)\\ X &\mapsto rot(X) = (-1)^{s(k+1)} * (\nabla X).\\ div\ :\ E_k(\Omega) &\to E_{k-1}(\Omega)\\ X &\mapsto div(X) = (-1)^{s(k+1)} * \nabla(*X). \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Os operadores rot e div serão chamados de operador rotacional e operador divergência, respectivamente. Observemos que as definições destes operadores implicam

$$rot(U \times V) = div(U \wedge V), \quad \forall U \in E_k(M),\ \forall V \in E_s(M) \tag{3-9}$$

Agora, mostraremos um resultado que relaciona as formas associadas a k-campos com os operadores definidos acima.

Proposição 3.8 *Seja $X \in E_k(M)$. Então*

$$dj(*X) = i_{div(X)}vol. \tag{3-10}$$

$$dj(X) = i_{rot(X)}vol. \tag{3-11}$$

Prova: Por (3-7) e (2-13) temos

$$\begin{aligned} d(j(*X)) &= j(\nabla * X) \\ &= i_{(-1)^{(k+1)(n-k-1)}*\nabla(*X)}vol. \end{aligned}$$

Agora, por (2-22) e definiçào de div temos

$$\begin{aligned} d(j(*X)) &= (-1)^{(n-k+1)(k-1)}j(**\nabla(*X))vol \\ &= i_{div(X)}vol, \end{aligned}$$

mostrando assim (3-10). Por outro lado, por (3-7) e (2-13) temos

$$\begin{aligned} d(j(X)) &= j(\nabla X) \\ &= j((-1)^{(k+1)(n-k-1)} * (*(\nabla X))). \end{aligned}$$

Agora, por (2-22) e definiçào de rot temos

$$\begin{aligned} d(j(X)) &= i_{(-1)^{(k+1)(n-k-1)}*(\nabla X)}vol \\ &= i_{rot(X)}vol. \qquad \square \end{aligned}$$

Proposição 3.9 *Sejam X um k-campo sobre M e $f \in C^\infty$. Então*

$$div(fX) = fdiv(X) + (-1)^{s(k+1)}\nabla(f) \cdot X. \tag{3-12}$$

Em particular, se $k = 1$ então

$$div(fX) = fdiv(X) + g(\nabla(f), X). \tag{3-13}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova: Por definição de div, linearidade de $*$, (3-8) e definição do produto $\cdot$ temos que

$$\begin{aligned}
div(fX) &= (-1)^{s(k+1)} * \nabla * (fX) \\
&= (-1)^{s(k+1)} * \nabla(f * X) \\
&= (-1)^{s(k+1)} * [\nabla(f) \wedge (*X) + (-1)^{s(k+1)}(*f\nabla * X)] \\
&= (-1)^{s(k+1)} * (\nabla(f) \wedge (*X)) + f[(-1)^{s(k+1)} * \nabla * X)] \\
&= (-1)^{s(k+1)}\nabla(f) \cdot X + f div(X). \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposição 3.10 *Seja $(x_1, x_2, .., x_n)$ sistema de coordenadas coerentes com a orientação de M. Definamos $\bar{g} := \|\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}\|^2 = det[g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j})]$. Então*

$$div(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_i} \tag{3-14}$$

$$div(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}) = (-1)^k \sum_j (-1)^j div(\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}) \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \wedge .. \widehat{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}}} .. \wedge \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \tag{3-15}$$

Prova: Lembremos que $\{dx_1, .., dx_n\}$ é a base dual a $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, .., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ e que $dx_1 \wedge .. \wedge dx_n = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} vol$. Seja N o n-campo unitario que define a orientação de M. Então, por (2-20) e (2-21) temos que

$$\begin{aligned}
div(\frac{\partial}{\partial x_1}) &= *\nabla * \frac{\partial}{\partial x_1} \\
&= *j^{-1} d(j * \frac{\partial}{\partial x_1}) \\
&= *j^{-1} d(\sqrt{\bar{g}} dx_2..dx_n) \\
&= *j^{-1}(\frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} dx_1 dx_2..dx_n) \\
&= *j^{-1}(\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} vol) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1} * N = \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\partial \sqrt{\bar{g}}}{\partial x_1}.
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Também

$$\begin{aligned}
div(\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge..\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}) &= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * \nabla * (\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge..\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}) \\
&= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1}d(j*(\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge..\wedge\frac{\partial}{\partial x_k})) \\
&= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1}d(\sqrt{\bar{g}}dx_{k+1}..dx_n) \\
&= (-1)^{(k+1)(n-k-1)} * j^{-1}(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial x_i}dx_1dx_{k+1}..dx_n) \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\frac{1}{\sqrt{\bar{g}}}\frac{\partial\sqrt{\bar{g}}}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge..\widehat{\frac{\partial}{\partial x_1}}..\wedge\frac{\partial}{\partial x_k} \\
&= (-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i div(\frac{\partial}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_1}\wedge..\widehat{\frac{\partial}{\partial x_1}}..\wedge\frac{\partial}{\partial x_k}
\end{aligned}$$

No caso geral, podemos considerar $\{j_1, j_2, j_3, .., j_n\}$ permutação positiva de $\{1, 2, .., n\}$ tal que $i = j_1$ no primeiro caso e $i_r = j_r,\ \forall r \in \{1, .., k\}$, no segundo caso. $\square$

Exemplo 3.11

Sejam Ω a n-variedade $\mathbb{R}^n$, a base canônica $\{e_1, .., e_n\}$ e $\{dx_1, .., dx_n\}$ a base dual. Suponha que $N = e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_n$ define a orientação de Ω . Notemos que

$$\nabla e_i = j^{-1}dj(e_i) = j^{-1}ddx_i = j^{-1}d^2x_i = 0,\ \forall i.$$

Seja $X = \sum_{i=1}^{n} f_i\ e_i$ então

$$\begin{aligned}
a)\quad \nabla\ X &= \sum_{i=1}^{n}\nabla(f_i\ e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\nabla(f_i)\wedge e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}[\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}e_j]\wedge e_i \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}[\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_i}{\partial x_j}]e_i\wedge e_j \\
b)\quad rot\ X &= (-1)^{(n-2).2} * (\nabla X) \\
&= *(\sum_{1\le i<j\le n}\{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\}e_i\wedge e_j) \\
&= \sum_{1\le i<j\le n}(-1)^{i+j-1}\{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\}e_1\wedge..\widehat{e}_i..\widehat{e}_j..\wedge e_n
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$
\begin{aligned}
c)\quad div\ (X) &= \sum_{i=1}^{n} div(f_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\nabla(f_i)\cdot e_i + f_i div(e_i)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} [\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} e_j]\cdot e_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \square
\end{aligned}
$$

Observação 3.12 *Se X é um campo vetorial em M então $div(X)$ é a divergência usual em M. Se $M \subset \mathbb{R}^3$ então $div(X)$ e $rot(X)$ são a divergência e o rotacional usual em $\mathbb{R}^3$.*

Sejam U e V campos vetoriais em M . Seja $(x_1, .., x_n)$ um sistema de coordenadas locais de M, onde localmente $U = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Então localmente podemos escrever o colchete de Lie de U e V como

$$[U, V] = \sum_{i=1}^{n} \{g(\nabla v_i, U) - g(\nabla u_i, V)\} \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{3-16}$$

Em particular, se $U = f\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = h\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i < j$, então

$$[U, V] = g(\nabla h, U)\frac{\partial}{\partial x_j} - g(\nabla f, V)\frac{\partial}{\partial x_i} = (\nabla h \cdot U)\frac{\partial}{\partial x_j} - (\nabla f \cdot V)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Teorema 3.13 *Sejam U e V campos vetoriais em M. Então*

$$div(U \wedge V) = -(divU)V + (divV)U - [U, V] \tag{3-17}$$

Prova:
Primeiro, provaremos para $U = f\frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = h\frac{\partial}{\partial x_j}$, $i < j$. Então por (3-12),

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

(3-15), (2-25),(3-8), (3-13) e (3-16) temos que

$$\begin{aligned}
div(U\wedge V) &= div(fh\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j})\\
&= fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j})+(-1)^{(n-3)3}\nabla(fh)\cdot(\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j})\\
&= -fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_j}+fhdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i})-\\
&\quad (\nabla(fh).\frac{\partial}{\partial x_i})\frac{\partial}{\partial x_j}+(\nabla(fh).\frac{\partial}{\partial x_j})\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&= -fdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})V+hdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})U-(\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V-(\nabla h\cdot U)\frac{\partial}{\partial x_j}\\
&\quad +(\nabla f\cdot V)\frac{\partial}{\partial x_i}+(\nabla h\cdot\frac{\partial}{\partial x_j})U\\
&= -fdiv(\frac{\partial}{\partial x_i})V+hdiv(\frac{\partial}{\partial x_j})U-(\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V-(\nabla h).U\frac{\partial}{\partial x_j}+\\
&\quad +(\nabla f.V)\frac{\partial}{\partial x_i}+(\nabla h.\frac{\partial}{\partial x_j})U\\
&= -(fdiv\frac{\partial}{\partial x_i}+\nabla f\cdot\frac{\partial}{\partial x_i})V+(hdiv\frac{\partial}{\partial x_j}+\nabla h.\frac{\partial}{\partial x_j})U-\\
&\quad -(\nabla h).U\frac{\partial}{\partial x_j}+(\nabla f.V)\frac{\partial}{\partial x_i}\\
&= -div(U)V+div(V)U-[U,V].
\end{aligned}$$

Agora, provaremos para $U=\sum_i f_i\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_i U_i$ e $V=\sum_j h_j\frac{\partial}{\partial x_j}=\sum_j V_j$

$$\begin{aligned}
div(U\wedge V) &= \sum_{i,j} div(U_i\wedge V_j)\\
&= \sum_{i,j}\{-div(U_i)V_j+div(V_j)U_i-[U_i,V_j]\}\\
&= -div(\sum_i U_i)(\sum_j V_j)+div(\sum_j V_j)(\sum_i U_i)-[\sum_i U_i,\sum_j V_j]\\
&= -div(U)V+div(V)U-[U,V]. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolário 3.14 *Seja $V=V^1\wedge V^2\wedge..\wedge V^k$ tal que $V^i\in E_1(M)$, $\forall i$. Então*

$$\begin{aligned}
div(V) &= (-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i div(V^i)\ V^1\wedge..\widehat{V^i}..\wedge V^k\ +\\
&\quad (-1)^k\sum_{1\le i<j\le k}(-1)^{i+j}[V^i,V^j]\wedge V^1\wedge..\widehat{V^i}..\widehat{V^j}..\wedge V^k. \quad (3\text{-}18)
\end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova:
Procedendo como na demonstração do teorema anterior. □

Observação 3.15 *Sejam $V^i, i = 1, .., k$ campos vetoriais em M tal que $div(V^i) = 0$ e $[V^i, V^j] = 0$ para todo i, j. Então, pelo corolário anterior*

$$div(V^1 \wedge .. \wedge V^k) = 0 \tag{3-19}$$

No caso de M for um domínio $\Omega^n \subset \mathbb{R}^n$, com métrica igual ao produto interno usual $\langle\ ,\ \rangle$, a base canônica $\{e_1, .., e_n\}$ podem ser consideradas campos vetoriais em M ortonormais entre si. Procedendo como no exemplo 3.11 podemos mostrar que

$$div(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) = 0,\ \forall \{i_1, .., i_k\} \in \{1, .., n\} \tag{3-20}$$

Logo a propriedade (3-12) garante que a divergência de um k-campo possa ser calculado derivando os coeficientes dos k-campos que estão representados como combinação linear dos $e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}$. A saber, seja $U = \sum_{i=1}^{n} f_i e_1$ então pelo exemplo 3.11 temos $div(U) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$, logo $div(fU) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f f_i)}{\partial x_i}$, onde f é uma função suave de M. Em geral, sejam os campos $U^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i e_j,\ i = 1, .., k$, em $E_1(M)$ então por (3-12) e (3-20)

$$\begin{aligned} div(U^1 \wedge .. \wedge U^k) &= div(\sum i_1, ..i_k = 1^n f_{i_1}^1 .. f_{i_k}^k e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} (\nabla(f_{i_1}^1 .. f^k i_k)) \cdot (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}). \end{aligned}$$

Logo, por (3-8), (2-25) e pelo valor da divergência para 1-campos temos

$$\begin{aligned} div(U^1 \wedge .. \wedge U^k) &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{i_1}^1 .. f^k i_k}{\partial x_i} e_i \right) \cdot (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \left(\left(\frac{\partial f_{i_1}^1 .. f^k i_k}{\partial x_i} e_i \right) \cdot e_{i_j} \right) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k} \\ &= (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1,..i_k=1}^{n} \left(\frac{\partial f_{i_1}^1 .. f^k i_k}{\partial x_{i_j}} \right) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k} \\ &= (-1)^{nk} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \sum_{i_1,..\hat{i_j}..i_k=1}^{n} div(f_{i_1}^1 .. \widehat{f_{i_j}^j} .. f_{i_k}^k V^j) e_{i_1} \wedge .. \widehat{e_{i_j}} .. \wedge e_{i_k}. \square \end{aligned} \tag{3-21}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Portanto, $V(x,y) = \sum_{1\leq<i_1<..<i_k\geq n} f_{i_1..i_k}(x,y)e_1 \wedge .. \wedge e_k$ pode ser vista tanto como um k-campo na variável x ou um k-campo na variável y logo podemos calcular sua divergência tanto na variavel x como na variável y.

Corolário 3.16 *Seja domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Seja $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\triangle f = div(\nabla f) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}$ o laplaciano de f. Sejam $V = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$ e $\{U^i = \sum_{j=1}^{n} u_j^i e_j\}_{i=1}^{k}$ 1-campos vetoriais em Ω. Definamos o k-campo vetorial $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k$. Então*

$$div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) = -(\triangle_y f)U - \sum_i div_y(f_{y_i}V)e_i + (div_y(V))\nabla_y f(x-y) \tag{3-22}$$

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge U(y))) &= (-1)^k(\triangle_y f)\ U - (-1)^{k+n(k-1)}\nabla_y f \wedge div_y(U) + (-1)^{n+k} \\ &\sum_{r,j,j_1,..\widehat{j_r}..,j_k}^{k,n,n,..,n} (-1)^r div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_j} u_{j_1}^1 ..\widehat{u_{j_r}^r}..u_{j_k}^k V^r\right) e_j \wedge e_{j_1} \wedge ..\widehat{e_{j_r}}.. \wedge e_{j_k}. \end{aligned} \tag{3-23}$$

Prova: Notemos que $\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial y_i \partial y_j}$, $\forall i,j$. Disso, por (3-17), notando que V independe dos x_i, por definiçao de laplaciano e por definição do colchete de lie temos que

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) &= -(\triangle_x(f))V - [\nabla_x f, V]_x \\ &= -(\triangle_x(f))V - \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla_x(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \cdot V\right) e_i \\ &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n}\left(\nabla(\frac{\partial f}{\partial y_i}) \cdot V\right) e_i \end{aligned}$$

Agora por (3-12) temos que

$$\begin{aligned} div_x((\nabla_x f(x-y)) \wedge V(y)) &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n}\{div\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)V) - \frac{\partial f}{\partial y_i} div(V)\}e_i \\ &= -(\triangle_y(f))V - \sum_{i=1}^{n} div\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}V\right) e_i + (div(V))\nabla_y f. \end{aligned}$$

Mostrando assim (3-22). Agora mostraremos (3-23): Seja $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k \in E_k(M)$ e os $(k-1)$-campos $A^i = U^1 \wedge ..\widehat{U^i}.. \wedge U^k$. Por (3-17), definiçao de laplaciano e notando que U independe dos x_i e que $\frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x-y)}{\partial y_i \partial y_j}$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

temos que

$$\begin{aligned} div_x(\nabla_x(f)\wedge U) &= (-1)^k(\triangle_x(f))U-(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\nabla_x f,U^i]_x\wedge A_i \\ &= (-1)^k(\triangle_x(f))U-(-1)^k\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\{\sum_{j=1}^{n}\left(\nabla_x(\frac{\partial f}{\partial x_j})\cdot U^i\right)e_j\}\wedge A_i \\ &= (-1)^k(\triangle_y(f))U+(-1)^k\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U^i\right)A_i\right). \end{aligned}$$

Agora, por (2-25) e definição de A_i temos que

$$div_x(\nabla_x(f)\wedge U)=(-1)^k(\triangle_y(f))U+(-1)^k(-1)^{n(k-1)}\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U.$$

Por (3-12) e por (3-21) temos para $A:=\sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\nabla_y(\frac{\partial f}{\partial y_j})\cdot U$ que

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{n}e_j\wedge\left(div(\frac{\partial f}{\partial y_j}U)-\frac{\partial f}{\partial y_j}div(U)\right) \\ &= (-1)^{nk}\sum_{j,r=1}^{n,k}(-1)^r\sum_{j_1,..\hat{j_r}..,j_k}^{n}div\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}u^1_{j_1}..\widehat{u^r_{j_r}}..u^k_{j_k}V^r\right)e_j\wedge e_{j_1}\wedge..\widehat{e_{j_r}}..\wedge e_{j_k} \\ &\quad -(\nabla_y f)\wedge div(U). \end{aligned}$$

Isto mostra (3-23). □

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

4
Invariante para Ações de $\mathbb{R}^k$ e Teorema Ergódico em M^n

No capítulo 2 vimos que para cada k-campo em M podemos associar naturalmente uma k-forma e uma $(n-k)$-forma. Em particular, para uma ação Φ de $\mathbb{R}^k$ em M podemos associar naturalmente um k-campo X. Assim, podemos associar a Φ naturalmente formas diferenciais, as quais como veremos neste capítulo darão origem a invariantes integrais associados a Φ.

4.1
Ações de $\mathbb{R}^k$ em M^n

Seja M variedade riemanniana de dimensão n, compacta, sem bordo, orientada , conexa e vol sua forma de volume. Seja $X \in E_1(M)$ um campo vetorial e Φ, $(t,p) \mapsto \Phi_t(p)$, seu fluxo. Como M é compacta sem bordo, o dominio de Φ é $\mathbb{R} \times M$. Suponha que o fluxo Φ preserva a forma de volume vol, isto é, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $\Phi_t^*(vol) = vol$. Neste caso, por definição da derivada de Lie com respeito a X se cumpre que $L_X vol = 0$. Sabendo que $L_X vol = di_X vol$ temos por (3-2), definição de div e (2-13) que

$$L_X vol = di_X vol = d(j(*X)) = *div(X) = div(X)vol.$$

Portanto $div(X) = 0$. Da igualdade anterior podemos afirmar que o recíproco também é certo, isto é, se $div(X) = 0$ então o fluxo Φ preserva volume.

Sejam $\mathfrak{g} := \{X \in E_1(M);\ div(X) = 0\}$, a álgebra de Lie dos 1-campos cujos fluxos preservam volume e

$$\mathfrak{g}_k = \{(X^1, X^2, .., X^k) \in \mathfrak{g} \times .. \times \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^k; \quad [X^i, X^j] = 0\ \forall i,j\},$$

onde $[X^i, X^j]$ é o colchete de Lie dos campos X^i e X^j. Para cada $X = (X^1, X^2, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k$ podemos associar uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M da seguinte forma. Para cada $i \in \{1, .., k\}$ denotemos por $\Phi^i_{t_i}$ o fluxo associado a X^i. Para cada par i e j temos que $\Phi^i_{t_i} \circ \Phi^j_{t_j} = \Phi^j_{t_j} \circ \Phi^i_{t_i}$, já que $[X^i, X^j] = 0$. Definamos

$$\begin{array}{rccl} \Theta & : & \mathbb{R}^k \times M & \to & M \\ & & (t_1, .., t_k, p) & \mapsto & \Theta_{(t_1,t_2,..,t_k)}(p) = \Phi^k_{t_k} \circ \Phi^{k-1}_{t_{k-1}} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1}(p) \end{array}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Como para cada $t_i \in \mathbb{R}$ a aplicação $\Phi^i_{t_i} : M \to M$ é um difeomorfismo que preserva volume então para cada $(t_1, t_2, .., t_k) \in \mathbb{R}^k$ temos que a aplicação composta

$$\Theta_{(t_1,t_2,..,t_k)} = \Phi^k_{t_k} \circ \Phi^{k-1}_{t_{k-1}} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1}$$

é um difeomorfismo de M que preserva volume. Observemos também que

$$\begin{aligned}
\Theta_{(s_1,..,s_k)}(\Theta_{(t_1,..,t_k)}(p)) &= (\Theta_{(s_1,..,s_k)} \circ \Theta_{(t_1,..,t_k)})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k} \circ .. \circ \Phi^1_{s_1} \circ \Phi^k_{t_k} \circ .. \circ \Phi^1_{t_1})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k} \circ \Phi^k_{t_k} .. \circ \Phi^1_{s_1} \circ \Phi^1_{t_1})(p) \\
&= (\Phi^k_{s_k+t_k} \circ .. \circ \Phi^1_{s_1+t_1})(p) \\
&= \Theta_{(s_1+t_1,..,s_k+t_k)}(p).
\end{aligned}$$

Portanto Θ é uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M de difeomorfismos que preservam volume.

Definição 4.1 *A ação Θ é chamada de ação de $\mathbb{R}^k$ em M associada a $X \in \mathfrak{g}_k$ e será denotada por $A(X)$.*

Proposição 4.2 *Seja $\Theta : \mathbb{R}^k \times M \to M$ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M cujos fluxos preservam volume. Então existe $X \in \mathfrak{g}_k$ tal que $A(X) = \Theta$.*

Prova : Sejam os campos vetoriais $X^i \in E_1(M)$ definidos por

$$X^i(p) := (d\Theta)_{(0,p)}\ (e_i, 0),\ \forall p \in M,$$

onde $\{e_1, .., e_k\}$ é a base canônica em $\mathbb{R}^k$. Notemos que $\Phi^i(t, p) := \Theta(te_i, p)$ é o fluxo associado a X^i. De fato,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi^i}{\partial t}(t, p) &= \frac{\partial \Theta}{\partial t}(t\ e_i, p) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Theta(t\ e_i\ +\ h\ e_i, p)\ +\ \Theta(t\ e_i, p)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\Theta(h\ e_i, \Theta(t\ e_i, p)\ )\ +\ \Theta(0, \Theta(t\ e_i, p)\ )}{h} \\
&= (d\ \Theta)_{\Theta(t\ e_i,p)}(e_i, 0) \\
&= X^i\ (\Theta(t\ e_i, p)\ ) \\
&= X^i\ (\Phi^i\ (t, p)).
\end{aligned}$$

Por outro lado, por definição os Φ^i comutam e preservam volume, logo para

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

todo i e j temos que $[X^i, X^j] = 0$ e $div(X^i) = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\Phi^k_{t_k} \circ ... \circ \Phi^1_{t_1}\ (p) &= \Phi^k_{t_k}(...(\Phi^1_{t_1}\ (p))...) \\
&= \Theta(t_k\ e_k, \Theta(t_{k-1}\ e_{k-1}, ..., \Theta(t_1\ e_1, p)...)\ ) \\
&= \Theta(t_k\ e_k + t_{k-1}\ e_{k-1} + t_1\ e_1, p) \\
&= \Theta(t_1, t_2, .., t_k, p). \qquad \square
\end{aligned}$$

Proposição 4.3 *Seja $\widetilde{X} = X^1 \wedge .. \wedge X^k$ o k-campo associado a $X = (X^1, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k$. Então a $(n-k)$-forma $j(*\widetilde{X}) = i_{\widetilde{X}} vol$ associada a $\widetilde{X}$ é fechada.*

Prova:
Como $X \in \mathfrak{g}_k$, temos, para todo i e j, que $div(X^i) = 0$ e $[X^i, X^j] = 0$. Por (3-19) temos que $div(\widetilde{X}) = div(X^1 \wedge .. \wedge X^k) = 0$; logo, por (3-10) temos

$$dj(*\widetilde{X}) = i_{div(\widetilde{X})}\ vol = 0. \qquad \square$$

No que segue, trabalharemos somente com os X de $\mathfrak{g}_k$ tal que $i_{\widetilde{X}} vol$ é exata, ou seja, $X \in \widetilde{g}_k$, onde

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_k := \{X = (X^1, .., X^k) \in \mathfrak{g}_k;\ \exists\ \alpha \in E^{n-k-1}(M) \text{ tal que } d\alpha = i_{\widetilde{X}} vol\}.$$

Observação 4.4 *Se $H^k(M) = \{0\}$ (equivalentemente por dualidade de Poincaré $H^{n-k}(M) = \{0\}$) então $\widetilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g}_k$.*

Definição 4.5 *Sejam $X = (X^1, .., X^n) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$, $Y = (Y^1, .., Y^s) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s$ e N^s subvariedade fechada sem bordo e de homologia nula em M, k+s=n-1. Sejam $\alpha \in E^s(M)$ e $\beta \in E^k(M)$ tais que $d\alpha = i_{\widetilde{X}} vol$ e $d\beta = i_{\widetilde{Y}} vol$ respectivamente. Os índices*

$$I(X, Y) = \int_M \alpha \wedge d\beta. \tag{4-1}$$

$$I(X, N) = \int_N \alpha. \tag{4-2}$$

são chamados de invariante de Hopf associados a (X, Y) e a (X, N), respectivamente.

A definição de invariante é justificada pela seguinte proposição:

Proposição 4.6 *$I(X, Y)$ e $I(X, N)$ independem da escolha de α e β.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova: Mostremos o caso $I(X,Y)$. Sejam $\theta \in E^{n-k-1}(M)$ e $\gamma \in E^{n-s-1}(M)$ tais que $d\theta = i_X vol$ e $d\gamma = i_Y vol$. Então, existem $\theta_1 \in E^{n-k-1}(M)$ e $\gamma_1 \in E^{n-s-1}(M)$ tais que $\alpha = \theta + \theta_1$, $\beta = \gamma + \gamma_1$, $d\ \theta_1 = 0$ e $d\gamma_1 = 0$. Logo

$$I(X,Y) = \int_M \alpha \wedge d\ \beta = \int_M (\theta + \theta_1) \wedge d\ (\gamma + \gamma_1) = \int_M \theta \wedge d\ \gamma + \int_M \theta_1 \wedge d\ \gamma.$$

Como $d(\theta_1 \wedge \gamma) = \theta_1 \wedge d\gamma$, temos

$$I(X,Y) = \int_M \theta \wedge d\ \gamma + \int_M d(\theta_1 \wedge \gamma).$$

Finalmente, pelo teorema de Stokes e sendo $\partial M = \emptyset$ temos

$$I(X,Y) = \int_M \theta \wedge d\gamma + \int_{\partial M} \theta_1 \wedge \gamma = \int_M \theta \wedge d\gamma.$$

Analogamente, podemos mostrar que $I(X,N)$ independe da escolha de α. □

Proposição 4.7 *Seja α uma s-forma em M e β uma k-forma em M tal que $d\beta = i_{\widetilde{Y}} vol$. Então*

$$\alpha \wedge d\beta = \alpha(\widetilde{Y}) vol. \tag{4-3}$$

Em particular, se α satisfaz $d\alpha = i_{\widetilde{X}} vol$ então

$$I(X,Y) = \int_M \alpha(\widetilde{Y}) vol. \tag{4-4}$$

Prova: Por definição de $i_{Y^1 \wedge .. \wedge Y^s}\alpha$, por (2-6) e pela propriedade de antiderivação de i_{Y^i} temos

$$\begin{aligned} \alpha(\widetilde{Y}) vol = \alpha(Y^1 \wedge .. \wedge Y^s) vol &= (i_{Y^1 \wedge .. \wedge Y^s}\alpha) vol \\ &= (i_{Y^s} i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha) vol \\ &= i_{Y^s}(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha \wedge vol) + (-1)^{s-1}(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha) \wedge i_{Y^s} vol. \end{aligned}$$

Notemos que $(i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha) \wedge vol$ é uma $(n+1)$-forma em M^n, logo é nula. Então

$$\alpha(\widetilde{Y}) vol = (-1)^{s-1} i_{Y^{s-1}} .. i_{Y^1}\alpha \wedge i_{Y^s} vol.$$

Procedendo analogamente como acima temos

$$\alpha(\widetilde{Y}) vol = (-1)^{s-1}(-1)^{s-2} .. (-1)^2(-1)^1 \alpha \wedge i_{Y^1} .. i_{Y^{s-1}} i_{Y^s} vol.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Disso, por (2-6) e pela anticomutatividade do produto exterior $\wedge$ temos

$$\begin{aligned}\alpha(\widetilde{Y})vol &= (-1)^{s-1}(-1)^{s-2}..(-1)^2(-1)^1\alpha\wedge i_{Y^s\wedge..\wedge Y^2\wedge Y^1}vol\\ &= \alpha\wedge i_{\widetilde{Y}}vol,\end{aligned}$$

mostrando assim (4-3). A igualdade (4-4) resulta da definição (4-1) e de (4-3). $\square$

Para cada $\alpha\in E^s(M)$ definamos o s-campo $U=j^{-1}(\alpha)$, $U(p)=j^{-1}(\alpha_p)$, $\forall p\in M$. Por definição de j temos

$$g(U,\widetilde{Y})=g(j^{-1}(\alpha),\widetilde{Y})=j(j^{-1}\alpha)(\widetilde{Y})=\alpha(\widetilde{Y})\ ,\quad \forall\widetilde{Y}\in E_s(M).$$

Proposição 4.8 *Sejam $X=(X^1,..,X^n)\in\widetilde{\mathfrak{g}}_k$, $Y=(Y^1,..,Y^s)\in\widetilde{\mathfrak{g}}_s$ e $\alpha\in E^s(M)$ tal que $d\alpha=i_{\widetilde{X}}vol$, onde $\widetilde{X}=X^1\wedge..\wedge X^k$. Se $U:=j^{-1}(\alpha)$ então $rot(U)=\widetilde{X}$ e*

$$I(X,Y)=\int_M g(U,\widetilde{Y})vol=\int_M U\cdot\widetilde{Y}vol. \tag{4-5}$$

Prova: A igualdade (3-11) afirma que $dj(U)=i_{rot(U)}vol$. Notemos que $j(U)=j(j^{-1}(\alpha))=\alpha$, logo

$$i_{rot(U)}vol=dj(U)=d\alpha=i_{\widetilde{X}}vol.$$

Portanto $\widetilde{X}=rot(U)$. Por outro lado, da igualdade (2-19) temos $g(U,Y)=U\cdot Y$. O resultado (4-5) segue de (4-3).

Proposição 4.9 *Se $H^s(M)=\{0\}$, então $I(X,Y)$ independe da escolha de U tal que $rot(U)=\widetilde{w}$.*

Prova :
Seja $V\in E_s(M)$ tal que $rot(V)=\widetilde{X}$. Então existe $W\in E_s(M)$ tal que $U=V+W$ e $rot(W)=0$. Note que $dj(W)=i_{rotW}vol=0$, isto é, $j(W)\in E^s(M)$ é fechada. Como $H^s(M)=\{0\}$, existe $\theta\in E^{s-1}(M)$ tal que $d\theta=j(W)$. Logo, por definição de j, temos

$$W\cdot\widetilde{Y}=g(W,\widetilde{Y})=j(W)(\widetilde{Y})=d\theta(\widetilde{Y}).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Então

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_M U\cdot\widetilde{Y}vol \\ &= \int_M (V+W)\cdot\widetilde{Y}vol \\ &= \int_M V\cdot\widetilde{Y}vol + \int_M W\cdot\widetilde{Y}vol \\ &= \int_M V\cdot Yvol + \int_M d\theta(\widetilde{Y})vol. \end{aligned}$$

Agora, por (4-3) temos

$$I(X,Y) = \int_M V\cdot\widetilde{Y}vol + \int_M d\theta\wedge i_{\widetilde{Y}}vol.$$

Finalmente, sendo $i_{\widetilde{Y}}vol$ fechado e aplicando Stokes temos

$$\begin{aligned} I(X,Y) &= \int_M V\cdot\widetilde{Y}vol + \int_M d(\theta\wedge i_{\widetilde{Y}}vol) \\ &= \int_M V\cdot\widetilde{Y}vol + \underbrace{\int_{\partial M=\emptyset}\theta\wedge i_{\widetilde{Y}}vol}_{0}. \end{aligned}$$

Portanto $I(X,Y) = \int_M V\cdot\widetilde{Y}vol.$ $\square$

Observação 4.10

Seja M^n uma variedade riemanniana compacta com bordo suave. Se $X = (X^1,..,X^k)\in\widetilde{\mathfrak{g}}_k$ e $Y=(Y^1,..,Y^s)\in\widetilde{\mathfrak{g}}_s$ então o invariante $I(X,Y)=\int_M\alpha\wedge d\beta$, onde $d\alpha = i_{\widetilde{X}}vol$ e $d\beta = i_{\widetilde{Y}}$, pode ainda ser definido sempre que para todo i e j os campos X^i e Y^j sejam tangentes a ∂M e $H^s(M)=\{0\}$. De fato, notemos primeiro que $i_{\widetilde{Y}}vol$ restrita a ∂M é nula

$$\begin{aligned} i_{\widetilde{Y}}vol\mid_{\partial M} &= i_{Y^1\wedge..\wedge Y^s}vol\mid_{\partial M} \\ &= i_{Y^s}i_{Y^{Y-1}}...i_{Y^1}vol\mid_{\partial M} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora mostraremos, como no caso de variedade sem bordo, que $I(X,Y)$ independe da escolha de α e β. Sejam $\gamma\in E^s(M)$ e $\theta\in E^k(M)$ tal que $d\gamma = i_Xvol$ e $d\theta = i_Yvol$. Definamos $\gamma_2 := \alpha-\gamma\in E^s(M)$ e $\theta_2 := \beta-\theta\in E^k(M)$. Então $d\theta_2 = 0$ e $d\gamma_2 = 0$ e sendo $H^s(M)=\{0\}$ temos que existe γ_3 tal que $d\gamma_3=\gamma_2$. Logo, temos que

$$I(X,Y) = \int_M \alpha\wedge d\beta$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$
\begin{aligned}
&= \int_M (\gamma + \gamma_2) \wedge d(\theta + \theta_2) \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M \gamma_2 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M d\gamma_3 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_M d(\gamma_3 \wedge d\theta) \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_{\partial M} \gamma_3 \wedge d\theta \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta + \int_{\partial M} \gamma_3 \wedge i_Y vol \\
&= \int_M \gamma \wedge d\theta. \qquad \square
\end{aligned}
$$

Definição 4.11 *Seja M^n variedade riemanniana compacta sem bordo e orientada. Sejam Φ e Ψ ações de $\mathbb{R}^k$ e $\mathbb{R}^s$ em M respectivamente, $k+s=n-1$, e N uma s-variedade fechada, sem bordo e de homologia nula em M. Suponha que $X \in \widetilde{g}_k$ e $Y \in \widetilde{g}_s$, onde $A(X) = \Phi$ e $A(Y) = \Psi$. Definimos*

$$I(\Phi, \Psi) := I(X, Y), \quad I(\Phi, N) := I(X, N), \tag{4-6}$$

Os quais serão chamados de índice de Hopf com respeito ao par de ações e índice de Hopf com respeito a Φ e N, respectivamente.

A observação 3.10 garante que o índice de Hopf para ações esteja bem definido tanto para variedades com bordo como para variedades sem bordo.

4.2 Teorema Ergódico para Ações de $\mathbb{R}^k$ numa Variedade Riemanniana Compacta

Seja M uma variedade riemanniana compacta com forma de volume vol. Seja Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ de difeomorfismos que preservam volume em M. Denotemos por $L^1(M)$ o espaço das funções $f : M \to \mathbb{R}$ tais que $\int_M |f| vol < \infty$. Lembremos que se $A \subset M$ então chamamos de função caracteristica de A a função χ_A tal que $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$ e $\chi_A(x) = 0$ caso contrário. Agora, uma função f é dita simples se existem $A_1, A_2, .., A_k$ subconjuntos mensuráveis em M e escalares $a_1, a_2, .., a_k$ tal que

$$f = \sum_{i+1}^{k} a_i \chi_{A_i}.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Seja $\widetilde{W}$ o subespaço de $L^1(M)$ definido por

$$\widetilde{W} = \{h - h \circ \Phi_{(t_1,..,t_k)};\ h \text{ função simples e } \ (t_1,..,t_k) \in \mathbb{R}^k\}.$$

Denotemos também por W o fecho em $L^1(M)$ do subespaço linear gerado por $\widetilde{W}$. Notemos que $\widetilde{W}$ é denso em W.

Seja I o subespaço de $L^1(M)$ das funções Φ invariantes, isto é, uma função f pertence a I se existe $U \subset M$ tal que seu complemento tem medida nula em M e f satisfaz

$$f(x) = f \circ \Phi_{(t_1,..,t_k)}(x)) \qquad \forall x \in U,\ \forall (t_1,..,t_k) \in \mathbb{R}^k.$$

A demonstração do teorema seguinte pode ser lida em [Tem] no teorema 5.1,

Teorema 4.12 *Cada função $f \in L^1(M)$ tem uma única represenração da forma*

$$f_1 + f_2, \qquad f_1 \in I \ e\ f_2 \in W.$$

Isto é, $L^1(M) = I \oplus W$.

Seja μ a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Consideremos uma seqüência de k-retângulos

$$\{T_n = [0, T_n^1] \times .. \times [0, T_n^k]\}_{n\in\mathbb{N}}$$

tal que para todo $i \in \{1,..,k\}$ temos $\lim_{n\to\infty} T_n^i = 0$. Seja $f \in L^1(M)$ e definamos a seqüência de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(M)$ tal que para cada $p \in M$ temos

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t}\in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}). \\ &= \frac{1}{T_n^1 T_n^2 .. T_n^k} \int_0^{T_n^k} \int_0^{T_n^{k-1}} .. \int_0^{T_n^1} f(\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p)) dt_1 dt_2 .. dt_k, \end{aligned}$$

onde $\vec{t} = (t_1,..,t_k)$.

Teorema 4.13 *A seqüência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma função $\tilde{f}$ em $L^1(M)$, isto é,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_M |f_n - \tilde{f}| vol = 0. \tag{4-7}$$

Alem disso, esta função $\tilde{f}$ independe da escolha da seqüência $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ escolhida e satisfaz

$$\int_M \tilde{f} vol = \int_M f vol. \tag{4-8}$$

Prova: Seja $f \in \widetilde{W}$. Neste caso devemos mostrar que para todo $p \in M$ se satisfaz $\lim_{n\to\infty} |f_n(p)| = 0$. Fixemos $\vec{t'} = (t'_1,..,t'_k) \in \mathbb{R}^k$. Será suficiente

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

mostrar para o caso $f(p) = \chi_A(p) - \chi_A(\Phi_{(t'_1,..,t'_k)}(p))$, onde A é um subconjunto mensurável em M e χ_A é a função característica de A. Seja

$$D_p = \{(t_1, .., t_k) \in \mathbb{R}^k;\ \Phi_{(t_1,..,t_k)}(p) \in A\}.$$

Por ser Φ continua (suave) temos que D_p é um conjunto mensurável em $\mathbb{R}^k$ para todo p em M. Notemos que $\chi_A(\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p)) = \chi_{D_p}(t_1, ..t_k)$. Logo

$$\begin{aligned}
|f_n(p)| &= |\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t})| \\
&= |\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} (\chi_{D_p}(\vec{t}) - \chi_{D_p}(\vec{t'} + \vec{t})) d\mu(\vec{t})| \\
&= \left| \frac{\mu(D_p \cap T_n) - \mu((D_p - \vec{t'}) \cap T_n)}{\mu(T_n)} \right| \\
&= \left| \frac{\mu(D_p \cap T_n) - \mu(D_p \cap (\vec{t'} + T_n))}{\mu(T_n)} \right| \\
&\leq 2 \sum_{i=1}^{k} \frac{(T_n^1 + t'_1)..(T_n^{i-1} + t'_{i-1}) t'_i (T_n^{i+1} + t'_{i+1})..(T_n^k + t'_k)}{T_n^1 T_n^2 .. T_n^k}.
\end{aligned}$$

Portanto $|f_n(p)| \to 0$. Agora, suponha que $f \in W$. Para cada $\epsilon > 0$ existe $f_\epsilon \in \widetilde{W}$ tal que $\int_M |f(p) - f_\epsilon(p)| vol = 0$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_{p \in M} |f_n(p)| vol(p) &\leq \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} |f(\Phi_{\vec{t}}(p))| \, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\
&\leq \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} |f(\Phi_{\vec{t}}(p)) - f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))| \, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) + \\
&\quad + \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} |f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))| \, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\
&= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} \left(\int_M |f(\Phi_{\vec{t}}(p)) - f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))| \, vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) + \\
&\quad + \int_M \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} |f_\epsilon(\Phi_{\vec{t}}(p))| \, d\mu(\vec{t}) \right) vol(p).
\end{aligned}$$

Logo, para n suficientemente grande temos $\int_{p \in M} |f_n(p)| vol(p) \leq 2\epsilon$. Como ϵ é arbitrário, temos que

$$\lim_{n \to \infty} \int_M |f_n| vol = 0.$$

Agora, seja $f \in L^1(M)$. O teorema 4.12 garante que existem $\tilde{f} \in I$ e $h \in W$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

tal que $f = \tilde{f} + h$. Observemos que

$$\begin{aligned} f_n(p) &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \\ &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} \tilde{f}(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) + \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} h(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \\ &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{T_n} \tilde{f}(p) d\mu(\vec{t}) + h_n(p) \\ &= \tilde{f}(p) + h_n(p) \end{aligned}$$

para todo $p \in U$, onde U é o conjunto em M no qual a função $\tilde{f} \in I$ é invariante pela ação. Lembremos que U tem complemento em M com medida nula, logo

$$\begin{aligned} \int_{p \in M} |f_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) &= \int_{p \in U} |f_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) \\ &= \int_{p \in U} |\tilde{f}(p) + h_n(p) - \tilde{f}(p)| vol(p) \\ &= \int_{p \in U} |h_n(p)| vol(p) \\ &\to 0. \end{aligned}$$

Portanto f_n converge a $\tilde{f}$ no espaço $L^1(M)$ e observamos que $\tilde{f}$ independe da sequencia $\{T_n\}$ escolhida, mostrando assim (4-7). Agora, mostraremos (4-8) lembrando que Φ é uma ação que preserva vol. Assim

$$\begin{aligned} \int_{p \in M} f_n(p) vol(p) &= \int_{p \in M} \left(\frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) d\mu(\vec{t}) \right) vol(p) \\ &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} \left(\int_{p \in M} f(\Phi_{\vec{t}}(p)) vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) \\ &= \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} \left(\int_{p \in M} f(p) vol(p) \right) d\mu(\vec{t}) \\ &= \left(\int_{p \in M} f(p) vol(p) \right) \frac{1}{\mu(T_n)} \int_{\vec{t} \in T_n} d\mu(\vec{t}) \\ &= \int_{p \in M} f(p) vol(p). \qquad \square \end{aligned} \tag{4-9}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

5
A Generalização da Lei de Biot-Savart

Seja Ω um domínio compacto em $\mathbb{R}^3$ com bordo suave e X um campo vetorial em Ω de divergência nula e tangente ao bordo de Ω. A Lei de Biot Savart afirma que o campo vetorial $BS(X)$ em Ω definido pela igualdade

$$BS(X)(x) := \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{(x-y)\times X(y)}{\|y-x\|^3}vol(y)$$

satisfaz $rot(BS(X)) = X$. Neste capítulo estenderemos este resultado para um k-campo U em Ω da forma $U = U^1 \wedge .. \wedge U^k$ tal que cada U^i é um campo em Ω de divergência nula e tangente ao bordo. Neste caso, definiremos o $(n-k-1)$-campo $BS(U)$ de Ω pela igualdade

$$BS(U)(x) := \frac{(-1)^k}{a_n}\int_{\Omega}\frac{(x-y)\times U(y)}{\|x-y\|^n}vol(y),$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitaria S^{n-1} em $\mathbb{R}^n$, e mostraremos que este $(n-k-1)$-campo satisfaz $rot(BS(U)) = U$.

5.1
Distribuições em $\mathbb{R}^n$

Seja C_0^∞ o espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^n$ com suporte compacto. Uma forma linear sobre C_0^∞ é dita uma distribuição se $u[\phi_k] \to 0$ para cada seqüência $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ em C_0^∞ satisfazendo

1. Existe conjunto compacto K tal que para todo i o suporte de ϕ_i está contido em K, isto é, $supp\ \phi_i \subset K$; e

2. A norma do supremo de qualquer derivada parcial das funções ϕ_i converge para 0 , isto é, para cada n-upla $= (i_1, ..., i_n)$ fixa de inteiros não negativos e $r = \sum_{j=1}^n i_j$ temos que $sup\ \left|\dfrac{\partial^r \phi_k}{\partial x_n^{i_n}..\partial x_1^{i_1}}\right| \to 0$.

No que segue, se u é uma distribuição e f é uma função suave com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$ então $u[f]$ denotará o valor da distribuição aplicado a f. O espaço das distribuições será denotado por $\mathcal{D}$. Em particular, se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

isto é uma função em $\mathbb{R}^n$ tal que $|f|$ é localmente integrável, então esta define naturalmente uma distribuição, a qual denotaremos pela própria f, fazendo

$$f[\phi] := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\phi(y)vol.$$

Agora, suponha que a função f, que define a distribuição, é suave. Então cada derivada parcial $\dfrac{\partial^r f}{\partial x_n^{i_n}..\partial x_1^{i_1}}$ de f também define uma distribuição. Neste caso, fazendo integração por partes, temos, para cada ϕ suave de suporte compacto, que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)\phi(y)vol \\
&= (-1)^r \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)vol \\
&= (-1)^r f[\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}].
\end{aligned}$$

Logo, pela definição de distribuição, podemos definir a distribuição derivada parcial $\partial^\alpha u$ de uma distribuição u por

$$\frac{\partial^r u}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] := (-1)^r u[\frac{\partial^r \phi}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}]. \tag{5-1}$$

Em particular, se f é uma função que tem derivada parcial $\dfrac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}$ localmente integrável então

$$\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}[\phi] = \int_{y\in\mathbb{R}^n} \phi(y)\frac{\partial^r f}{\partial y_n^{i_n}..\partial y_1^{i_1}}(y)vol. \tag{5-2}$$

Chamamos de operador laplaciano ao operador $\triangle$ que age em $\mathcal{D}$ e é definida para cada distribuição u por

$$\triangle u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}. \tag{5-3}$$

Entre as distribuições que não são definidas por uma função em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ existe uma que requer especial atenção, a distribuição delta de Dirac centrada em x que é denotada por δ_x e é definida por $\delta_x[\phi] := \phi(x)$. No caso de $\delta_{\vec{0}}$, onde $\vec{0}$ é a origem em $\mathbb{R}^n$ escreveremos simplesmente δ. Seja $f_n,\ n \geq 3$, a distribuição definida pela função

$$f_n(y) = -\frac{1}{(n-2)a_n}\ \frac{1}{\|y-x\|^{n-2}}, \tag{5-4}$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitária $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. Podemos verificar que $\triangle f_n = 0,\ y \neq \overrightarrow{0}$, e que $\dfrac{\partial f_n}{\partial y_i} = \dfrac{1}{a_n}\dfrac{y_i}{\|y\|^n}$ é uma função localmente integrável

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

em $\mathbb{R}^n$. Alem disso

$$\delta_x = \triangle f_n. \tag{5-5}$$

De fato, mostraremos este resultado para o caso $x = \vec{0}$. Por (5-1) e por definição do laplaciano de uma função em $\mathbb{R}^n$

$$\triangle f[\phi] = f[\triangle\phi] = f[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}(\frac{\partial \phi}{\partial y_i})].$$

Agora, pela linearidade de uma distribuíção e por (5-2) temos

$$\triangle f[\phi] = -\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}[\frac{\partial \phi}{\partial y_i}] = -\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial \phi}{\partial y_i} vol.$$

Notemos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial \phi}{\partial y_i} = \langle \nabla f, \nabla \phi \rangle$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Disso, por definição de integral de uma função com singularidades, por (3-12), aplicando divergência de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
\triangle f[\phi] &= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} \langle \nabla f, \nabla\phi\rangle\ vol \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} div(\phi\nabla f) - \phi\triangle f\ vol \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|\geq\xi} div(\phi\nabla f). \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\int_{\|y\|=\xi} \phi\langle\nabla f, N\rangle dS \\
&= -\lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} \phi(y)\langle\frac{y}{\|y\|^n}, \frac{-y}{\|y\|}\rangle dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} \phi(y)\frac{1}{\xi^{n-1}} dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{a_n}\int_{\|y\|=\xi} (\phi(0)+O(\xi))\frac{1}{\xi^{n-1}} dS \\
&= \lim_{\xi\to 0}\frac{\phi(0)}{\xi^{n-1}a_n}\int_{\|y\|=\xi} dS \\
&= \phi(0). \qquad \square
\end{aligned}$$

Consideremos $E_o(\mathbb{R}^n)$, o subconjunto de $E(\mathbb{R}^n)$ formado pelos k-campos cujas funções coordenadas tem suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{D}^n$ o espaço dos 1-campos vetoriais em $\mathbb{R}^n$ cujas funções coordenadas são funções em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que serão consideradas distribuições em $\mathbb{R}^n$. Definamos o produto $\wedge_{\mathcal{D}}$ entre os espaços $\mathcal{D}^n$ e $E_o(\mathbb{R}^n)$ tal que se multiplicamos dois de estes elementos obtemos um elemento da algebra exterior de $\mathbb{R}^n$, a saber, se $F = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i \in \mathcal{D}^n$ e

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$U = \sum_{i_1,..,i_k} u_{i_1,..,i_k} e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k} \in E_o(\mathbb{R}^n)$ então definimos o produto por

$$F \wedge_{\mathcal{D}} U := \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k} \in \Lambda(\mathbb{R}^n),$$

onde cada f_i é considerada distribuição e $f_i[u_{i_1,..,i_k}]$ é o valor de f_i aplicado na função $u_{i_1,..,i_k}$. Observemos que podemos definir os produtos

$$\begin{aligned}
F \times_{\mathcal{D}} U &:= *(F \wedge_{\mathcal{D}} U) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}] * (\ e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}). \\
F \cdot_{\mathcal{D}} U &:= *(F \wedge_{\mathcal{D}} (*U)) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}] * (\ e_i \wedge *(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}]\ e_i \cdot *(e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Agora, suponha que o k-campo U depede das variaveis x e y. Então podemos calcular a distribuição com respeito a variavel y e definir div_x e rot_x como veremos a seguir

$$\begin{aligned}
div_x(F \times_{\mathcal{D}} U) &:= div_x(\sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= \sum_{i,i_1,..,i_k} (\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \cdot (e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})). \\
rot_x(F \times_{\mathcal{D}} U) &:= rot_x(\sum_{i,i_1,..,i_k} f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)\ e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}) \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} *(\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \wedge (e_i \times (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})) \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} *(\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \wedge *(e_i \wedge (e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k})). \\
&= (-1)^{(k+1)s} \sum_{i,i_1,..,i_k} (\nabla_x f_i[u_{i_1,..,i_k}](x)) \cdot (e_i \wedge e_{i_1} \wedge .. \wedge e_{i_k}).
\end{aligned}$$

Exemplo 5.1

Sejam $U = (U_1, U_2, U_3) \in E_o(\mathbb{R}^3)$ e $f, h_1 = \frac{y_1}{\|y\|^3}, h_2 = \frac{y_2}{\|y\|^2}, h_3 = \frac{y_3}{\|y\|^3}$ distribuições em $\mathbb{R}^3$. Definamos $F := (f_1, f_2, f_3) \in \mathcal{D}^3$. Notemos que $F = \nabla f_3$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

onde f_3 satisfaz $\triangle f_3 = \delta$. Logo

$$\begin{aligned}
\langle\ F\ ,\ U\ \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle\ (h_1, h_2, h_3)\ ,\ (U_1, U_2, U_3)\ \rangle_{\mathcal{D}} \\
&= f_1[U_1] + f_2[U_2] + f_3[U_3] \in \mathbb{R} \\
F \times_{\mathcal{D}} U &= (h_1, h_2, h_3) \times_{\mathcal{D}} (U_1, U_2, U_3) \\
&= (h_2[U_3] - h_3[U_2])e_1 + (-h_1[U_3] + h_3[U_1])e_2 + (h_1[U_2] - h_2[U_1])e_3 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_2U_3 - y_3U_2}{\|y\|^3} vol, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-y_1U_3 + y_3U_1}{\|y\|^3} vol, \int_{\mathbb{R}^3} \frac{y_1U_2 - y_2U_1}{\|y\|^3} vol\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} F \times U vol \in \mathbb{R}^3. \qquad (5\text{-}6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle\ F\ , \nabla U_i\ \rangle_{\mathcal{D}} &= \langle \nabla f_3\ , \nabla U_i\ \rangle_{\mathcal{D}} \\
&= \langle (\frac{\partial f_3}{\partial y_1}, \frac{\partial f_3}{\partial y_2}, \frac{\partial f_3}{\partial y_3})\ ,\ (\frac{\partial U_i}{\partial y_1}, \frac{\partial U_i}{\partial y_2}, \frac{\partial U_i}{\partial y_3})\rangle_{\mathcal{D}} \\
&= \frac{\partial f_3}{\partial y_1}[\frac{\partial U_i}{\partial y_1}] + \frac{\partial f_3}{\partial y_2}[\frac{\partial U_i}{\partial y_2}] + \frac{\partial f_3}{\partial y_3}[\frac{\partial U_i}{\partial y_3}] \\
&= -\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_1^2}[U_i] - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_2^2}[U_i] - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2}[U_i] \\
&= -(\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2})[U_i] \\
&= -\triangle f_3[U_i] \\
&= -U_i(\vec{0}). \qquad (5\text{-}7)
\end{aligned}$$

5.2
A Lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^3$

Agora, fazendo uso do produto $\wedge_{\mathcal{D}}$ mostraremos a Lei de Biot-Savart. No que segue consideraremos $x = (x_1, .., x_n)$ e $y = (y_1, .., y_n)$.

Proposição 5.2 *(Lei de Biot-Savart) Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^3$ com bordo suave $\partial\Omega$. Se U é um campo vetorial em Ω tal que $div(U) = 0$ e é tangente a $\partial(\Omega)$ então o campo definido por*

$$BS(U)(x) := \frac{-1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^n} \times U(y) vol(y)$$

satisfaz

$$rot(BS(U))(x) = U(x)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Prova: Sejam $p \in \Omega$, $r = dist(p, \partial\Omega)$, $0 < 2\zeta \ll r$ e $f : \Omega \to [0,1]$ uma função suave tal que

$$f(y) = \begin{cases} 1 & se \quad \|y-p\| \leq \zeta. \\ 0 & se \quad \|y-p\| \geq 2\zeta. \end{cases}$$

Em Ω definamos os campos vetoriais $U^1 := fU$, $U^2 = (1-f)U$ e

$$BS_1(U^1)(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_\Omega \frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} \times U^1(y)vol(y).$$

Notemos que $U^1 \in E_o(\mathbb{R}^n)$ e que $\nabla(-\frac{1}{4\pi\|y\|}) = \frac{1}{4\pi}\frac{y}{\|y\|^3}$. Então fazendo uma mudança de coordenadas na integral, por (5-4) para o caso $x = \vec{0}$ e por (5-6) temos que

$$\begin{aligned} BS_1(U^1)(x) &= \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)}{\|x-y\|^3} \times U^1(y)vol(y) \\ &= \frac{-1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{y}{\|y\|^3} \times U^1(x-y)vol(y) \\ &= -\nabla_y f_3 \times_{\mathcal{D}} U^1(x-y). \end{aligned}$$

Notemos por (3-9) que

$$rot_x(\nabla_y f_3 \times_{\mathcal{D}} U^1(x-y)) = div_x(\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} U^1(x-y)).$$

Logo, por (3-17), observando que $\nabla_y f_3$ independe de x e usando a fórmula (3-16) para o colchete de Lie temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_1(U^1))(x) &= -div_x(\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} U^1(x-y)) \\ &= -\nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} (div_x(U^1(x-y))) + \sum_{i=1}^{3}\langle \nabla_y f_3, \nabla_x U_i^1(x-y)\rangle_{\mathcal{D}} e_i \\ &= \nabla_y f_3 \wedge_{\mathcal{D}} (div_y(U^1(x-y))) - \sum_{i=1}^{3}\langle \nabla_y f_3, \nabla_y U_i^1(x-y)\rangle_{\mathcal{D}} e_i. \end{aligned}$$

Logo, por definição de distribuição, por (5-7) e por (5-5)

$$\begin{aligned} rot_x(BS_1(U^1))(x) &= \frac{-1}{4\pi}\int_{y\in\mathbb{R}^3} div(U^1)(x-y)\frac{y}{\|y\|^3}vol + \sum_{i=1}^{3}\triangle f_3[U_i^1(x-y)]e_i \\ &= \frac{-1}{4\pi}\int_{y\in\mathbb{R}^3} div(U^1)(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol + \sum_{i=1}^{3}\delta[U_i^1(x-y)]e_i \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{y\in\mathbb{R}^3} div(U^1)(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol + U^1(x). \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Assim, pela definição do campo U^1 temos que

$$rot_x(BS_1(U^1))(x) = U^1(x) - \frac{1}{4\pi}\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} div(fU)(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol.$$

Por outro lado, seja

$$BS_2(U^2)(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega}\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3}\times U^2(y)vol(y).$$

Se $\Omega_0 := \{\|y-p\|\geq\zeta\}\cap\Omega$ temos , pela definição de U^2, que

$$BS_2(U^2)(x) = \frac{-1}{4\pi}\int_{\Omega_0}\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3}\times U^2(y)vol(y).$$

Neste caso, $\forall x\in\Omega$ tal que $\|x-p\|<\zeta$ estamos integrando funções suaves. Logo, podemos derivar dentro da integral. Assim, por (3-9) e por (3-17) temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_0} div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3}\wedge U^2(y))vol(y) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega_0} div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3})U^2(y)vol(y) - \\ &\qquad \sum_i\left\{\int_{\Omega_0}\langle\nabla_x(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}),U^2(y)\rangle vol\right\}e_i. \end{aligned}$$

Como $div_x(\frac{(x-y)}{\|x-y\|^3})=0$ e $\nabla_x(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}) = -\nabla_y(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3})$ temos

$$\begin{aligned} 4\pi\ rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \sum_i\left\{\int_{\Omega_0}\langle\nabla_y(\frac{(x_i-y_i)}{\|x-y\|^3}),U^2(y)\rangle vol\right\}e_i \\ &= \sum_i\left\{\int_{\Omega_0}\left(div(\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}U^2) - \frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}divU^2\right)vol\right\}e_i. \end{aligned}$$

Por definição de U^2 e teorema de Stokes temos

$$\begin{aligned} 4\pi\ rot_x(BS_2(U^2))(x) &= \sum_i\{\int_{\partial\Omega_0}\langle\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}U^2,N\rangle dS - \\ &\qquad -\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta}\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}divU^2vol\}e_i. \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Como $\partial\Omega_0 = \{\|y-p\| = \zeta\} \cup \partial\Omega$, $U_2|_{\{\|y-p\|=\zeta\}} = \vec{0}$ e $U_2|_{\partial\Omega} = U|_{\partial\Omega}$ é tangente ao bordo, temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS_2(U^2))(x) &= -\frac{1}{4\pi}\sum_i \left\{ \int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} divU^2(y)\frac{x_i-y_i}{\|x-y\|^3}vol \right\} e_i \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} div(1-f(y))U(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{\zeta\leq\|y-p\|\leq 2\zeta} divf(y)U(y)\frac{x-y}{\|x-y\|^3}vol. \end{aligned}$$

Finalmente, $rot_x(BS(U))(x) = rot_x(BS(U_1))(x) + rot_x(BS(U_2))(x) = U(x)$. □

Nesta demonstração dividimos U em dois campos com a finalidade de integrar a singularidade de $BS(U)$ usando propriedades de distribuição. Ressaltamos que podemos demonstrar o teorema de Biot-Savart em forma prática, derivando dentro da integral como se estivessemos trabalhando com funções suaves. Neste caso podemos usar o teorema de divergência de Gauss, quando for o caso, e observar se podemos usar a distribuição delta de Dirac. Na verdade a propria demonstração do teorema sugere este fato, já que as integrais que faltam na forma prática são as integrais que se anulam ao dividir U em duas partes na demonstração rigorosa. Apresentaremos agora esta demonstração prática:

Seja $f(x,y) = \dfrac{-1}{4\pi\|y-x\|}$. Notemos que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}$, $\forall i,j$. Observemos que $\dfrac{1}{4\pi\|x-y\|^3} = \nabla_x f$. Disso, por (2-17), (3-22) e sendo U de divergência nula temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= -\int_\Omega rot_x\left(\nabla_x f\right) \times U(y)vol(y) \\ &= -\int_\Omega div_x\left(\nabla_x\left(f\right) \wedge U(y)\right) vol(y) \\ &= \int_\Omega \left(\triangle_y f\right) U(y)vol(y) + \sum_{i=1}^{3}\left(\int_\Omega div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}U\right) vol\right) e_i. \end{aligned}$$

Por outro lado, por (5-4) e (5-5) temos que $\triangle_y f = \delta_x$. Logo, pela definição de δ_x, pelo teorema de divergência de Gauss e sabendo que U é tangente ao bordo de Ω, temos que

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= \delta_x[U] + \sum_{i=1}^{3}\left(\int_{\partial\Omega}\left\langle \frac{\partial f}{\partial y_i}U, N\right\rangle dS\right) e_i \\ &= U(x). \end{aligned} \tag{5-8}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

5.3
A lei de Biot-Savart em $\mathbb{R}^n$

Agora, generalizaremos o teorema de Biot-Savart para dimensões maiores. No que resta deste capítulo fixemos k e s inteiros positivos tal que $k+s=n-1$. Lembremos que $(U^1,U^2,..,U^k)$ é uma n-upla em $\widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ se cada coordenada U^i é um 1-campo vetorial em Ω que satisfazem $div(U^i)=[U^i,U^j]=0$, para todo i e j, além disso se $\widetilde{U}=U^1\wedge..\wedge U^k$ é o k-campo associado a U então $j(*\widetilde{U})=i_{\widetilde{U}}vol$, a $(n-k)$-forma associada a $\widetilde{U}$, é exata.

Proposição 5.3 *Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com bordo $\partial\Omega$ suave. Sejam $U=(U^1,..,U^k)\in\widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ e $\widetilde{U}$ o k-campo associado a U. Suponha que cada 1-campo U^i é tangente ao bordo de Ω. Então o s-campo $BS(U)$ definido por*

$$BS(U)(x):=\frac{(-1)^k}{a_n}\int_\Omega\frac{(x-y)}{\|x-y\|^n}\times\widetilde{U}(y)vol(y), \tag{5-9}$$

onde a_n é o $(n-1)$-volume da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$, satisfaz

$$rot(BS(U))(x)=\widetilde{U}(x) \tag{5-10}$$

Prova: A demonstração será feita na forma prática como no caso do teorema de Biot-Savart. Seja $f(x,y)=\dfrac{-1}{a_n(n-2)\|y-x\|^{n-2}}$. Notemos que esta função satisfaz $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_i\partial y_j}$,e observemos que $\dfrac{x-y}{a_n\|x-y\|^n}=\nabla_x f$. A observação 2.15 garante que $div(\widetilde{U})=0$. Suponha que para cada i temos que $U^i=\sum_{j=1}^n u^i_j e_j$, logo, por (3-9), (2-17), (3-22) e sendo $\widetilde{U}$ de divergência nula temos que

$$\begin{aligned}
rot_x(BS(U))(x) &= -\int_\Omega rot_x\left(\nabla_x f\right)\times U(y)vol(y)\\
&= -\int_\Omega div_x\left(\nabla_x\left(f\right)\wedge U(y)\right)vol(y)\\
&= (-1)^{n+k}\sum_{r,j,j_1,..\widehat{j_r}..,j_k}^{k,n,n,..,n}\left\{\,(-1)^r\left(\int_\Omega div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}u^1_{j_1}..\widehat{u^r_{j_r}}..u^k_{j_k}U^r\right)vol\right).\right.\\
&\quad \left..e_j\wedge e_{j_1}\wedge..\widehat{e_{j_r}}..\wedge e_{j_k}\,\right\}+\int_\Omega\left(\triangle_y f\right)U(y)vol(y),
\end{aligned}$$

onde os pontinhos nas últimas linhas significa continuação do sumatório. Agora, o teorema de divergência de Gauss e sabendo que U é tangente ao bordo garantem que

$$\int_\Omega div_y\left(\frac{\partial f}{\partial y_j}u^1_{j_1}..\widehat{u^r_{j_r}}..u^k_{j_k}U^r\right)vol=0.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Alem disso, por (5-4) e (5-5) temos que $\triangle_y f = \delta_x$. Assim

$$\begin{aligned} rot_x(BS(U))(x) &= \delta_x[\widetilde{U}] \\ &= \widetilde{U}(x). \qquad \square \end{aligned}$$

Agora usaremos o teorema de Biot-Savart generalizado para dar uma fórmula da invariante de Hopf de duas n-uplas $U \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k(\Omega)$ e $V \in \widetilde{\mathfrak{g}}_s(\Omega)$ a qual será muito importante para resultados posteriores.

Corolário 5.4 *Seja Ω domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com bordo $\partial\Omega$ suave e com a cohomologia nula em dimensão s, isto é, $H^s(\Omega) = \{0\}$. Sejam $U = (U^1, .., U^k) \in \widetilde{g}_k(\Omega)$ e $V = (V^1, ..V^s) \in \widetilde{g}_s(\Omega)$. Suponha que os U^i e os V^j são tangentes ao bordo de Ω. Se $\widetilde{U}$ e $\widetilde{V}$ são o k-campo e o s-campo associados a U e V, respectivamente, então*

$$I(U,V) = \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(y-x)\times\widetilde{U}\cdot\widetilde{V}}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y) \tag{5-11}$$

$$= \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{[y-x, U^1(x), .., U^k(x), V^1(y), .., V^s(y)]}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y). \tag{5-12}$$

Prova:
Pelo Teorema de Biot-Savart generalizado, $rot[BS(\widetilde{U})](y) = \widetilde{U}(y)$. Disso e do fato que $H^s(\Omega) = \{0\}$, temos pela proposição 3.8 e pela proposição 3.9 que $I(U,V) = \int_\Omega BS(\widetilde{U})(y)\cdot\widetilde{V}(y)vol(y)$. Logo por definição do s-campo $BS(\widetilde{U})$ temos

$$\begin{aligned} I(U,V) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{(y-x)\times\widetilde{U}(x)}{\|y-x\|^n} vol(x) \right) \cdot \widetilde{V}(y)vol(y) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n} \iint_{\Omega\times\Omega} \frac{(y-x)\times\widetilde{U}(x)\cdot\widetilde{V}(y)}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y) \end{aligned}$$

mostrando assim (5-11). Para mostrar (5-12) consideramos a base canônica de $\mathbb{R}^n$, $\beta = \{e_1, .., e_n\}$, e o resultado será obtido usando a formula (2-18). $\square$

Observação 5.5

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

O invariante de Hopf usado por Arnold em [Arn] para um campo $X \in E_1(M)$ de divergência nula satisfaz

$$\begin{aligned} I(X) := I(X,X) &= \frac{1}{4\pi}\int_\Omega\int_\Omega \frac{(x-y)\times X(x)\cdot X(y)}{\|x-y\|^3} vol(x)vol(y), \\ &= \frac{1}{a_2}\int_\Omega\int_\Omega \frac{[x-y, X(x), X(y)]}{\|x-y\|^3} vol(x)vol(y) \end{aligned}$$

onde $\times$ e $\cdot$ são o produto vetorial e interno usual em $\mathbb{R}^3$ e $[\quad]$ é o produto mixto, os quais como sabemos coincidem com o produto $\times$, o produto $\cdot$ e o determinante no caso $\mathbb{R}^3$ e observamos que este resultado de Arnold coincide com o resultado do último corolário para o caso $k = 1$, $U = X$ e $V = X$. $\square$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

6
Fórmulas de Enlaçamento

6.1
Índice de Enlaçamento

Seja S_1 uma variedade conexa, compacta, orientada e sem bordo de dimensão n. Sendo S_1 conexa toda função f de S_1 em $\mathbb{R}$ que satisfaz $df = 0$ é uma função constante. Logo, por definição temos que $H^0(S_1) = \mathbb{R}$, onde $H^0(S_1)$ é a 0-ésima cohomologia de S_1. Logo, a dualidade de Poincaré garante que $H^n(S_1) = \mathbb{R}$. Por outro lado, o teorema de de Rham afirma que a k-ésima homologia $H_k(S_1)$ é isomorfo a $H^k(S_1)$ para todo $k \in \{0, 1, .., n\}$. Em particular, $H_n(S_1) = \mathbb{R}$, logo podemos considerar a classe fundamental de S_1 como gerador de $H_n(S_1)$. Logo, se S_2 é outra variedade conexa, compacta, orientada e sem bordo de dimensão n então cada aplicação $f : S_1 \to S_2$ suave satisfaz $f_* S_1 = m_f S_2$, onde m_f é uma constante. Um resultado importante da topología assegura que m_f é um inteiro chamado de grau de f e denotado por $deg(f)$.

Suponha agora que a variedade S_1 acima seja de dimensão $n-1$ e imersa em $\mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ sendo f a função que define a imersão. Seja $g := \pi \circ f : S_1 \to S^{n-1}$, onde $\pi : \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\} \to S^{n-1}$, $\pi(p) = \dfrac{p}{\|p\|}$, é a projeção na esfera unitaria. O inteiro $deg(g)$ indica o número de vezes que $f(S_1)$ roda em torno da origem e será denotado por $I_f(S_1)$. Neste caso, se σ é a forma de volume de S^{n-1} e a_n é o $(n-1)$-volume de S^{n-1} então

$$deg(g) = \frac{deg(g)}{a_n} \int_{S^{n-1}} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{deg(g) S^{n-1}} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{(\pi \circ f)_* S_1} \sigma = \frac{1}{a_n} \int_{S_1} (\pi \circ f)^* \sigma.$$

Portanto, se $\tau = \pi^* \sigma$ então $I_f(S_1) = \dfrac{1}{a_n} \displaystyle\int_{S_1} f^* \tau$.

Observação 6.1

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} x_i dx_1 .. \widehat{dx_i} .. dx_n. \tag{6-1}$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^n} dx_1 .. \widehat{dx_i} .. dx_n, \tag{6-2}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

onde r é a norma euclidiana do vetor posição $X = (x_1, x_2, .., x_n)$. $\square$

Seja M uma variedade riemanniana, conexa e orientada de dimensão n. Sejam S_1 e S_2 sub-variedades orientadas imersas em M, ambas compactas, sem bordo e de dimensões k_1 e k_2 respectivamente, onde $k_1 + k_2 = n - 1$. Suponha que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ e ambas sejam de homologia nula em M. Seja $\widetilde{S}_1$ uma $(k_1 + 1)$-cadeia em M tal que

1. $\partial \widetilde{S}_1 = S_1$, como cadeias
2. $\widetilde{S}_1$ é transversal a S_2.

Define-se o índice de enlaçamento de S_1 e S_2 por

$$lk(S_1, S_2) = \sum_{\widetilde{S}_1 \cap S_2} \pm 1, \tag{6-3}$$

onde sumamos $+1$ em cada ponto de trasversalidade positiva e -1 se a transversalidade for negativa. Notemos que o conjunto $\widetilde{S}_1 \cap S_2$ é finito, já que S_2 é compacto e os pontos de transversalidade são isolados, logo $lk(S_1, S_2)$ é finito. Na definição deste índice de enlaçamento poderíamos tambem ter usado uma sub-variedade $\widetilde{S}_2$ de M tal que $\partial \widetilde{S}_2 = S_2$. Afirmamos que este índice independe da escolha de $\widetilde{S}_i$, $i = 1, 2$, já que este índice também pode ser definida por uma integral que depende somente de S_1 e S_2. Mostraremos este fato, primeiro para o caso $M = \mathbb{R}^n$. Sendo S_1 e S_2 compactas, orientadas e sem bordo a variedade produto $S_1 \times S_2$ é também uma variedade compacta, orientada e sem bordo. sejam $x = (x_1, .., x_n)$ e $y = (y_1, .., y_n)$ as imersões de S_1 e S_2 em $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Por ser $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ podemos definir a aplicação suave

$$\begin{array}{rcccl} f & : & S_1 \times S_2 & \to & \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}. \\ & & (x, y) & \mapsto & y - x. \end{array}$$

Então pode-se mostrar que

$$lk(S_1, S_2) = I_f(S_1 \times S_2) = \frac{1}{a_n} \int_{S_1 \times S_2} f^*(\tau) \tag{6-4}$$

Esta fórmula mostra a independencia do $lk(S_1, S_2)$ com respeito a escolha das $\widetilde{S}_1$ ou $\widetilde{S}_2$.

Agora, sendo estas sub-variedades orientadas existem o k_1-campo unitário N_1 e e o k_2-campo unitário N_2 que definem as orientações de S_1 e S_2, respectivamente. Para cada $p \in S_1$ identificaremos $T_p(S_1)$, o espaço tangente de S_1 em p, como o subespaço de $\mathbb{R}^n$ de vetores tangentes da imersão no ponto $x(p)$, isto é, estamos considerando $T_p(S_1) \subset \mathbb{R}^n$. Logo, se $\{u_1, .., u_{k_1}\}$ é uma base ortonormal positiva de $T_p(S_1)$ então $N_1(p) = u_1 \wedge .. \wedge u_{k_1}$. Identificações análogas serão feitas para os espaços tangentes de S_2.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Proposição 6.2 *O índice de enlaçamento de S_1 e S_2 pode ser calculado pela fórmula*

$$lk(S_1, S_2) = \frac{(-1)^{k_1}}{a_n} \int_{p \in S_1} \int_{q \in S_2} \frac{(q-p) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|y-x\|^n} vol(p) vol(q). \qquad (6\text{-}5)$$

Prova: A fórmula (6-2) afirma que $\tau = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^n} dx_1..\widehat{dx_i}..dx_n$. Agora, sendo $f(x,y) = y - x$ temos que

$$f^*(\tau) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} (dy_1 - dx_1)(dy_2 - dx_2)..(\widehat{dy_i - dx_i})..(dy_n - dx_n).$$

Por outro lado, localmente os sistemas de coordenadas $(t_1, .., t_{k_1})$ de S_1 e $(r_1, .., r_{k_2})$ de S_2 originam o sistema de coordenadas $(t_1, .., t_{k_1}, r_1, .., r_{k_2})$ de $S_1 \times S_2$. Notemos que $dx_i = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\partial x_i}{\partial t_i} dt_i$ e $dy_i = \sum_{i=1}^{k_1} \frac{\partial y_i}{\partial r_i} dr_i$. Seja base $\beta = \{dr_1, .., dr_{k_2}, dt_1, ..dr_{k_2}\}$ então as coordenadas de $dy_i - dx_i$ na base β são

$$(dy_i - dx_i)_\beta = (\frac{\partial y_i}{\partial r_1}, .., \frac{\partial y_i}{\partial r_2}, \frac{\partial x_i}{\partial t_1}, .., \frac{\partial x_i}{\partial t_{k_1}}).$$

Usando a fórmula (2-2) temos que

$$\begin{aligned} f^*(\tau) &= \left\{ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{y_i - x_i}{\|y-x\|^n} [(dy_1 - dx_1)_\beta, (dy_2 - dx_2)_\beta..(\widehat{dy_i - dx_i})_\beta..(dy_n - dx_n)_\beta] \right\}. \\ &\quad .dr_1..dr_{k_2} dt_1..dt_{k_1}, \end{aligned}$$

onde o pontinho na primeira e segunda linha significa continuação da fórmula. O cálculo de um determinante pelo método de cofatores com respeito a primeira linha implica que

$$f^*(\tau) = \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 - dx_1)_\beta), .., (y_n - x_n, (dy_n - dx_n)_\beta)]}{\|y-x\|^n} dr_1..dr_{k_2} dt_1..dt_{k_1},$$

onde cada $(y_i - x_i, (dy_i - dx_i)_\beta)$ está sendo considerada vetor coluna. Notemos que as k últimas linhas são $-\frac{\partial x}{\partial t_1}, .., -\frac{\partial x}{\partial t_{k_1}}$. Então

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 + dx_1)_\beta), .., (y_n - x_n, (dy_n + dx_n)_\beta)]}{\|y-x\|^n} dr_1..dr_{k_2} dt_1..dt_{k_1},$$

Agora, aplicando a propriedade anticomutativa do determinante com respeito

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

as linhas e sabendo que $dr_1..dr_{k_2}dt_1..dt_{k_1} = (-1)^{k_1k_2}dt_1..dt_{k_1}dr_1..dr_{k_2}$ temos

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, (dy_1 + dx_1)_{\beta'}), .., (y_n - x_n, (dy_n + dx_n)_{\beta'})]}{\|y - x\|^n} dr_1..dr_{k_2}dt_1..dt_{k_1},$$

onde $\beta' = \{dt_1, .., dt_{k_1}, dr_1, .., dr_{k_2}\}$. Escrevendo o determinante por linhas temos que

$$f^*(\tau) = (-1)^k \frac{[(y_1 - x_1, .., y_n - x_n), \frac{\partial x}{\partial t_1}..\frac{\partial x}{\partial t_{k_1}}, \frac{\partial y}{\partial r_1}, .., \frac{\partial y}{\partial r_{k_2}}]}{\|y - x\|^n} dr_1..dr_{k_2}dt_1..dt_{k_1}.$$

Finalmente usando a fórmula (2-17) obtemos o resultado desejado. □

Exemplo 6.3 *Sejam S_i, $i = 1, 2$ curvas fechadas e disjuntas em $\mathbb{R}^3$, onde $k_1 = k_2 = 1$. Seja $\alpha_i : [0, T_i] \to \mathbb{R}^3$ a parametrização de S_i. Denotemos por $\dot{\alpha}_i$, $i = 1, 2$, ao vetor tangente $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t_i}$. Logo $N_i = \frac{\dot{\alpha}_i}{\|\alpha_i\|}$ e $vol_i = \|\dot{\alpha}_i\|dt_i$. Então*

$$\begin{aligned} lk(S_1, S_2) &= \frac{-1}{4\pi} \int_{p \in S_1} \int_{q \in S_2} \frac{(q - p) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|p - q\|^3} vol(p)vol(q) \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \frac{(\alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1)) \times \frac{\dot{\alpha}_1(t_1)}{\|\dot{\alpha}_1(t_1)\|} \cdot \frac{\dot{\alpha}_2(t_2)}{\|\dot{\alpha}_2(t_2)\|}}{\|\alpha_2(t_2) - \alpha_1(t_1)\|^3} \|\dot{\alpha}_1\|\|\dot{\alpha}_2\|dt_1dt_2 \\ &= \frac{-1}{4\pi} \int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \frac{(\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)) \times \dot{\alpha}_1(t_1) \cdot \dot{\alpha}_2(t_2)}{\|\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t_2)\|^3} dt_1dt_2 \end{aligned}$$

Esta é a conhecida formula de Gauss para o índice de enlaçamento de duas curvas fechadas. □

Observação 6.4

Sejam $X(t_1, .., t_{k_1})$, $(t_1, .., t_{k_1}) \in [0, T^1] \times .. \times [0, T^{k_1}]$ e $Y(r_1, .., r_{k_2})$, $(r_1, .., r_{k_2}) \in [0, R^1] \times .. \times [0, R^{k_2}]$ parametrizações de S_1 e S_2, respectivamente. Por (3-3) temos que

$$\frac{\partial X}{\partial t_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial X}{\partial t_{k_1}} = \sqrt{\bar{g}_1} N_1 \ ; \qquad \frac{\partial Y}{\partial r^1} \wedge .. \wedge \frac{\partial Y}{\partial t^{k_2}} = \sqrt{\bar{g}_2} N_2.$$

e por (3-4)temos que

$$dt_1..dt_{k_1} = \sqrt{\bar{g}_1} vol_1 \ ; \qquad dr_1..dr_{k_2} = \sqrt{\bar{g}_2} vol_2.$$

Então usando a fórmula (2-18) podemos localmente escrever

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$a_n(-1)^{k_1} lk(S_1, S_2)$ como

$$\int_0^{R^{k_2}} .. \int_0^{R^1} \int_0^{T^{k_1}} .. \int_0^{T^1} \frac{\left[X - Y, \frac{\partial X}{\partial t_1}, .., \frac{\partial X}{\partial t_{k_1}}, \frac{\partial Y}{\partial r_1}, .., \frac{\partial Y}{\partial r_{k_2}}\right]}{\|X - Y\|^n} d\mu_1 d\mu_2, \quad (6\text{-}6)$$

onde $d\mu_1 = dt_1..dt_{k_1}$ e $d\mu_2 = dr_1..dr_{k_2}$. $\square$.

Continuemos agora para o caso de M ser uma variedade riemanniana compacta e sem bordo. Sendo S_i sem bordo, a aplicação linear $[\alpha] \mapsto \int_{S_i} \alpha$ está bem definida sobre $H^k(M)$. A dualidade de Poincaré garante que $H^{n-k_i}(M) = (H^{k_i}(M))^*$, logo existe $[\eta_i] \in H^{n-k_i}(M)$, chamado o dual de Poincaré de S_i, tal que toda k-forma fechada $\alpha \in E^k(M)$ satisfaz $\int_{S_i} \alpha = \int_M \alpha \wedge \eta_i$. Agora, como existe $\widetilde{S}_i$ tal que $\partial \widetilde{S}_i = S_i$, temos

$$\int_{S_i} \alpha = \int_{\partial \widetilde{S}_i} \alpha = \int_{\widetilde{S}_i} d\alpha = 0.$$

Assim, $[\eta_i] = 0$, isto é, η_i é exata. Escolhamos vizinhanças tubulares W_i de S_i tal que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Podemos escolher representantes η_i do dual de Poincaré de S_i tal que o suporte de η_i está contido em W_i. Podemos mostrar que se α_1 é uma forma diferencial que satisfaz $d\alpha_1 = \eta_1$ então

$$lk(S_1, S_2) = \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2.$$

De fato, W_2 pode ser escolhida sendo um fibrado normal de S_2 e o dual de Poincaré η_2 de S_2 pode ser escolhida como uma $(n - k_2)$-forma diferenciável fechada que representa a classe de Thom de S_2 em W_2. Seja U_1 um fibrado normal de $\widetilde{S}_1$, onde $\widetilde{S}_1$ é qualquer sub-variedade singular tal que $\partial \widetilde{S}_1 = S_1$, então podemos escolher por α_1 a classe de Thom de $\widetilde{S}_1$ em U_1. Então o produto exterior $\alpha_1 \wedge \eta_2$ representa a classe de Thom de $\widetilde{S}_1 \cap S_2$ em $U_1 \cap W_2$. A classe de Thom $\theta \in E^n(M)$ de um ponto satisfaz $\int_{supp(\theta)} \theta = 1$ Como $\widetilde{S}_1 \cap S_2$ é um conjunto finito de pontos temos que

$$\begin{aligned} \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 &= \int_{V_p} \varphi(\widetilde{S}_1 \cap S_2) = \sum_{p \in \widetilde{S}_1 \cap N_2} \pm 1 \\ &= lk(S_1, S_2) \end{aligned}$$

Outro fato importante é que a escolha da classe de Thom η_2 tem integral $+1$ sobre cada fibra da vizinhanca W_i que é isomorfa a um disco D_ϵ . Assim

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$\int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{W_2} \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{p \in S_2} \alpha_1 \int_{D_\epsilon} \eta_2.$$

Portanto

$$\int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 = \int_{S_2} \alpha_1. \tag{6-7}$$

6.2 Formas de Enlacamento

Definição 6.5 *Uma forma de enlaçamento em M é uma forma dupla L em $M \times M$ tal que para duas subvariedades disjuntas e fechadas $S_1^{k_1}, S_1^{k_1}$, $k_1 + k_2 = n-1$ ambas sem bordo e de homologia nula, a seguinte igualdade se satisfaz*

$$lk(S_1, S_2) = \int_{S_1} \int_{S_2} L.$$

Por exemplo em $\mathbb{R}^n$, se $v_1^1, v_2^1, .., v_{k_1}^1 \in T_pS_1$ e $v_1^2, v_2^2, .., v_{k_2}^2 \in T_qS_2$ Podemos definir $L_{\mathbb{R}^n}$ por

$$L_{\mathbb{R}^n}(v_1^1, v_2^1, .., v_{k_1}^1, v_1^2, v_2^2, .., v_{k_2}^2) = \frac{1}{a_n} \frac{[p-q, v_1^1, v_2^1, .., v_{k_1}^1, v_1^2, v_2^2, .., v_{k_2}^2]}{\|p-q\|^n}.$$

No caso de M ser uma variedade riemanniana compacta sem bordo uma forma de enlaçamento é construída como segue:

Pelo teorema de decomposição de Hodge, cada $\alpha \in E^k(M)$ pode ser escrita de forma única como

$$\alpha = d\partial(G\alpha) + \partial d(G\alpha) + H(\alpha), \tag{6-8}$$

onde d é o operador diferencial, $\partial = *d*$ é o operador codiferencial, H é o operador de projeção na parte harmônica da k-forma e G é o operador de Green. Nesta formula as componentes são ortogonais entre si na métrica

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta.$$

O operador de Green é definida por $G(\alpha) = \omega - H(\omega)$, onde ω é solução da equação $\triangle\omega = \alpha - H(\alpha)$. O operador de Green também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G(\alpha)(x) &= \int_M \alpha \wedge *_y g(x,y)\beta \\ &= \langle \alpha, g(x, \cdot) \rangle, \end{aligned}$$

onde $g(x,y)$, chamado o núcleo de G, é uma forma dupla em $M \times M$ a qual é suave fora da diagonal e tem polo de ordem $n-2$ ao longo da diagonal.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Denotemos por w_y o operador linear que age sobre o espaço das formas duplas decomponiveis $w_y(\alpha(x) \wedge \beta(y)) = (-1)^{k(n-k)}\alpha(x) \wedge \beta(y)$ sempre que $\beta(y) \in E^k(M)$.

Proposição 6.6 *A forma dupla* $L := w_y(*_y d_y g(x,y))$ *é uma forma de enlaçamento em* M*.* L *tem singularidade* $r(x,y)^{1-n}$ *ao longo da diagonal e é suave fora dela, onde* r *é a função distancia riemanniana. Alem disso, para cada* k*-forma* α *existe uma* $(k-1)$*-forma* h *tal que*

$$\int_{y\in M} L(x,y) \wedge d\alpha(y) \quad = \quad \alpha(x) - H(\alpha)(x) + dh(x). \tag{6-9}$$

Prova. O operador G comuta com d e ∂, logo por (5.3) temos

$$\begin{aligned} G(\partial d\alpha)\alpha &= \alpha - H(\alpha)d(-\partial(G\alpha)) \\ &= \alpha - H(\alpha) + dh \end{aligned}$$

Por outro lado, ∂ é operador adjunto de d na métrica $\langle\ ,\ \rangle$, logo temos

$$\begin{aligned} G(\partial d\alpha) &= \langle \partial d\alpha, g(x,\cdot)\rangle = \langle d\alpha, dg(x,\cdot)\rangle \\ &= \int_M d\alpha \wedge *_y d_y g(x,y) = \int_M w_y *_y d_y g(x,y) \wedge \alpha \\ &= \int_M L(x,y) \wedge \alpha \end{aligned}$$

Agora, mostraremos que $L(x,y)$ é uma forma de enlaçamento em M. Seja $\epsilon > 0$ e denotemos por $D_\epsilon^{n-k_1}$ a bola de raio ϵ em $\mathbb{R}^{n-k_1}$. Se o fibrado normal de S_i em M é trivial, podemos tomar W_i como a imagem de $S_i \times D_\epsilon^{n-k_i}$ pelo difeomorfismo dado pela aplicação exponencial geodésica restrita ao fibrado normal de S_i em M. As coordenadas compatíveis com estes produtos serão denotadas por (p,a) e (q,b) para W_1 e W_2 respectivamente. Escolhendo as classes de Thom como representantes, no fibrado respectivo, do dual de Poincaré η_i de S_i com $supp(\eta_i) \subset (W_i)$ temos para cada $p \in W_i$

$$\int_{p\times D_\epsilon^{n-k_1}} exp^*\eta_i = 1.$$

Então, se α_1 é primitiva de η_1, por (5.4) temos

$$\begin{aligned} lk(S_1,S_2) &= \int_M \alpha_1 \wedge \eta_2 \\ &= \int_{x\in M} (H(\alpha_1)(x) - dh(x) + \int_{y\in M} L(x,y) \wedge \eta_1) \wedge \eta_2(x). \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

As integrais

$$\int_M H(\alpha_1) \wedge \eta_2 \text{ e } \int_M dh \wedge \eta_2$$

se anulam pelo teorema de Stokes já que η_2 é exata e $dH(\alpha_1) = 0$. Como η_i tem suporte em W_i obtemos

$$lk(S_1, S_2) \quad = \quad \int_{x \in W_2} (\int_{y \in W_1} L(x, y) \wedge \eta_1) \wedge \eta_2(x)$$

Como W_1 e W_2 sao disjuntas, $L(x, y)$ é suave em W_2. Para ϵ suficientemente pequeno

$$\begin{aligned} lk(S_1, S_2) &= \int_{(q,b) \in W_2} (\int_{(p,a) \in W_1} (L((p, 0), (q, 0)) + O(\epsilon)) \wedge \eta_1) \wedge \eta_2(x) \\ &= \int_{(q,b) \in W_2} (\int_{p \in S_1} (L(p, (q, 0)) + O(\epsilon))) \wedge \eta_2(x) \\ &= \int_{q \in S_2} \int_{p \in S_1} L(p, q) + O(\epsilon) \end{aligned}$$

Como ϵ pode ser arbitrariamente pequeno, segue o resultado.

No caso em que o fibrado normal de S_i não é trivial, uma calculação semelhante, onde W_i é a imagem pela aplicação exponencial dos vetores normais a de norma menor ou igual a ϵ, dá o mesmo resultado. □

6.3
Índice de enlaçamento para ciclos singulares em M

Podemos estender o índice de enlaçamento a cadéias e ciclos singulares em M. Lembremos que um k-simplexo singular em M é uma aplicação $\sigma : \triangle_k \to M$, a qual podemos supor suave sem perda de generalidade, onde $\triangle_k$ é o k simplexo canônico, o menor conjunto convexo que comtém os pontos $e_1, e_2, .., e_{k+1}$ da base canônica em $\mathbb{R}^{k+1}$. Uma k-cadeia é uma combinação linear $c = \sum i = 1^l a_i \sigma_i$, de um número finito de k-simplexos $\sigma_1, \sigma_2, ..\sigma_l$ em M com coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$. O bordo ∂c de uma k-cadeia c é uma $(k-1)$-cadéia (vide [BT], §15, para a definição), e c é um k-ciclo se $\partial c = 0$.No caso de um k-simplexo $\sigma : \triangle_k \to M$, definimos $\dfrac{\partial}{\partial t_i} := \dfrac{\partial F}{\partial t_i}$. Seja g a métrica em M. Se $g_{ij} = g(\dfrac{\partial}{\partial t_i}, \dfrac{\partial}{\partial t_j})$ e $\bar{g} = det[g_{ij}]$ então definimos como no caso de variedades

$$vol = \sqrt{\bar{g}} dt_1..dt_k, \tag{6-10}$$

uma k-forma singular a qual chamaremos a forma de volume singular em C. Agora, se para cada $p \in C$ aplicarmos Gram-Schmidt a $\{\dfrac{\partial}{\partial t_1}(p), .., \dfrac{\partial}{\partial t_k}(p)\}$ obtemos $\{X_1(p), .., X_k(p)\}$ (possivelmente algum $X_i(p)$ nulo), que será chamado

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

de sistema ortonormal singular em C e definiremos o k-campo unitário singular por $N := X_1 \wedge .. \wedge X_k$. Notemos como no caso de variedades que

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} = \sqrt{\bar{g}} N$$

Sejam C_1 um k-ciclo e C_2 um s-ciclo em M, onde $r + s = n - 1$, e suponha que sejam disjuntas . Se C_1 e C_2 são de homologia nula então podemos definir o índice de enlaçamento de C_1 e C_2 pela integral

$$lk(C_1, C_2) = \int_{x \in C_1} \int_{y \in C_2} L_{(x,y)}.$$

Este índice de enlaçamento coincide com o usual sempre que C_1 e C_2 sejam sub-variedades orientadas em M. Agora, suponha que $M = \mathbb{R}^n$ e sejam N_1 e N_2 o k-campo unitário singular em C_1 e o s-campo unitário singular em C_2, respectivamente. Então como no caso de sub-variedades em $\mathbb{R}^n$ podemos definir

$$\begin{aligned} lk(C_1, C_2) &= \int_{p \in C_1} \int_{q \in C_2} L_{(p,q)} \\ &= \int_{p \in C_1} \int_{q \in C_2} \frac{(p-q) \times N_1(p) \cdot N_2(q)}{\|p-q\|^n} vol_p vol_q. \end{aligned} \tag{6-11}$$

A integral está bem definida porque o conjunto onde cada N_i se anula é mensurável.

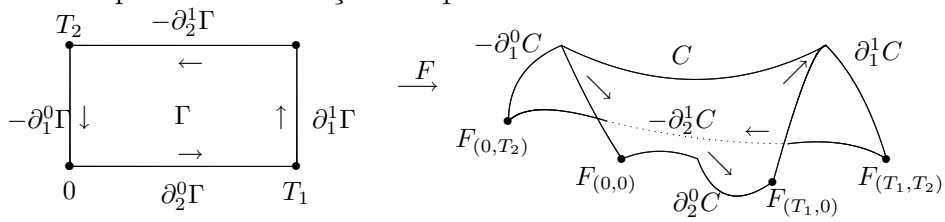
Para finalizar este capítulo definiremos classes especiais de cadeias singulares e criaremos uma notação propria para estes já que serão de muita importancia no proximo capítulo para poder definir o índice de enlaçamento assintótico para ações que preservam volume numa variedade riemanniana.

Chamaremos de k-retângulo canónico a qualquer k-retângulo da forma $\Gamma = [0, T_1] \times .. \times [0, T_k]$ que será denotada por Γ. Denotaremos por $\widehat{\Gamma}^i$ ao $(k-1)$- retângulo $[0, T_1] \times ..\widehat{[0, T_i]}.. \times [0, T_k]$. As faces de Γ serão definidas pelas aplicações $(t_1, .., t_{i-1}, t_{i+1}, .., t_k) \mapsto (t_1, .., t_{i-1}, 0, t_{i+1}, .., t_k)$ e $(t_1, .., t_{i-1}, t_{i+1}, .., t_k) \mapsto (t_1, .., t_{i-1}, T_i, t_{i+1}, .., t_k)$ de $\widehat{\Gamma}^i$ em Γ e serão denotadas por $\partial_{i_0}\Gamma$ e $\partial_{i_1}\Gamma$, respectivamente. Uma aplicação suave $F : \Gamma \to M$ será chamada de k-retângulo singular em M e as restrições de F a $\partial_i^0\Gamma$ e a $\partial_i^1\Gamma$ serão chamadas de i_0-bordo de C e de i_1-bordo de C e denotadas por $\partial_{i_0}C$ e $\partial_{i_1}C$, respectivamente. Uma k-cadeia singular da forma $\sum_{i=1}^m a_i C_i$, onde C_i é um k retângulo singular em M, será chamada de k-cadeia retângulo singular em M. Se C é um k-retângulo singular em M o bordo de C será a $(k-1)$-cadeia retângulo $\partial C = \sum_{i=1}^k (-1)^i (\partial_i^0 C - \partial_i^1 C)$. Duas aplicações suaves do tipo $F : \Gamma_1 \to M$ e $G : \Gamma_2 \to M$, onde Γ_i é k-retângulo canónico, representam o

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

mesmo k-retângulo singular em M si existe difeomorfismo $\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ que preserva orientação tal que $G \circ \theta = F$.



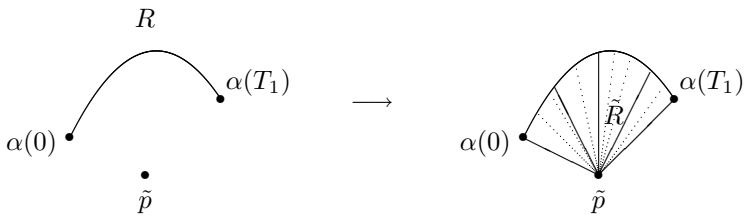
k=2, Γ um retangulo e C um 2-retângulo singular.

Seja R um k-retângulo singular definida por $F : \Gamma \to \Omega^n$, onde Ω é uma região compacta e convexa em $\mathbb{R}^n$ O cone $\mathcal{C}(R)$ gerado por R de vértice $\tilde{p} \in \Omega^n$ é o $(k+1)$-retângulo singular em M definida pela aplicação

$$\begin{array}{rcrcl} \widetilde{F} & : & [0,T_1] \times .. \times [0,T_s] \times [0,1] & \to & \Omega^n \\ & & (t_1,..,t_k,t) & \mapsto & (1-t)F(t_1,..,t_k) + t\tilde{p} \end{array}$$

Como Ω^n é convexa, segue-se que $\widetilde{F}$ está bem definida. Agora, se $C = \sum_{i=1}^{m} a_i C_i$ é uma s-cadeia tal que cada C_i é um k-retângulo singular então a pirâmide gerado por C de vértice $\tilde{p}$ é a $(k+1)$-cadeia retângulo $\mathcal{C}(C) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathcal{C}(C_i)$.

Exemplo 6.7



Naturalmente, $\mathcal{C}(0) = 0$. Em particular, se R é um k-retângulo então não é dificil mostrar que

$$\partial\mathcal{C}(R) = (-1)^{k+1}(R - \tilde{p}) + \mathcal{C}(\partial R), \tag{6-12}$$

onde $\tilde{p}$ é o k-retângulo constante e $\mathcal{C}(R)$ é a pirâmide gerada por ∂R. Em particular, se ∂R é o bordo do k-retângulo R então $\partial(\mathcal{C}(\partial R)) = (-1)^k \partial R$, como veremos a seguir. De fato, sendo $\partial R = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\partial_i^0 R - \partial_i^1 R]$ temos que

$$\mathcal{C}(\partial R) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\mathcal{C}(\partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial_i^1 R)].$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

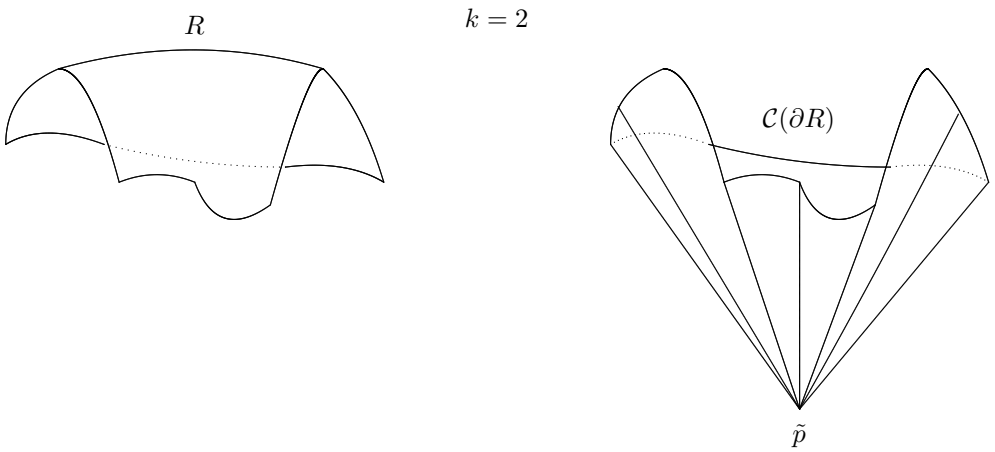
Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Logo, pela linearidade de ∂ temos

$$\partial(\mathcal{C}(\partial R)) = \sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\partial\mathcal{C}(\partial_i^0 R) - \partial\mathcal{C}(\partial_i^1 R)]\}.$$

Agora, sabendo que $\partial_i^j R$ é um $(k-1)$-retângulo temos pela fórmula (6-12)

$$\begin{aligned}
\partial(\mathcal{C}(\partial R)) &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left[(-1)^k\left(\partial_i^0 R - \tilde{p}\right) + \mathcal{C}(\partial\partial_i^0 R) - (-1)^k\left(\partial_i^1 R - \tilde{p}\right) - \mathcal{C}(\partial\partial_i^1 R)\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}(-1)^i\left[(-1)^k\left(\partial_i^0 R - \tilde{p} - \partial_i^1 R + \tilde{p}\right) + \mathcal{C}(\partial\partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial\partial_i^1 R)\right] \\
&= (-1)^k\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\partial_i^0 R - \partial_i^1 R]\right) + \sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\mathcal{C}(\partial\partial_i^0 R) - \mathcal{C}(\partial\partial_i^1 R)] \\
&= (-1)^k\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\partial_i^0 R - \partial_i^1 R]\right) + \mathcal{C}\left(\partial\left(\sum_{i=1}^{k}(-1)^i[\partial_i^0 R - \partial_i^1 R]\right)\right) \\
&= (-1)^k\partial R + \mathcal{C}(\partial^2(R)) \\
&= (-1)^k\partial R.
\end{aligned}$$



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

7
Índice de Enlaçamento Assintótico para Ações de $\mathbb{R}^k$ em Variedades Riemannianas

Sejam M uma variedade riemanniana compacta, orientada e $L_{(x,y)}$ a forma dupla de enlaçamento nesta variedade como foi definida na seção anterior. Neste capítulo usaremos $L_{(x,y)}$ para definir índices de enlaçamento associadas a ações de $\mathbb{R}^k$ de difeomorfismos que preservam volume em M. Os objetos geométricos que enlaçaremos serão geradas pelas órbitas da ação. Consideraremos estes objetos sendo k-cádeias singulares em M, já que uma órbita de uma ação não está necessariamente imersa em M.

7.1
Índice de Enlaçamento Assintótico de uma Ação de $\mathbb{R}^k$ e uma sub-variedade

Seja M uma n-variedade riemanniana compacta, orientada, completa com $H_k(M) = \{0\}$. Sejam Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M de difeomorfismos que preservam volume e S uma sub-variedade de M de dimensão s, fechada, sem bordo e de homologia nula, $k + s = n - 1$. Para cada ponto $q \in N$ existe uma única órbita que passa por q e como cada órbita de Φ é uma variedade imersa em M de dimensão menor ou igual a k, temos que o conjunto de pontos cujas órbitas interceptam S é de medida nula em M. Logo, cada p no complemento deste conjunto de medida nula tem sua órbita enlaçando-se em torno de S. Assim, é natural pensar em definir, se é possível, um índice que meça o enlaçamento das órbitas de Φ com a sub-variedade S. No que segue, cada k-uplo $(T^1, .., T^k) \in (\mathbb{R}_+)^k$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ será relacionado o k-retângulo canónico $\Gamma = [0, T^1] \times .. \times [0, T^k]$. A órbita de Φ de período Γ que passa por $p \in M$, isto é $\{\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p); (t_1, .., t_k) \in \Gamma\}$, será denotada por $\vartheta_{(p,\Gamma)}$ e considerada um k-retângulo singular em M.

Seja Σ_k um conjunto de k-cadéias singulares em M satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada $\vartheta_{(p,\Gamma)}$ existe uma única $\sigma_{(p,\Gamma)}$ em Σ_k tal que $\partial\vartheta_{(p,\Gamma)} = \partial\sigma_{(p,\Gamma)}$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

2. Existe subconjunto $\Theta \subset (\mathbb{R}^*)^n$ mensurável, cujo complemento tem medida nula, tal que para cada $(T^1, T^2, .., T^k) \in \Theta$ o conjunto

$$O_\Gamma := \{p \in M;\ \sigma_{(p,\Gamma)} \cap S \neq \emptyset\}$$

tem medida nula em M.

3. As $\sigma_{(p,\Gamma)}$ em Σ_k variam continuamente em medida no sentido de que para cada $(T^1, T^2, .., T^k) \in \Theta$ a função $h_\Gamma : M \to \mathbb{R}$, definida por

$$h_\Gamma(p) = \frac{1}{T^1..T^k} \int_{x \in \sigma_{(p,T)}} \int_{y \in S} L(x, y),$$

é uma função em $L_1(M)$,isto é, $\int_{p \in M} |h_\Gamma(p)| vol < \infty$.

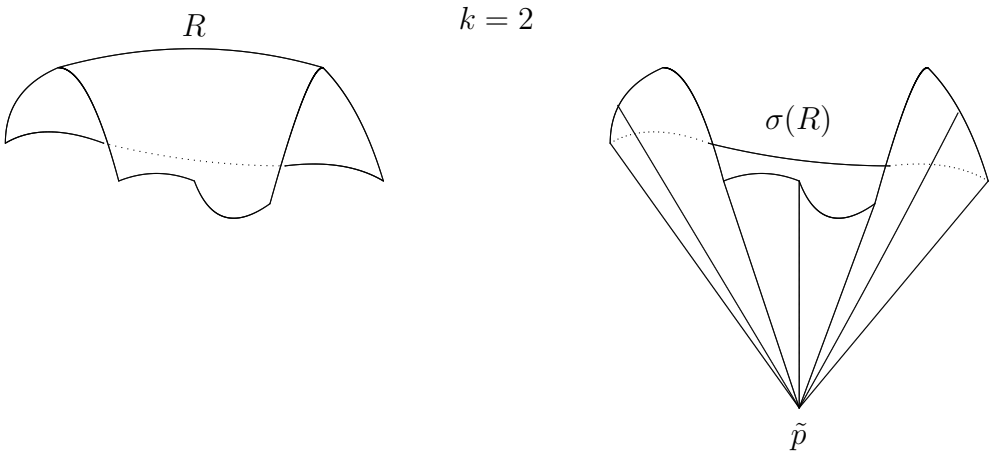
4. A família de funções $\{h_\Gamma\}$ converge em $L_1(M)$ para a função identicamente nula, isto é,

$$\lim_{T^1,..,T^k \to \infty} \int_{p \in M} |h_\Gamma(p)| vol = 0. \qquad \square$$

Definição 7.1 *Todo conjunto Σ de k-cadeias singulares em M que satisfaz as condições 1,2,3 e 4 anteriores será chamado de sistema de k-volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S.*

Enlacamentos na bola unitária Ω^n

Seja Ω^n a bola unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e fixemos o ponto $\tilde{p} \in \Omega^n$. Para cada k-retângulo singular R em Ω^n definiremos a k-cadeia singular $\sigma(R) := (-1)^k \mathcal{C}(\partial R)$ sendo a pirámide gerada por ∂R de vértice $\tilde{p}$, como foi definida na última seção.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Definamos $\Sigma(\tilde{p}) := \{\sigma(R)\ ; R$ é um k-retângulo singular em $\Omega^n\}$. Chamaremos este conjunto de k-cadéias estreladas com vértice em $\tilde{p}$.

Teorema 7.2 *Seja $\tilde{p}$ um ponto no complemento de S em Ω^n. Então $\Sigma(\tilde{p})$ é um sistema de k-volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S. $\Sigma(\tilde{p})$ independe de Φ.*

Prova: Sejam $p \in \Omega^n$ e Γ um k-retângulo canônico quaisquer.

1. Como $\vartheta_{(p,\Gamma)}$ é um k-retângulo singular em Ω^n, temos que $\sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)}) \in \Sigma(\tilde{p})$. Por construção $\partial\mathcal{C}(\partial\vartheta_{(p,\Gamma)}) = (-1)^k\partial(\vartheta_{(p,\Gamma)})$. Logo, se $\sigma_{(p,\Gamma)} := \sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)})$, então por definição de $\sigma(\vartheta_{(p,\Gamma)})$ temos que

$$\partial\sigma_{(p,\Gamma)} = (-1)^k\partial\mathcal{C}(\partial\vartheta_{(p,\Gamma)}) = \partial\vartheta_{(p,\Gamma)}.$$

Assim $\Sigma(\tilde{p})$ satisfaz a propriedade 1.

Para provar que $\Sigma(p)$ satisfaz as condições 2,3 e 4, sendo

$$\sigma_{(p,\Gamma)} = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}(\mathcal{C}(\partial_i^0\vartheta_{(p,\Gamma)}) - \mathcal{C}(\partial_i^1\vartheta_{(p,\Gamma)}))$$

mostraremos que estas condições são satisfeitas para cada família $\mathcal{C}(\partial_i^j\vartheta_{(p,\Gamma)})$. Neste caso, será suficiente mostrar para uma única família, já que o resto se mostra de maneira análoga. Em particular, seja $\sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} := \mathcal{C}(\partial_k^0\vartheta_{(p,\Gamma)})$ a pirámide gerada por $\partial_k^0\vartheta_{(p,\Gamma)}$ de vertice $\tilde{p}$, isto é, a k-cadeia definida pela aplicação $F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} : \widehat{\Gamma}^k \times [0,1] \to \Omega^n$,

$$F_{(p,\Gamma)}^{(k,0)}(t_1,..,t_{k-1},u) = (1-u)\Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}(p) + u\tilde{p}.$$

2. Fixemos $\vec{t} = (t_1,..,t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k$ e definamos a homotopia

$$H_{\vec{t}}^u := (1-u)H_{\vec{t}}^0 - uH_{\vec{t}}^1,\ t \in [0,1],$$

onde $H_{\vec{t}}^0 := \Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}$ e $H_{\vec{t}}^1(p) = \tilde{p}$, $\forall p \in \Omega^n$. Seja $O_\Gamma^{(k,0)} := \{p \in \Omega^n;\ \sigma_{(p,\Gamma)}^{(k,0)} \cap S \neq \emptyset\}$. Notemos que

$$O_\Gamma^{(k,0)} = \{(H_{\vec{t}}^u)^{-1}(S);\ (t_1,..,t_{k-1},t) \in \widehat{\Gamma}^k \times [0,1) \subset \mathbb{R}^k\}.$$

Sendo $(H_{\vec{t}}^u)^*(vol) = (1-u)vol$, já que $\Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}$ preserva volume, então $(H_{\vec{t}}^u)^{-1}(S)$ é uma s-subvariedade em Ω. Assim, $O_\Gamma^{(k,0)}$ tem no máximo dimensão $k+s = n-1$. Logo, $O_\Gamma^{(k,0)}$ tem medida nula em Ω^n, mostrando assim a propriedade 2 e neste caso $\Theta = (\mathbb{R}_+)^k$.

3. Seja $(t_1,..,t_{k-1},u) \in \widehat{\Gamma}^k \times [0,1]$. Notemos que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(t_1,..,t_{k-1},u)-F^{(k,0)}_{(q,\Gamma)}(t_1,..,t_{k-1},u)\| \leq \|\Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}(p)-\Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}(q)\|.$$

Logo, sendo Φ uma aplicação suave e considerando em $C^\infty(\widehat{\Gamma}^k \times [0,1], \Omega^n)$ a topologia induzida pela norma do supremo temos que $p \mapsto F_{(p,\Gamma)}$ é uma aplicação contínua de Ω^n em $C^\infty(\widehat{\Gamma}^k \times [0,1], \Omega^n)$. Disto e sendo $L_{(x,y)}$ suave no complemento da diagonal $\{(q,q);\ q \in \Omega^n\}$ em $\Omega^n \times \Omega^n$ temos

$$h^{(k,0)}_\Gamma(p) := \frac{1}{T^1..T^k}\int_{x\in\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S} L_{(x,y)}$$

é continua no complemento de $O^{(k,0)}_\Gamma$ que tem medida nula. Assim, $h^{(k,0)}_\Gamma$ pode ser considerada uma função mensurável de domínio Ω^n.

Agora, mostraremos que $\int_{p\in\Omega^n}|h^{(k,0)}_\Gamma(p)|vol < \infty$. Seja $X = (X^1, X^2, .., X^k) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_k$, como definido no capítulo 3, tal que $A(X) = \Phi$. Notemos que $\dfrac{\partial F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}{\partial t_i}(t_1,..,t_{k-1},u) = (1-u)X^i(\Phi_{(t_1,..,t_{k-1},0)}(p)),\ i = 1,..,k-1$. Sendo X^i campo vetorial definido no domínio compacto Ω^n existe A tal que $\|X^i\| \leq A,\ \forall i$. Logo $\forall i \in \{1,..,k-1\},\ \ \forall p \in \Omega^n$ e para todo Γ temos que $\|\dfrac{\partial F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}{\partial t_i}\| \leq A$ e tambem $\|\dfrac{\partial F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}{\partial u}\| \leq 2$. Como S é compacta, podemos supor que está definida por um atlas finito da forma $\{\theta_i : [0,1]^r \to S_i \subset S,\ (r^i_1,,.r^i_s) \mapsto \theta_i(r^i_1,..,r^i_s)\}_{i\in\{1,2,..,m\}}$ tal que existe $B > 0$ tal que $\|\dfrac{\partial\theta_i}{\partial r^i_j}\| \leq B,\ \forall i,j$. Seja $\{f_i : S \to [0,1]\}_{i\in\{1,2,..,m\}}$ uma partição de unidade com respeito a este atlas, note que $\|f_i\| \leq 1,\ \forall i$. Definamos

$$h^{(k,0)}_{(\Gamma,i)}(p) = \frac{1}{T^1..T^k}\int_{x\in\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S_i} f_i(y)L_{(x,y)}.$$

Então $h^{(k,0)}_\Gamma = \displaystyle\sum_{i=1}^m h^{(k,i)}_{(\Gamma,i)}$. Logo, por (6-11), (6-6) e como $\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}$ está definida por $F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}$, podemos escrever

$$h^{(k,0)}_{(\Gamma,i)}(p) = \frac{1}{T^1..T^k}\int_{\widehat{\Gamma}^i}\int_0^1\int_{(0,1)^r}\frac{f_i\left[F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta_i, \dfrac{\partial F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}{\partial t_1},..,\dfrac{\partial F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}{\partial u},..,\dfrac{\partial\theta_i}{\partial r^i_s}\right]}{\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta_i\|^n}\,d\upsilon_{k-1}du d\upsilon_r,$$

onde $d\upsilon_{k-1}$ e $d\upsilon_s$ são as formas de volume em $\mathbb{R}^{k-1}$ e $\mathbb{R}^s$, respectivamente, $F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}$ definida em $\widehat{\Gamma}^i \times [0,1]$ e $f_i,\ \theta_i$ definidas em $(0,1)^r$. Como o valor absoluto de um determinante é menor ou igual ao produto das normas de seus vetores linhas

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

e $\|f\| \leq 1$, temos que

$$\int_{p\in\Omega^n} |h^{(k,0)}_{(\Gamma,i)}(p)|\ vol \ \leq \ \frac{1}{T_1..T_k}\int_{p\in\Omega^n}(\int_{\widehat{\Gamma}^i}\int_0^1\int_{(0,1)^r}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta_i\|^{n-1}}dv_{k-1}dudv_r)\ vol.$$

Agora, para $\vec{t} = (t_1,..,t_{k-1})$ fixo a homotopia $H^t_{\vec{t}} = F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(t_1,..,t_{k-1},u)$ geometricamente deforma Ω^n no ponto $\tilde{p}$. Como $\tilde{p}$ não pertence a S, existem $\delta_i \in (0,1]$ e uma constante $D_i > 0$ tal que $\forall p \in \Omega^n,\ \forall q \in S$ temos que

$$\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(t_1,..,t_{k-1},u) - q\| \geq D_i \quad ,\ \forall (t_1,..,t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k,\ \forall u \in [\delta,1].$$

Daqui, segue que

$$\begin{aligned} I_1 \ &:= \ \frac{1}{T_1..T_k}\int_{p\in\Omega^n}(\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{\delta_i}^1\int_{[0,1]^r}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta_i\|^{n-1}}dv_{k-1}dudv_r)\ vol. \\ &\leq \ \frac{1}{T_1..T_k}\int_{p\in\Omega^n}(\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{\delta_i}^1\int_{[0,1]^r}\frac{2A^{k-1}B^r}{D_i^{n-1}}dv_{k-1}dudv_r)\ vol \\ &= \ \frac{2A^{k-1}B^r vol(\Omega^n)}{D_i^{n-1}T_k} \end{aligned}$$

Agora, notemos que para cada $q \in \Omega^n$ a função $p \mapsto \dfrac{1}{\|p-q\|^{n-1}}$ é integrável. Portanto, a função definida em Ω^n por $q \mapsto \displaystyle\int_{p\in\Omega^n}\frac{1}{\|p-q\|^{n-1}}\ vol$ é continua. Logo, existe constante $E > 0$ tal que

$$\int_{p\in\Omega^n}\frac{1}{\|p-q\|^{n-1}}\ vol \leq E \quad \forall q \in \Omega^n. \tag{7-1}$$

Daqui, aplicando Fubini, sendo $(H^u_{\vec{t}})^*(vol) = (1-u)vol$ e notando que $\dfrac{1}{1-u} \leq \dfrac{1}{1-\delta}$ se $0 < u \leq \delta < 1$ temos que

$$\begin{aligned} I_2 \ &:= \ \frac{1}{T^1..T^k}\int_{p\in\Omega^n}(\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_0^{\delta_i}\int_{(0,1)^r}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta_i\|^{n-1}}dv_{k-1}dudv_r)\ vol. \\ &= \ \frac{1}{T^1..T^k}\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{(0,1)^r}\int_0^{\delta_i}(\int_{p\in\Omega^n}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|H^t_{\vec{t}}(p)-\theta_i\|^{n-1}}vol)dudv_{k-1}dv_r \\ &= \ \frac{1}{T^1..T^k}\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{(0,1)^r}\int_0^{\delta_i}\frac{1}{(1-u)^n}(\int_{p\in\Omega^n}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|H^t_{\vec{t}}(p)-\theta_i\|^{n-1}}(H^u_{\vec{t}})^*(vol))dudv_{k-1}dv_r \\ &= \ \frac{1}{T^1..T^k}\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{(0,1)^r}\int_0^{\delta_i}\frac{1}{(1-u)^n}(\int_{p\in(H^u_{\vec{t}})_*\Omega^n}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|p-\theta_i\|^{n-1}}vol)dudv_{k-1}dv_r \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{T^1..T^k}\int_{\widehat{\Gamma}^k}\int_{(0,1)^r}\int_0^{\delta_i}\frac{2A^{k-1}B^rE}{(1-\delta_i)^n}dudv_{k-1}dv_r \\ &= \frac{2A^{k-1}B^rE}{(1-\delta_i)^nT^k} \end{aligned}$$

Como

$$I_1+I_2=\frac{1}{T^1..T^k}\int_{p\in\Omega^n}(\int_{T^{(k-1,k)}}\int_0^1\int_{[0,1]^s}\frac{2A^{k-1}B^r}{\|F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}-\theta\|^{n-1}}dv_{k-1}dudv_s)\ vol,$$

temos que

$$\int_{p\in\Omega^n}|h^{(k,0)}_{(\Gamma,i)}(p)|\ vol\leq I_1+I_2\leq\frac{2A^{k-1}B^r}{T^k}\{\frac{vol(\Omega^n)}{D_i^{n-1}}+\frac{E}{(1-\delta_i)^n}\}<\infty,\ \forall i$$

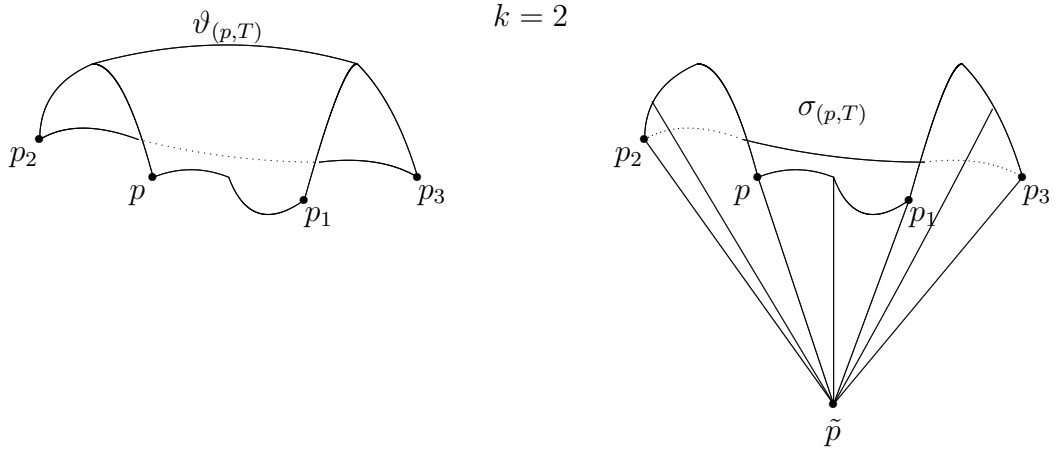
Como $\int_{p\in\Omega^n}|h^{(k,0)}_{\Gamma}(p)|vol\leq\sum_{i=1}^m\int_{p\in\Omega^n}|h^{(k,0)}_{(\Gamma,i)}(p)|vol$, temos que $\Sigma(\tilde{p})$ satisfaz a condição 3.

4. A condição 4 é satisfeita da relação

$$\int_{p\in\Omega^n}|h^{k_0}_{\Gamma}(p)|vol\leq\sum_{i=1}^m\int_{p\in\Omega^n}|h^{(k_0,i)}_{\Gamma}(p)|vol\leq\frac{2A^{k-1}B^r}{T^k}\sum_{i=1}^m\{\frac{vol(\Omega^n)}{D_i^{n-1}}+\frac{E}{(1-\delta_i)^n}\}$$

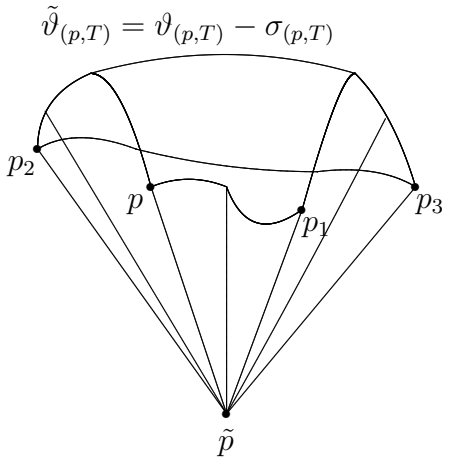
e do fato que $T^k\to\infty$. □

Pela propriedade 1 de $\Sigma(\tilde{p})$, a cada $\vartheta_{(p,T^{(k)})}$ podemos associar a k-cadeia singular sem bordo $\tilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)}:=\vartheta_{(p,\Gamma)}-\sigma_{(p,\Gamma)}$. Como $H_k(\Omega)=\{0\}$, temos que $\tilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)}$ é de homologia nula.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.



Seja $\mathcal{O} \subset \Omega^n$ o conjunto de pontos cujas órbitas interceptam S. No início desta seção vimos que $\mathcal{O}$ tem medida nula. Fixemos Γ. Seja Ω_Γ o complemento de $\mathcal{O} \cup O_\Gamma$. Para cada $p \in \Omega_\Gamma$ temos que $\widetilde{\vartheta}_{(p,\Gamma)} \cap N = \emptyset$. Logo, podemos definir em Ω_Γ a função contínua

$$lk_\Gamma(p) = \frac{1}{T^1..T^k} lk(\widetilde{\vartheta}^{\varphi}_{(}p, T), S).$$

Sendo o complemento de Ω_Γ de medida nula podemos considerar lk_Γ como uma função mensurável definida em Ω^n.

Proposição 7.3 *O limite*

$$\widetilde{lk}(p) = \lim_{T^1,..,T^k \to \infty} lk_\Gamma(p) = \lim_{T^1,..,T^k \to \infty} \frac{1}{T^1..T^k}\ lk(\widetilde{\vartheta}_{(}p, \Gamma), S)$$

existe no sentido L^1 e define uma função integrável que não depende da escolha do sistema Σ de k-volumes singulares pequenos de enlaçamento associados a Φ e S.

Prova: Sejam $X^1, .., X^k$ os campos vetoriais em Ω^n de divergência nula associados a Φ e N o s-campo unitário em S que define a sua orientação. Definamos $X := X^1 \wedge .. \wedge X^k$ k-campo em Ω^n. Para cada p no complemento de S em Ω^n definamos a s-forma suave $\alpha^{(p)}$ em S

$$(\alpha^{(p)})_q := \frac{(-1)^k}{a_n} \frac{(q-p) \times X(p) \cdot Y(q)}{\|q-p\|^n} vol_q$$

Logo, a função f definida por $f(p) := \int_S \alpha^{(p)}$ é uma função contínua no complemento de S em Ω^n. Como S tem medida nula em Ω^n a função f pode ser considerada uma função mensurável em Ω^n. Aplicando Fubini, podemos mostrar que f é uma função em $L^1(\Omega^n)$. Por outro lado, na k-cadéia $\vartheta_{(}p, \Gamma)$ temos que o i-ésimo vetor tangente coordenado $\dfrac{\partial}{\partial t_i}$ é igual a $X^i(\Phi_{(t_1,t_2,..,t_k)}(p)$,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

logo

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{\partial t_k} = X(\varphi_{(t_1,..,t_k)}(p)).$$

Lembremos que podemos definir o k-campo unitário singular $\widetilde{N}$ de $\vartheta_{(p,\Gamma)}$ pela igualdade

$$\frac{\partial}{dt_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{dt_k} = \sqrt{\bar{g}}\widetilde{N},$$

onde $\bar{g} = \|\frac{\partial}{dt_1} \wedge .. \wedge \frac{\partial}{dt_k}\|$ e $\|\widetilde{N}\| = 1$ se os $\frac{\partial}{dt_i}$ são linearmente independentes e é 0 caso contrário. Logo, pela formula (6-5) e sendo $dt_1..dt_k = \sqrt{\bar{g}}vol$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{x\in\vartheta(p,\Gamma)}\int_{q\in S} L_{(x,y)} &= \frac{(-1)^k}{a_n}\int_{x\in\vartheta(p,\Gamma)}\int_{y\in S}\frac{(q-x)\times\widetilde{N}(x)\cdot N(q)}{\|q-x\|^n}vol_x vol_q \\
&= \frac{(-1)^k}{a_n}\int_{x\in\vartheta(p,\Gamma)}\left(\int_{y\in S}\frac{(q-x)\times X(x)\cdot N(q)}{\|q-x\|^n}vol_q\right)dt_1..dt_k \\
&= \int_{x\in\vartheta_(p,\Gamma)}\int_{y\in S}\alpha^x(y))dt_1..dt_k \\
&= \int_0^{T_k}..\int_0^{T_1}\int_{y\in S}\alpha^{(\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p))}dt_1..dt_k \\
&= \int_0^{T_k}..\int_0^{T_1} f(\varphi_{(t_1,..,t_k)}(p))dt_1..dt_k.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
lk_\Gamma(p) &= \frac{1}{T_1..T_k}\int_{x\in\tilde{\vartheta}(p,\Gamma)}\int_{y\in N} L_{(x,y)} \\
&= \frac{1}{T_1..T_k}\int_{x\in\ \vartheta_{(p,\Gamma)}-\sigma_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S} L_{(x,y)} \\
&= \frac{1}{T_1..T_k}\int_{x\in\vartheta_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S} L_{(x,y)} - \frac{1}{T_1..T_k}\int_{x\in\sigma_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S} L_{(x,y)} \\
&= \frac{1}{T_1..T_k}\int_0^{T_1}..\int_0^{T_k} f(\varphi_{(t_1,..,t_k)}(p)) - \frac{1}{T_1..T_k}\int_{x\in\sigma_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in S} L_{(x,y)}.
\end{aligned}$$

Assim pelo teorema ergódico para ações, teorema 3.13, e condição 4 do sistema de k-volumes singulares pequenos de enlaçamento temos que lk_Γ converge no sentido L^1 para uma função $\tilde{lk}$ que satisfaz

$$\int_{p\in\Omega^n}\tilde{lk}\ vol = \int_{p\in\Omega^n} f(p)\ vol. \qquad \square$$

Definição 7.4 *O índice* $lk(\Phi, S) := \int_{\Omega^n}\tilde{lk}\ vol$ *será chamado o índice de enlaçamento assintótico da k-ação Φ e a subvariedade S.*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Lembremos que no capítulo 3 definimos o invariante de Hopf $I(\Phi, S) = \int_S \alpha$, onde $d\alpha = I_X vol$ e X é o k-campo associado a Φ.

Teorema 7.5 *Seja Φ uma k-ação de difeomorfismos que preservam volume em Ω^n, e S uma s-variedade compacta, sem bordo e mergulhada em Ω^n, $k + s = n - 1$. Então o índice de enlaçamento assintôtico $lk(\Phi, S)$ satisfaz*

$$lk(\Phi, S) = I(\Phi, S)$$

Prova: Sejam $X^1, .., X^k$ os campos vetoriais de divergência nula associadas a φ , $X = X^1 \wedge .. \wedge X^k$ o k-campo associado a Φ e $\eta = i_X vol$. O teorema generalizado de Biot-Savart garante que $rot(BS(X)) = X$. Pelo teorema generalizado de Biot-Savart temos que

$$X^1 \wedge .. \wedge X^k = rot(BS(X^1 \wedge .. \wedge X^k)).$$

Logo, pela definição de rotacional temos

$$d(j(BS(X))) = i_{rot(BS(X))} vol = i_X vol = \eta.$$

Logo $\alpha := j(BS(X))$ é uma forma diferencíavel que satisfaz $d\alpha = \eta$. Por teorema 4.13 e resultado do teorema anterior temos que

$$lk(\Phi, S) = \int_{p \in \Omega^n} \widetilde{lk}(p) vol = \int_{p \in \Omega^n} f(p) vol = \int_{p \in \Omega^n} (\int_S \alpha^{(p)}) vol.$$

Então, por definição da forma α^p e aplicando Fubini temos que por definição do campo $BS(X^1 \wedge .. \wedge X^k) = BS(X)$, por definição do operador j e notando que em N temos que $\alpha = \alpha(Y) vol$, temos

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{p \in \Omega^n} \int_{q \in S} \frac{(q-p) \times X(p) \cdot Y(q)}{\|q-p\|^n} vol_q vol_p \\ &= \int_{q \in S} \frac{(-1)^k}{a_n} \int_{p \in \Omega^n} (\frac{(p-q)}{\|p-q\|^n} \times X(p) vol_p) \cdot Y(q) vol_q. \end{aligned}$$

Agora, por definição do campo $BS(X)$ e definição do homomorfismo j temos que

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \int_{q \in N} BS(X)(q) \cdot Y(q) vol_q \\ &= \int_{q \in N} j(BS(X))_q (Y(q)) vol_q \end{aligned}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Logo, como $\alpha = j(BS(X))$ e notando que $\alpha(Y)vol = \alpha$ já que Y é unitário temos

$$\begin{aligned} lk(\Phi, S) &= \int_N \alpha_q(Y(q))vol_q \\ &= \int_N \alpha \end{aligned}$$

Finalmente por definição de $I(\Phi, S)$ temos que

$$lk(\Phi, S) = I(\Phi, S). \qquad \square$$

Exemplo 7.6

Sejam $X(x, y, z, w) = (y, -x, 0, 0)$ e $Y(x, y, z, w) = (0, 0, w, -z)$ campos vetoriais de divergência nula em Ω^4. Sejam

$$\varphi_s^X(x, y, z, w) = (rsin(\alpha + s), rcos(\alpha + s), z, w), \quad r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \alpha = arctan(\frac{x}{y})$$
$$\varphi_t^Y(x, y, z, w) = (x, y, lsin(\alpha + t), lcos(\beta + t)), \quad l = (z^2 + w^2)^{\frac{1}{2}} \text{ e } \beta = arctan(\frac{z}{w})$$

os fluxos de X e Y, respectivamente. Notemos que as órbitas de X e Y são fechadas e de periodo 2π. Como $[X, Y] = 0$, existe 2-ação Φ de $\mathbb{R}^2$ em Ω^4 associado a (X, Y). Observemos que Φ está definida por

$$\begin{aligned} \varphi_{(s,t)}(x, y, z, w) &= \varphi_t^Y \circ \varphi_s^X(x, y, z, w) \\ &= \varphi_t^Y(\varphi_s^X(x, y, z, w)) \\ &= \varphi_t^Y(rsin(\alpha + s), rcos(\alpha + s), z, w) \\ &= (rsin(\alpha + s), rcos(\alpha + s), lsin(\beta + t), lcos(\beta + t)). \end{aligned}$$

As orbitas de Φ são fechadas de periodo $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Notemos que

$$i_{X\wedge Y} dvol = i_Y i_X dvol = ywdydw + xwdxdw + yzdydz + xzdxdz$$

e que a 1-forma $\alpha = (\frac{x^2+y^2}{2})(zdz + wdw)$ satisfaz $d\alpha = i_{X\wedge Y} vol$. Agora, Seja S o círculo no primeiro quadrante do yz-plano centrada no ponto $(0, y_0, z_0, 0)$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

de raio R. Logo, $\gamma(t) = (0, y_0 + Rcos(t), z_0 + Rsin(t), 0)$ parametriza S.

$$\begin{aligned} I(\Phi, S) &= \int_N \alpha \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (y_0 + Rcos(t))^2 (z_0 + Rsin(t)) Rcos(t) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} Rcos(t)(y_0^2 + 2Ry_0 cos(t) + R^2 cos^2(t))(z_0 + Rsin(t)) dt \end{aligned}$$

Como estamos integrando ao longo de um período, temos que a integração se anula para todos os somandos excepto para $cos^2(t)$. Assim

$$I(\Phi, S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 2R^2 y_0 z_0 cos^2(t) dt = R^2 y_0 z_0 \pi.$$

Por outro lado, no caso de enlaçamentos, consideremos o disco D no yz-plano tal que $\partial D = S$. Notemos que uma órbita ,ao longo de um periodo, $(s,t) \mapsto (rsin(\alpha + s), rcos(\alpha + s), lsin(\beta + t), lcos(\beta + t))$, pode interceptar D se $rsin(\alpha + s) = lcos(\beta + t) = 0$, isto é, se $s \in \{-\alpha, \pi - \alpha\}$ e $t \in \{\frac{\pi}{2} - \beta, \frac{3\pi}{2} - \beta\}$ Como D está contido no primeiro quadrante um retângulo de órbita(um período) se intercepta a D vai interceptá-lo somente num ponto da forma $(0, r, l, 0)$. Como na integral de enlaçamento o somando correspondente as áreas pequenas não é significativo sómente calcularemos os enlaçamentos no retângulos de órbitas que em nosso caso são fechados. Em particular, se $T_1 = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ temos que

$$lk_\Gamma(p) = \frac{1}{2\pi 2\pi} lk(\vartheta^\Phi(p, \Gamma), N) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi 2\pi} & \text{se } \vartheta^\Phi(p, \Gamma) \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \vartheta^\Phi(p, \Gamma) \cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Sabendo que o índice de enlaçamento assintótico independe da seqüência de períodos escolhida podemos escolher em particular a sequencia $\Gamma_n = [0, 2n\pi] \times [0, 2n\pi]$. Notemos que $\vartheta^\Phi(p, \Gamma_n)$ é um retângulo de órbita fechado formada por n^2 copias do toro $\vartheta^\Phi(p, \Gamma)$ logo

$$lk_{\Gamma_n}(p) = \frac{1}{2n\pi 2n\pi} lk(\vartheta^\Phi(p, \Gamma_n), N) = \begin{cases} \frac{n^2}{2n\pi 2n\pi} = \frac{1}{2\pi 2\pi} & \text{se } \vartheta^\Phi(p, \Gamma_n) \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \text{se } \vartheta^\Phi(p, \Gamma_n) \cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Note que $\Omega := \bigcup_{q \in D} \vartheta^\Phi(q, \Gamma_n) = \{p \in \Omega^4;\ \vartheta^\Phi(p, \Gamma_n) \cap D \neq \emptyset\}$. Agora, como $(r, s) \mapsto (0, y_0 + rcos(s), z_0 + rcos(s), 0)$ é uma parametrização de D então $\rho(r, s, t, u)$ definido por

$$((y_0 + rcos(s))cos(t), (y_0 + rcos(s))sin(t), (z_0 + rcos(s))cos(u), (z_0 + rcos(s))sin(u))$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

é uma parametrização de Ω. Fazendo as contas necessarias temos que a forma de volume nesta parametrização é $r(y_0+rcos(s))(z_0+rsin(s))drdsdtdu$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{p\in\Omega^4} lk_{\Gamma_n}(p)dvol &= \int_{p\in\Omega} lk_{\Gamma_n}(p)dvol \\
&= \int_{p\in\Omega} \frac{1}{4\pi^2}\, dvol \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\, vol(\Omega) \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^R\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(y_0+rcos(s))(z_0+rsin(s))drdsdtdu \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} 4\pi^2 r(y_0+rcos(s))(z_0+rsin(s))drds \\
&= \int_0^R\int_0^{2\pi} ry_0z_0drds \\
&= y_0z_0R^2\pi
\end{aligned}$$

Como $\int_{p\in D^4} lk_{\Gamma_n}(p)dvol$ é constante $\forall n$ então

$$lk(\Phi,S) = y_0z_0R^2\pi = I(\Phi,S).$$

7.2
Índice de Enlaçamento Assintótico entre Ações de $\mathbb{R}^k$

Seja M variedade riemanniana orientada, compacta e conexa. Sejam Φ uma ação de $\mathbb{R}^k$ em M e Ψ uma ação de $\mathbb{R}^s$ em M de difeomorfismos que preservam volume, onde $k+s=n-1$. Notemos que as Φ-órbitas são variedades imersas em M de dimensão no máximo k. Agora, por cada ponto de uma Ψ-órbita ϑ^Ψ passa uma única Φ-órbita . Logo, o conjunto de pontos das Φ-órbitas que interceptam a ϑ^Ψ tem médida nula em M. Assim, existe subconjunto de M, com volume igual ao de M, tal que cada ponto deste conjunto tem sua Φ-órbita enlaçando-se ao redor de ϑ^Ψ. O recíproco também acontece com uma Φ-órbita ϑ^Φ e a ação Ψ. Logo, é natural pensar em definir um índice que meça o enlaçamento médio das órbitas de Φ com as órbitas de Ψ. No que segue, denotaremos por Γ o k-retangulo canônico $[0,T^1]\times..\times[0,T^k]$ e por Υ o s-retângulo canônico $[0,R^1]\times..\times[0,R^s]$, usaremos $\vartheta^\Phi_{(p,\Gamma)}$ e $\vartheta^\Psi_{(q,\Upsilon)}$ para denotar o k-retângulo de órbita $\{\Phi_{(t_1,..,t_k)}(p)\ ;\ (t_1,..,t_k)\in\Gamma\}$ e o s-retângulo de órbita $\{\Phi_{(r_1,..,r_s)}(p)\ ;\ (r_1,..,r_s)\in\Upsilon\}$. Sejam Σ_k conjunto de k-cadeias singulares em M e Σ_s conjunto de s-cadeias singulares em M que satisfazem as seguintes propriedades:

1. Para cada p e q em Ω^n, cada k-retângulo canônico Γ e cada s-retângulo

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

canônico Υ existem único $\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)} \in \Sigma_k$ e único $\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)} \in \Sigma_s$ tal que $\partial\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)} = \partial\sigma^{\varphi}_{(p,\Gamma)}$ e $\partial\vartheta^{\psi}_{(q,\Upsilon)} = \partial\sigma^{\psi}_{(q,\Upsilon)}$.

2. As $\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)} \in \Sigma_k$ e as $\sigma^{\psi}_{(q,\Upsilon)} \in \Sigma_s$ variam continuamente com respeito a $(p, T^1, .., T_k)$ e com respeito a $(q, R^1, .., R^s)$, respectivamente, no complemento de conjuntos de medida nula.

3. Os conjuntos

$$\begin{aligned}
\Omega^{(\Gamma,\Upsilon)}_{(\Phi,\Sigma_s)} &= \{(p,q) \in M \times M \ ; \quad \vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)} \cap \sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)} \neq \emptyset \ \} \\
\Omega^{(\Gamma,\Upsilon)}_{\Sigma_k,\Psi} &= \{(p,q) \in M \times M \ ; \quad \sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)} \cap \vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)} \neq \emptyset \ \} \\
\Omega^{(\Gamma,\Upsilon)}_{(\Sigma_k,\Sigma_s)} &= \{(p,q) \in M \times M \ ; \quad \sigma^{\varphi}_{(p,\Gamma)} \cap \sigma^{\psi}_{(q,\Upsilon)} \neq \emptyset \ \}
\end{aligned}$$

tem medida nula em $\Omega^n \times \Omega^n$ para cada Γ e Υ fixos.

4. Seja $L(p,q)$ a forma de enlaçamento em M. Os limites

$$\lim_{T^1,..,T^k,R^1,..,R^s\to\infty} \frac{1}{T^1..T^kR^1..R^s} \int_{\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}} \int_{\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}} L = 0 \qquad (7\text{-}2)$$

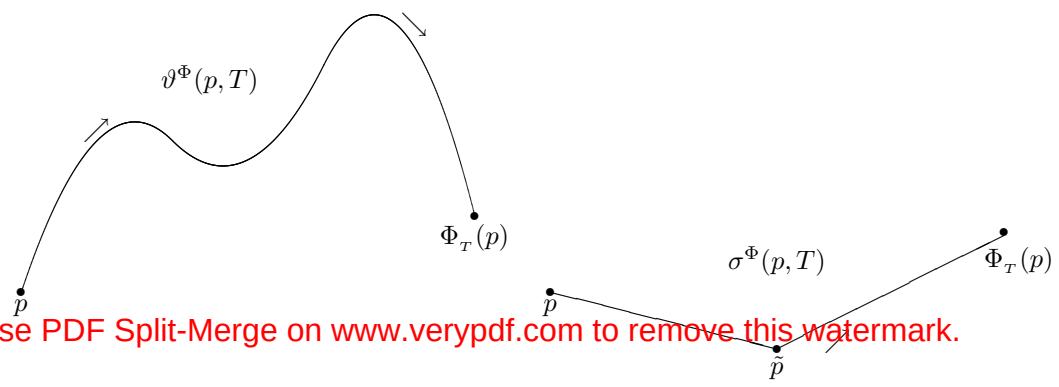
$$\lim_{T^1,..,T^k,R^1,..,R^s\to\infty} \frac{1}{T^1..T^kR^1..R^s} \int_{\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)}} \int_{\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}} L = 0 \qquad (7\text{-}3)$$

$$\lim_{T^1,..,T^k,R^1,..,R^s\to\infty} \frac{1}{T^1..T^kR^1..R^s} \int_{\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)}} \int_{\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}} L = 0 \qquad (7\text{-}4)$$

existem na topologia de $L^1(M)$

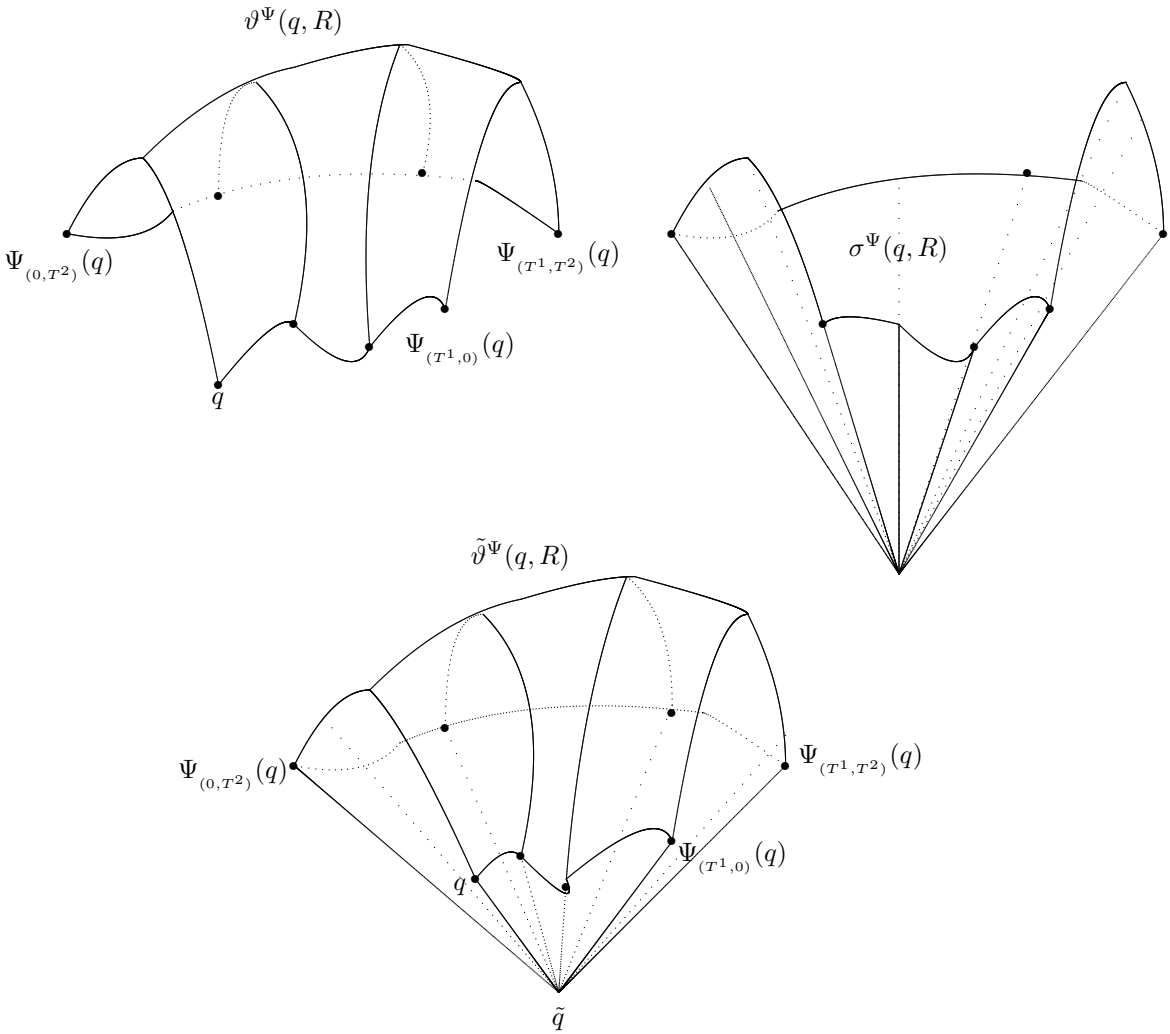
Definição 7.7 *Todo par (Σ_k, Σ_s) satisfazendo as propriedades acima será chamado de sistemas de k-volumes e s-volumes pequenos associados a Φ e Ψ.*

Exemplo 7.8



Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Teorema 7.9 *Sejam $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ em $\partial\Omega^n$, $\tilde{p} \neq \tilde{q}$. Então o par $(\Sigma_k(\tilde{p}), \Sigma_k(\tilde{q}))$ formado pelo sistema de k-cadéias singulares estreladas com vértice em $\tilde{p}$ e o sistema de s-cadéias singulares com vértice em $\tilde{q}$ será um sistema de k-volumes e s-volumes pequenos associados a Φ e Ψ.*

Prova: Por construção como vimos na seção anterior $(\Sigma_k(\tilde{p}), \Sigma_k(\tilde{q}))$ satisfazem as propriedades 1 e 2 de um sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ. Agora, para mostrar as propriedades 3 e 4 lembremos que

$$\begin{aligned}
\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)} &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}(\mathcal{C}(\partial_i^0\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}) - \mathcal{C}(\partial_i^1\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}));\\
\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)} &= \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+k}(\mathcal{C}(\partial_i^0\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}) - \mathcal{C}(\partial_i^1\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)})).
\end{aligned}$$

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Logo, devemos mostrar que estas propriedades são satisfeitas para cada família $\mathcal{C}(\partial_i^j \vartheta_{(p,\Gamma)})$. Neste caso, será suficiente mostrar para uma única família, já que no resto se mostra de maneira análoga. Em particular, escolheremos as familias :

$$\begin{aligned} \sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)} &:= \mathcal{C}(\partial_k^0 \vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}) \ ; \\ \sigma^{(s,0)}_{(q,\Upsilon)} &:= \mathcal{C}(\partial_k^0 \vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}). \end{aligned}$$

Estas cadéias singulares em Ω^n são definidas pelas aplicações:

$$\begin{aligned} F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(\vec{t},u) &:= (1-u)\Phi_{(\vec{t},0)}(p) + u\tilde{p} \ ; \\ F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(\vec{r},t) &:= (1-t)\Phi_{(\vec{r},0)}(q) + t\tilde{q}, \end{aligned}$$

onde $\vec{t'} = (t_1,..,t_{k-1}) \in \widehat{\Gamma}^k$, $\vec{r'} = (r_1,..,r_{s-1}) \in \widehat{\Upsilon}^s$ e $u,t \in [0,1]$. No que segue, $\vec{t} := (t_1,..,t_{k_1},t_k)$, $\vec{r} := (r_1,..,r_{s_1},r_s)$ e para todo i a medida de Lebesgue e a forma de volume em $\mathbb{R}^i$ serão denotadas por μ_i e por $d\mu_i$, respectivamente. Primeiro mostraremos (7-3). Procedendo analogamente como na demonstração da propriedade 3 de sistema de k-volumes pequenos da seção anterior, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que a integral da fórmula de enlaçamento nas cadeias singulares $\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}$ e $\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}$ satisfaz

$$\begin{aligned} A(p,q) &:= \left| \int_{x\in\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}} \int_{y\in\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}} L_{(x,y)} \right| \\ &= \int_0^{R^s} .. \int_0^{R^1} \int_0^1 \int_0^{T^{k-1}} .. \int_0^{T^1} \frac{C}{\|\Psi_{\vec{r}}(q) - F^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}(\vec{t'},u)\|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Então, sabendo que para cada $\vec{r}$ a aplicação $\Psi_{\vec{r}}$ é um difeomorfismo que preserva volume temos usando também a desigualdade (7-1) que

$$\int_{q\in\Omega_2} \int_{p\in\Omega_1} |A(p,q)|\, vol(p) vol(q) \leq ECT^{k-1}..T^1R^s..R^1 vol(\Omega_1).$$

Portanto

$$\frac{1}{T^1..T^rR^1..R^s} \int_{q\in\Omega_2} \int_{p\in\Omega_1} \left| \int_{x\in\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}} \int_{y\in\vartheta^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}} L_{(x,y)} \right| vol(p) vol(q) \leq \frac{ECvol(\Omega_1)}{T^k}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

mostrando assim 7-3, já que $T^k \to \infty$. Analogamente para (7-2) no caso de $\sigma^{(s,0)}_{(p,\Upsilon)}$ temos que existe constante $A > 0$ tal que

$$\frac{1}{T^1..T^r R^1..R^s}\int_{q\in\Omega_2}\int_{p\in\Omega_1}\left|\int_{x\in\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in\sigma^{(s,0)}_{(q,\Upsilon)}} L_{(x,y)}\right| vol(p)vol(q) \leq \frac{EAvol(\Omega_2)}{R^s}.$$

, O fato de que $R^s \to \infty$ mostra (7-2). Agora para mostrar (7-4) consideremos $\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}$ e $\sigma^{(s,0)}_{(p,\Upsilon)}$. Procedendo como na demonstração da propriedade 3 da existência de volumes pequenos asociados a ações e sub-variedades podemos mostrar que existe constante K tal que

$$\begin{aligned} A(p,q) &:= \left|\int_{x\in\sigma^{(k,0)}_{(p,\Gamma)}}\int_{y\in\sigma^{(s,0)}_{(p,\Upsilon)}} L_{(x,y)}\right| \\ &\leq \int_0^1\int_{\vec{r'}\in\tilde{\Upsilon}^s}\int_0^1\int_{\vec{t'}\in\tilde{\Gamma}^k}\frac{Kd\mu_{k-1}dud\mu_{s-1}dt}{\|(1-u)\Phi_{(\vec{t'},0)}(p)+u\tilde{p}-(1-t)\Psi_{(\vec{r'},0)}(q)-t\tilde{q}\|^{n-1}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, Para cada $\vec{r'}$ e cada $\vec{t'}$ as familias de aplicações $\{h^1_u\}$ e $\{h^2_t\}$ definidas em Ω^n por $h^1_u(p) = (1-u)\Phi_{(\vec{t'},0)}(p)+t\tilde{p}$ e $h^2_t(q) = (1-t)\Psi_{(\vec{r'},0)}(q)-t\tilde{q}$ satisfazem

$$(h^1_u)^*(vol) = (1-u)^n vol; \qquad (h^2_t)^*(vol) = (1-t)^n vol$$

Portanto, usando este pullback na integração e por (7-1) temos que

$$\begin{aligned} I_1(t,u) &:= \int_{p\in\Omega^n}\int_{q\in\Omega^n}\frac{1}{\|(1-u)\Phi_{(\vec{t},0)}(p)+u\tilde{p}-(1-t)\Psi_{(\vec{r},0)}(q)-t\tilde{q}\|^{n-1}}vol(p)vol(q) \\ &= \frac{1}{(1-t)^n(1-u)^n}\int_{p\in(h^1_u)_*(\Omega^n)}\int_{q\in(h^2_t)_*(\Omega^n)}\frac{1}{\|p-q\|^{n-1}}vol(p)vol(q) \\ &\leq \frac{E}{(1-t)^n(1-u)^n}. \end{aligned}$$

Agora, mostraremos propriedade 3. fixemos Γ e Υ. Seja C uma s-cadéia em Ω^n. Por cada ponto q de C passa uma única Φ-órbita(k-cadéia). Então o conjunto de pontos que interceptam C é no maximo de dimensão $k+r = n-1$, isto é de medida nula em Ω^n. Agora, suponha que o conjunto $\Omega^{(\Gamma,\Upsilon)}_{(\Phi,\Sigma_s)}$ tem medida não nula em $\Omega^n \times \Omega^n$. Neste caso, existe um $C := \sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon}$ tal que o conjunto $A = \{p \in \Omega^n;\ \vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}\}$ tem medida não nula mas isto é um absurdo já que notemos que A é um subconjunto de pontos das órbitas que

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

interceptam C o qual tem medida nula. Análogo para o conjunto $\Omega^{(\Gamma,\Upsilon)}_{(\Sigma_k,\Psi)}$. Para mostrar o caso $\Omega^{\Gamma,\Upsilon)}_{(\Sigma_k,\Sigma_s)}$ de novo suponha que este tenha medida não nula em $\Omega^n \times \Omega^n$. Então, existe um $\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}$ que não contém $\tilde{p}$, o vértice de $\Sigma_k(\tilde{p})$ com a propriedade que o conjunto B de pontos p tal que $\sigma^{\Phi}_{(p,\Gamma)}$ interceptam $\sigma^{\Psi}_{(q,\Upsilon)}$ tem medida não nula em Ω^n, mas isto é um absurdo, já que poderíamos proceder, usando homotopias, como no caso de seção anterior, de enlaçamento de uma k-ação com uma sub-variedade para mostrar que este conjunto é de medida nula. $\square$

Sejam Γ e Υ fixos . No teorema anterior mostramos a existência de um sistema de k-volumes e s-volumes associados a Φ e Ψ. Seja U o conjunto de medida nula que é a união dos conjuntos definidos na propriedade 3 de um sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ. Seja $D_{(\Gamma,\Upsilon)}$ o complemento de U em $\Omega^n \times \Omega^n$. Logo podemos definir a função $lk_{(\Gamma,\Upsilon)} : D_{(\Gamma,\Upsilon)} \to \mathbb{R}$ por

$$lk_{(\Gamma,\Upsilon)}(p,q) = \frac{1}{T^1..T^k R^1..R^s} lk(\tilde{\vartheta}^{\Phi}(p,\Gamma), \tilde{\vartheta}^{\Psi}(p,\Upsilon)). \tag{7-5}$$

Observemos que os $\vartheta^{\Phi}(p,\Gamma)$ variam continuamente com respeito a p e que os $\sigma^{\Phi}(p,\Gamma)$, pela condição 2 de Σ, variam continuamente com respeito a p no complemento de um conjunto de medida nula. Assim, os $\widetilde{\vartheta}^{\Phi}_{(p,\Gamma)}$ variam continuamente com respeito a p no complemento de um conjunto de medida nula e podemos afirmar o mesmo para os $\tilde{\vartheta}^{\Psi}(q,\Upsilon)$. Assim , as funções $lk_{(\Gamma,\Upsilon)}$. são funções mensuráveis definidas em $\Omega_n \times \Omega_n$.

Proposição 7.10 *A função limite $\widetilde{lk} : \Omega_n \times \Omega_n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\begin{aligned} \widetilde{lk}(p,q) &:= \lim_{T^1,T^k,R^1,..,R^k \to \infty} lk_{(\Gamma,\Upsilon)}(p,q) \\ &= \lim_{T^1,T^k,R^1,..,R^k \to \infty} \frac{1}{T^1..T^k R^1..R^s} lk(\widetilde{\vartheta}^{\Phi}(p,\Gamma), \widetilde{\vartheta}^{\Psi}(q,\Upsilon). \end{aligned} \tag{7-6}$$

existe na topologia de $L^1(\Omega_n \times \omega_n)$. Alem disso, $\widetilde{lk}$ é uma função integravel que independe do sistema de volumes pequenos associados a Φ e Ψ escolhido.

Prova: Sejam $X = X^1 \wedge .. \wedge X^k$ e $Y = Y^1 \wedge .. \wedge Y^s$ o k-campos e o s-campo de divergência nula associados a Φ e Ψ, respectivamente. Definamos a função $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(p,q) := \frac{(-1)^k}{a_n} \frac{p-q) \times X(q) \cdot Y(p)}{\|p-q\|^n}. \tag{7-7}$$

Observemos que as singularidades de f são de ordem $n-1$ na diagonal de $\Omega_n \times \Omega_n$ (Pontos de intercepção de Ω_n e Ω_n). Como esta diagonal tem dimensão n temos que f é uma função de valor absoluto integrável, isto é, $f \in L^1(\Omega_n \times \Omega_n)$. usando a fórmula (2-18) para a forma de enlaçamento temos

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

que

$$\begin{aligned} A(p,q) &:= \int_{y\in\vartheta^{\Psi}_{(p,\Upsilon)}}\int_{x\in\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}} L_{(x,y)} \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n}\int_{y\in\vartheta^{\Psi}_{(p,\Upsilon)}}\int_{x\in\vartheta^{\Phi}_{(p,\Gamma)}} \frac{y-x)\times N^{\Phi}(x)\cdot N^{\Psi}(y)}{\|y-x\|^n} vol(x)vol(y), \end{aligned}$$

onde N^{Φ} e N^{Ψ} são os campos unitários singulares de Φ e Ψ, respectivamente. Agora, por(2-18) e por (6-6)

$$A(p,q) = \frac{(-1)^k}{a_n}\int_0^{R^s}..\int_0^{R^1}\int_0^{T^k}..\int_0^{T^1}\frac{(\Psi_{\vec{r}}(q)-\Phi_{\vec{t}}(p))\times X(\Phi_{\vec{t}}(p))\cdot Y(\Psi_{\vec{r}}(q))}{\|Psi_{\vec{r}}(q)-\Phi_{\vec{t}}(p)\|^n}d\mu_k d\mu_s,$$

onde $\vec{r}=(r_1,..,r_s)$, $\vec{t}=(t_1,..,t_k)$, $d\mu_k = dt_1..dt_k$ e $d\mu_r = dr_1..dr_s$. Definamos a ação Θ de $\mathbb{R}^{k+s}$ em $\Omega_n\times\Omega_n$

$$\Theta_{(\vec{t},\vec{r})}(p,q) = (\Phi_{\vec{t}}(p), \Psi_{\vec{r}}(q)).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f(\Theta_{(\vec{t},\vec{r})}(p,q)) &= f(\Phi_{\vec{t}}(p), \Psi_{\vec{r}}(q)) \\ &= \frac{(-1)^k}{a_n}\frac{(\Psi_{\vec{r}}(q)-\Phi_{\vec{t}}(p))\times X(\Phi_{\vec{t}}(p))\cdot Y(\Psi_{\vec{r}}(q))}{\|Psi_{\vec{r}}(q)-\Phi_{\vec{t}}(p)\|^n} \end{aligned}$$

Disso, da propriedade 4 de sistema de volumes pequenos e a definição de $\widetilde{lk}$ temos que

$$\widetilde{lk}(p,q) = \lim_{T^1,..,T^k,R^1,..,R^s\to\infty}\frac{1}{T^1..T^kR^1..R^s}\int_0^{R^s}..\int_0^{R^1}\int_0^{T^k}..\int_0^{T^1} f(\Theta_{(\vec{t},\vec{r})}(p,q))d\mu_k d\mu_s.$$

Portanto, do teorema ergódico para ações, resultado (4-7) temos que $\widetilde{lk}(p,q)$ converge na toplogia $L^1(\Omega_n\times\Omega_n)$. Alem disso, o resultado (4-8) do mesmo teorema garante que

$$\int_{q\in\Omega_n}\int_{p\in\Omega_n}\widetilde{lk}(p,q)vol(p)vol(q) = \int_{q\in\Omega_n}\int_{p\in\Omega_n} f(p,q)vol(p)vol(q) \qquad (7\text{-}8)$$

Esta última equação garante a independencia da integral com respeito ao sistema de volumes pequenos escolhido. □

Definição 7.11 *O índice*

$$lk(\Phi,\Psi) := \int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega^n}\widetilde{lk}(p,q)vol(p)vol(q).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

será chamadop o índice de enlaçamento assintótico médio das ações Φ e Ψ.

Agora, mostraremos um teorema muito importante que afirma a igualdade da invariante de Hopf e da invariante de enlaçamento assintótico das ações Φ e Ψ.

Teorema 7.12

$$lk(\Phi, \Psi) = I(\Phi, \Psi),$$

onde $I(\Phi, \Psi)$ é o invariante de Hopf para Φ e Ψ.

Prova: Por (7-8) e (7-7) temos que

$$\begin{aligned}\int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega^n} \widetilde{lk}(p,q)vol(p)vol(q) &= \int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega^n} f(p,q)vol(p)vol(q)\\ &= \int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega^n} \frac{(-1)^k}{a_n}\frac{p-q)\times X(q)\cdot Y(p)}{\|p-q\|^n}\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Biot-Savart para o k-campo X temos que

$$\int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega_1} \widetilde{lk}(p,q)vol(p)vol(q) = \int_{q\in\Omega^n} BS(X)(q)\cdot Y(q)vol(q)$$

Finalmente pela fórmula (4-3) temos que

$$\begin{aligned}\int_{q\in\Omega^n}\int_{p\in\Omega^n} \widetilde{lk}(p,q)vol(p)vol(q) &= \int_{q\in\Omega^n} \alpha\wedge i_Y vol\\ &= I(\Phi,\Psi).\end{aligned}$$

Exemplo 7.13 *Seja Φ a ação de $\mathbb{R}^2$ em Ω^4 definida no exemplo 6.1.9. cujos campos associados são $X_1(x,y,z,w) = (y,-x,0,0)$ e $X_2(x,y,z,w) = (0,0,w,-z)$. Se $X = X_1\wedge X_2$ então*

$$i_X dvol = ywdydw + xwdxdw + yzdydz + xzdxdz.$$

A 1-forma $\alpha = (\frac{x^2+y^2}{2})(zdz + wdw)$ satisfaz $d\alpha = i_X dvol$. Agora, Fixemos o ponto $(0, y_0, z_0, 0) \in \Omega^4$ no primeiro quadrante do plano yz. Sejam $B^4 \subset \Omega^4$ uma bola centrada em $(0, y_0, z_0, 0)$ de raio R suficientemente pequeno tal que suas coordenadas y e z são positivas e ψ uma ação de $\mathbb{R}$ em B^4 definida pelo campo $Y(x,y,w,z) = (0, -(z-z_0), (y-y_0), 0)$. Logo,

$$i_Y dvol = (y-y_0)dxdydw + (z-z_0)dxdzdw.$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

A 2-forma $\beta = \dfrac{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{2}dxdw$ *satisfaz* $d\beta = i_Y dvol$. *Logo, se* $tildeR = \sqrt{R^2-x^2-w^2}$ *temos que:*

$$\begin{aligned}
I(\varphi,\psi) &= \int_{B^4} \beta\wedge d\alpha \\
&= \int_{B^4} (\frac{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{2})(yz)\ dxdydzdw \\
&= \int_{(x,w)\in D_R(0,0)} \int_{(y,z)\in D_{\tilde{R}}(y_0,z_0)} (\frac{(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{2})(yz)\ dydzdxdw \\
&= \frac{1}{2}\int_{(x,w)\in D_R(0,0)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\tilde{R}} r^2(y_0+rcos\theta)(z_0+rsen\theta)rdrd\theta dxdw \\
&= \frac{1}{2}\int_{(x,w)\in D_R(0,0)} \int_0^{2\pi}\int_0^{\tilde{R}} r^3 y_0 z_0 drd\theta dxdw \\
&= \frac{y_0z_0\pi}{4}\int_{(x,w)\in D_R(0,0)} r^4\Big]_0^{\tilde{R}}\ dxdw \\
&= \frac{y_0z_0\pi}{4}\int_{(x,w)\in D_R(0,0)} (R^2-x^2-w^2)^2\ dxdw \\
&= \frac{y_0z_0\pi}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} (R^2-r^2)^2\ rdrd\theta \\
&= \frac{y_0z_0\pi^2R^6}{12}
\end{aligned}$$

Para calcular $lk(\varphi,\psi)$ *o índice de enlaçamento assintótico das ações podemos escolher sequencias quaisquer dos* T_n *e* S_n, *em particular* $T_n = [0,2n\pi]\times[0,2n\pi]$ *e* $S_n = [0,2n\pi]$. *Notemos que* $\vartheta^\varphi(p,T_n)$ *é um pedaço de órbita fechado composta por* n^2 *copias do toro* $\vartheta^\varphi(p,[0,2\pi]\times[0,2\pi])$ *e* $\vartheta^\psi(q,S_n)$ *é composta de* n *copias do círculo* $\vartheta^\psi(q,[0,2\pi])$ *logo, se* D_p *é o disco num plano paralelo ao plano* yz *cujo bordo é* $\vartheta^\psi(q,[0,2\pi])$ *então, analogamente como no exemplo 6.1.9,*

$$\begin{aligned}
lk_{(T_n,S_n)}(p,q) &= \frac{1}{T_n^1T_n^2S_n^1} lk(\vartheta^\varphi(p,T_n),\vartheta^\psi(q,S_n)) \\
&= \begin{cases} \dfrac{n^2n}{(2n\pi)^3} = \dfrac{1}{8\pi^3} & se\ \vartheta^\varphi(p,T_n)\cap D_q \neq \emptyset \\ 0 & se\ \vartheta^\varphi(p,T_n)\cap D_q = \emptyset. \end{cases}
\end{aligned}$$

Pelo que as funções $lk_{(T_n,S_n)}$ *são constantes. Assim usando o resultado do*

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

exemplo 6.1.9 temos

$$\begin{aligned}
lk(\varphi,\psi) &= \int_{p\in\Omega^4}\int_{q\in B^4} lk_{(T_n,S_n)}(p,q)dvol(p)dvol(q)\\
&= \int_{p\in\Omega}\Big[\int_{(x,w)\in D_R(0,0)}\Big[\int_{(y,z)\in D_{\tilde{R}}(y_0,z_0)} lk_{(T_n,S_n)}(p,(x,y,z,w))dydz\Big]\,dxdw\Big]\,dvol(p)\\
&= \int_{(x,w)\in D_R(0,0)}\Big[\int_0^{\tilde{R}}\Big[\int_{p\in\Omega}\int_0^{2\pi} lk_{(T_n,S_n)}(p,(x,y_0+r\cos(\theta),z_0+r\sin(\theta),w)d\theta\Big]\,rdr\Big]\,dxdw\\
&= \int_{(x,w)\in D_R(0,0)}\Big[\int_0^{\tilde{R}}[y_0z_0\pi r^2]\,rdr\Big]\,dxdw\\
&= \frac{y_0z_0\pi}{4}\int_{(x,w)\in D_R(0,0)}(R^2-x^2-y^2)^2dxdw\\
&= \frac{y_0z_0\pi}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^R(R^2-r^2)^2rdrd\theta\\
&= \frac{y_0z_0\pi^2R^6}{12}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$lk(\varphi,\psi)=\frac{y_0z_0\pi^2R^6}{12}=I(\varphi,\psi).$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.

Referências Bibliográficas

[ArK] V.I. Arnold, B.A. Khesin, Topological Methods in Hydrodynamics, Springer, 1998.

[Arn] The asymptotic Hopf invariant and its applications, Sel. Math. Sov. 5(1986), 327-3454. 1

[BT] R. Bott, L. Tu, Differential Forms in algebriaic Topology, Springer, 1982.

[CaC] A. Candel, L. Conlon. Foliations I. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Col] G. Contreras, R. Iturriaga, Average linking numbers. Erg.Th. & Dynam. Sys. 19(1999), 1425-1435.

[deR] G. de Rham, Differentiable Manifolds, Springer, 1984.

[DuS] N. Dunford, J.T. Schwartz. Linear Operator I, Interscience Publishers, 1958.

[FrW] Frank W. Warner. Foundation of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Springer, 1983.

[Geo] H.O. Georgii, Gibbs Measures and Phase Transitions, de Gruyter, 1988.

[Tem] A. A. Tempelman, Ergodic theorems for general dynamical systems. Sov. Math. Dokl. 8(1967), 1213-1216.

[Vog] T. Vogel, On the asymptotic linking number, Proc. Amer. Math. Soc. 1

[VoK] D. Kotschick, T. Vogel, Linking number of measured Foliations, Erg.Th. & Dynam. Sys. 23(2003), 541-558.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0015584/CA

Please purchase PDF Split-Merge on www.verypdf.com to remove this watermark.